

DẠNG 6**Cực trị số phức****1. PHẦN ĐỀ BÀI**

- Câu 1:** Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P = \left| \frac{2z+i}{z} \right|$ với z là số phức khác 0 và thỏa mãn $|z| \geq 2$. Tính tỉ số $\frac{M}{m}$.
- A. $\frac{M}{m} = 3$. B. $\frac{M}{m} = \frac{4}{3}$. C. $\frac{M}{m} = \frac{5}{3}$. D. $\frac{M}{m} = 2$.
- Câu 2:** Trong các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-i| = |\bar{z}-2+3i|$, số phức z_0 có môđun nhỏ nhất. Phần ảo của z_0 là
- A. $\frac{2}{3}$. B. $\frac{4}{3}$. C. $\frac{3}{2}$. D. $\frac{3}{4}$.
- Câu 3:** Cho tất cả các số phức $z = x + yi$, ($x, y \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $|z+2i-1| = |z+i|$. Biết z được biểu diễn bởi điểm M sao cho MA ngắn nhất với $A(1;3)$. Tìm $P = 2x+3y$.
- A. 9. B. 11. C. -3. D. 5.
- Câu 4:** Cho số phức z thỏa mãn $|z|=1$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z+1| + |z^2-z+1|$. Tính $M.m$.
- A. $\frac{13\sqrt{3}}{4}$. B. $\frac{39}{4}$. C. $3\sqrt{3}$. D. $\frac{13}{4}$.
- Câu 5:** Gọi M là điểm biểu diễn số phức $z_1 = a + (a^2 - 2a + 2)i$ và N là điểm biểu diễn số phức z_2 biết $|z_2 - 2 - i| = |\bar{z}_2 - 6 - i|$. Tìm độ dài ngắn nhất của đoạn MN .
- A. $2\sqrt{5}$. B. $\frac{6\sqrt{5}}{5}$. C. 1. D. 5.
- Câu 6:** Cho số phức z và w biết chúng đồng thời thỏa mãn hai điều kiện: $\left| \frac{(1+i)z}{1-i} + 2 \right| = 1$ và $w = iz$.
Tìm giá trị lớn nhất của $M = |z-w|$
- A. $M = 3\sqrt{3}$. B. $M = 3$. C. $M = 3\sqrt{2}$. D. $2\sqrt{3}$.
- Câu 7:** Cho số phức z thỏa mãn $|z^2 - 2iz| = 2$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |iz+1|$ bằng
- A. 2. B. 3. C. $\sqrt{3}$. D. $\sqrt{2}$.
- Câu 8:** Với ai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $z_1 + z_2 = 8+6i$ và $|z_1 - z_2| = 2$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |z_1| + |z_2|$ là:
- A. $5+3\sqrt{5}$. B. $2\sqrt{26}$. C. $4\sqrt{6}$. D. $34+3\sqrt{2}$.

Số phức

- Câu 9:** Xét tập hợp S các số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) thỏa mãn điều kiện $|3z - \bar{z}| = |(1+i)(2+2i)|$. Biểu thức $Q = |z - \bar{z}|(2-x)$ đạt giá trị lớn nhất là M và đạt được tại $z_0 = x_0 + y_0i$. Tính giá trị $T = M \cdot x_0 y_0^2$.
- A. $T = -\frac{9\sqrt{3}}{2}$. B. $T = \frac{9\sqrt{3}}{4}$. C. $T = \frac{9\sqrt{3}}{2}$. D. $T = -\frac{9\sqrt{3}}{4}$.
- Câu 10:** Cho số phức z thỏa mãn $|z^2 - 2z + 5| = |(z-1+2i)(z+3i-1)|$. Tính $\min|w|$, với $w = z - 2 + 2i$.
- A. $\min|w| = \frac{1}{2}$. B. $\min|w| = 1$. C. $\min|w| = \frac{3}{2}$. D. $\min|w| = 2$.
- Câu 11:** Xét các số phức z thỏa mãn $|z - 2 - i| = 1$. Gọi m, M là giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của $|z|$. Giá trị $M + m$ bằng:
- A. 3. B. 2. C. $1 + 2\sqrt{5}$. D. $2\sqrt{5}$.
- Câu 12:** Xét các số phức z thỏa mãn $|z| = 1$, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\left|z^4 + z + \frac{1}{2}\right|^2$ bằng
- A. $\frac{\sqrt{2}}{8}$. B. $\frac{1}{8}$. C. $\frac{1}{16}$. D. $\frac{1}{4}$.
- Câu 13:** Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $z_1 \neq z_2$ và $z_1^2 - 5z_1z_2 + 4z_2^2 = 0$. Gọi M, N lần lượt là điểm biểu diễn của số phức $z_1, \bar{z}_2$ thỏa mãn diện tích tam giác OMN bằng 12. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |2z_1 - z_2|$ là
- A. $14\sqrt{3}$. B. $21\sqrt{2}$. C. $\frac{14\sqrt{6}}{3}$. D. $7\sqrt{6}$.
- Câu 14:** Cho số phức z có $|z| = 1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |z^2 - z| + |z^2 + z + 1|$ là
- A. $\frac{13}{4}$. B. 3. C. $\sqrt{3}$. D. $\frac{11}{4}$.
- Câu 15:** Xét số phức z thỏa mãn $(1+2i)|z| = \frac{\sqrt{10}}{z} - 2 + i$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?
- A. $\frac{3}{2} < |z| < 2$. B. $|z| > 2$. C. $|z| < \frac{1}{2}$. D. $\frac{1}{2} < |z| < \frac{3}{2}$.
- Câu 16:** Cho số phức z thỏa mãn $|z - 2 - 4i| = |z - 2i|$ và biểu thức $|iz + 2 - i|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm phần ảo của số phức z .
- A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. B. $-\frac{5}{2}$. C. $-\frac{3}{2}$. D. $\frac{5}{2}$.
- Câu 17:** Xét các số phức z thỏa mãn $|z - 1 - 3i| = 2$. Số phức z mà $|z - 1|$ nhỏ nhất là
- A. $z = 1 + 5i$. B. $z = 1 + i$. C. $z = 1 + 3i$. D. $z = 1 - i$.
- Câu 18:** Cho các số phức z và w thỏa mãn $(2+i)|z| = \frac{z}{w} + 1 - i$. Tìm giá trị lớn nhất của $T = |w + 1 - i|$.

A. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$.

B. $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

C. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

D. $\sqrt{2}$.

Câu 19: Cho số phức z và w thỏa mãn $(1+i)|z| = \frac{z}{w} + 2 - i$. Tính giá trị lớn nhất của $T = |w - 2i|$

A. $\frac{\sqrt{5}}{3} + 2$.

B. $\frac{\sqrt{5}}{3}$.

C. $\frac{\sqrt{5}}{3} + 5$.

D. $\sqrt{5}$

Câu 20: Cho số phức z và w thỏa mãn $(3+2i)|z| = \frac{z}{iw-1+3i} + 1 - i$. Tính giá trị lớn nhất của $T = |w|$

A. $\frac{\sqrt{2}}{3} + \sqrt{11}$.

B. $\frac{\sqrt{2}}{5} + \sqrt{10}$.

C. $\frac{5}{\sqrt{2}}$.

D. $\frac{\sqrt{5}}{5} + \sqrt{13}$

Câu 21: Cho z là số phức thỏa mãn $|\bar{z}| = |z + 2i|$. Giá trị nhỏ nhất của $|z - 1 + 2i| + |z + 1 + 3i|$ là

A. $5\sqrt{2}$.

B. $\sqrt{13}$.

C. $\sqrt{29}$.

D. $\sqrt{5}$.

Câu 22: Cho z_1, z_2 là các số phức khác 0 thỏa mãn $|z_1|z_1 = 9|z_2|z_2$. Gọi M, N lần lượt là điểm biểu diễn các số phức z_1 và $\bar{z}_2$. Biết tam giác OMN có diện tích bằng 6, giá trị nhỏ nhất của $|z_1 + z_2|$ bằng

A. 8.

B. 6.

C. $4\sqrt{2}$.

D. $3\sqrt{2}$.

Câu 23: Các số phức z_1, z_2 thỏa mãn $w = \frac{z_1 + 2 - i}{(z_1 + \bar{z}_1)i + 1}$ là số thực và $|4z_2 + 8 + 13i| = 4$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z_1 + z_2|$ bằng

A. $\frac{21}{16}$.

B. $\frac{\sqrt{37}}{4}$.

C. 0.

D. $\frac{\sqrt{37} - 4}{4}$.

Câu 24: Cho các số phức z và w thỏa mãn $(3-i)|z| = \frac{z}{w-1} + 1 - i$. Tìm giá trị lớn nhất $T = |w + i|$.

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

B. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

C. 2.

D. $\frac{1}{2}$.

Câu 25: Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z + 2| = |z + 2i|$. Biết giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$A = |z - 1 - 2i| + |z - 3 - 4i| + |z - 5 - 6i|$ được viết dạng $\frac{a + b\sqrt{17}}{\sqrt{2}}$ với a, b là số hữu tỉ. Giá trị của $3a - b$ bằng

A. 4.

B. 2.

C. 1.

D. 3.

Câu 26: Trong các số phức z thỏa mãn $|z - 3 - 4i| = 2$ có hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 - z_2| = 1$. Giá trị nhỏ nhất của $|z_1|^2 - |z_2|^2$ bằng

A. -10.

B. $-4 - 3\sqrt{5}$.

C. -5.

D. $-6 - 2\sqrt{5}$.

Câu 27: Cho số phức $z = a + bi$, ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $|2z + 2 - 3i| = 1$. Khi biểu thức $P = 2|z + 2| + |z - 3|$ đạt giá trị lớn nhất thì giá trị của $a - b$ bằng

A. -3.

B. 2.

C. -2.

D. 3.

Câu 28: Cho số phức z thỏa mãn $|z-1-2i|+|z-4-6i|=9$, giá trị lớn nhất của $|z-10-14i|$ là

- A. 17. B. 20. C. 15. D. 12.

Câu 29: Xét các số phức z, w thỏa mãn $|z|=2, |iw-2+5i|=1$. Giá trị nhỏ nhất của $|z^2-wz-4|$ bằng

- A. 4. B. $2(\sqrt{29}-3)$. C. 8. D. $2(\sqrt{29}-5)$.

Câu 30: Cho các số phức z, w thỏa mãn $|w+i|=\frac{3\sqrt{5}}{5}$ và $5w=(2+i)(z-4)$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=|z-2i|+|z-6-2i|$.

- A. 7. B. $2\sqrt{53}$. C. $2\sqrt{58}$ D. $4\sqrt{13}$.

Câu 31: Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1+2+3i|=5, |z_2+2+3i|=3$. Gọi m_0 là giá trị lớn nhất của phần thực số phức $\frac{z_1+2+3i}{z_2+2+3i}$. Tìm m_0 .

- A. $m_0=\frac{3}{5}$. B. $m_0=\frac{81}{25}$. C. $m_0=3$. D. $m_0=5$.

Câu 32: Cho số phức z thỏa mãn $|(1+i)z+2|+|(1+i)z-2|=4\sqrt{2}$. Gọi $m=\max|z|; n=\min|z|$ và số phức $w=m+ni$. Tính $|w|^{2018}$

- A. 4^{1009} . B. 5^{1009} . C. 6^{1009} . D. 2^{1009} .

Câu 33: Cho số phức z thỏa mãn $|(1+i)z+1-3i|=3\sqrt{2}$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=|z+2+i|+\sqrt{6}|z-2-3i|$ bằng

- A. $5\sqrt{6}$. B. $\sqrt{15}(1+\sqrt{6})$. C. $6\sqrt{5}$. D. $\sqrt{10}+3\sqrt{15}$.

Câu 34: Hai số phức z, w thay đổi nhưng luôn thỏa mãn đẳng thức $(1+i)|z^2-2iz-1|=\frac{2019\bar{z}+2019i}{w}+2-2i$. Giá trị lớn nhất của $|w|$ là

- A. $\frac{2019\sqrt{2}}{4}$. B. $\frac{2019\sqrt{2}}{2}$. C. 2019. D. Đáp án khác.

II. PHẦN HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT**BẢNG ĐÁP ÁN**

1.C	2.C	3.A	4.A	5.B	6.C	7.C	8.B	9.D	10.B
11.D	12.B	13.D	14.A	15.D	16.D	17.B	18.A.	19.A	20.B
21.B	22.A	23.D	24.B	25.C	26.A	27.A	28.A	29.C	30.C
31.D	32.C	33.C	34.A						

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT**Câu 1: Chọn C**

$$\text{Ta có } P = \left| \frac{2z+i}{z} \right| = \frac{|2z+i|}{|z|} \Rightarrow \frac{|2z|-|i|}{|z|} \leq P \leq \frac{|2z|+|i|}{|z|} \Leftrightarrow 2 - \frac{1}{|z|} \leq P \leq 2 + \frac{1}{|z|} \Leftrightarrow \frac{3}{2} \leq P \leq \frac{5}{2}.$$

$$\text{Vậy } \frac{M}{m} = \frac{5}{3}.$$

Câu 2: Chọn CGiả sử $z_0 = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$.

$$\text{Ta có: } |z - i| = |\bar{z} - 2 + 3i| \Leftrightarrow |x + (y-1)i| = |(x-2) + (-y+3)i|$$

$$\Leftrightarrow x^2 + (y-1)^2 = (x-2)^2 + (-y+3)^2 \Leftrightarrow y = -x + 3.$$

$$|z_0| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (-x+3)^2} = \sqrt{2x^2 - 6x + 9} = \sqrt{2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{2}} \geq \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

$$\text{Vậy } |z_0|_{\min} = \frac{3}{\sqrt{2}} \text{ khi và chỉ khi } x = \frac{3}{2} \Rightarrow y = \frac{3}{2} \Rightarrow z_0 = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}i, \text{ suy ra phần ảo của } z_0 \text{ bằng } \frac{3}{2}.$$

Câu 3: Chọn AGọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$.

$$\text{Ta có: } |z + 2i - 1| = |z + i|$$

$$\Leftrightarrow |x + yi + 2i - 1| = |x + yi + i| \Leftrightarrow |(x-1) + (y+2)i| = |x + (y+1)i|$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = x^2 + (y+1)^2 \Leftrightarrow x - y - 2 = 0.$$

Để thấy tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z là đường thẳng: $x - y - 2 = 0 \Rightarrow M(x; x-2)$

$$\overrightarrow{MA} = (x-1; x-5) \Rightarrow |\overrightarrow{MA}| = \sqrt{(x-1)^2 + (x-5)^2} = \sqrt{2x^2 - 12x + 26} = \sqrt{(x\sqrt{2} - 3\sqrt{2})^2 + 8} \geq 8$$

$$\text{Suy ra: } MA_{\min} = 8 \text{ khi } x\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow x = 3 \Rightarrow y = 1. \text{ Vậy } P = 2x + 3y = 2.3 + 3.1 = 9$$

Câu 4: Chọn AGiả sử $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$.

$$\text{Do } |z| = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1. \text{ Suy ra } x, y \in [-1; 1].$$

$$\text{Ta có } z\bar{z} = |z|^2 = 1. \text{ Thay vào } P \text{ ta được:}$$

$$P = |z+1| + |z^2 - z + z\bar{z}| = |z+1| + |z(z-1+\bar{z})| = |z+1| + |z| \cdot |z+\bar{z}-1| = |z+1| + |z+\bar{z}-1|$$

$$= \sqrt{(x+1)^2 + y^2} + |2x-1| = \sqrt{2x+2} + |2x-1|.$$

Xét hàm số $y = f(x) = \sqrt{2x+2} + |2x-1|$

$$\text{Ta có } y = f(x) = \begin{cases} \sqrt{2x+2} - 2x + 1 & \text{khi } -1 \leq x < \frac{1}{2} \\ \sqrt{2x+2} + 2x - 1 & \text{khi } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}.$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2x+2}} - 2 & \text{khi } -1 < x < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2x+2}} + 2 & \text{khi } \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2x+2}} - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < \frac{1}{2} \\ \sqrt{2x+2} = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{7}{8}$$

Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ trên $[-1;1]$

x	-1	$-\frac{7}{8}$	$\frac{1}{2}$	1		
y'		+	0	-		+
y	3	$\frac{13}{4}$	$\sqrt{3}$	3		

$$\text{Suy ra } \begin{cases} m = \min_{[-1;1]} f(x) = \sqrt{3} \\ M = \max_{[-1;1]} f(x) = \frac{14}{3} \end{cases} \cdot \text{Vậy } M \cdot m = \frac{13\sqrt{3}}{4}.$$

Câu 5: Chọn B

Gọi $M(x; y)$. Từ điều kiện $z_1 = a + (a^2 - 2a + 2)i$ suy ra M thuộc parabol $(P): y = x^2 - 2x + 2$

Gọi $N(x; y)$. Từ điều kiện $|z_2 - 2 - i| = |\bar{z}_2 - 6 - i|$ suy ra N thuộc đường thẳng $d: 2x - y - 8 = 0$

Gọi Δ là tiếp tuyến của (P) mà song song với $d: 2x - y - 8 = 0$.

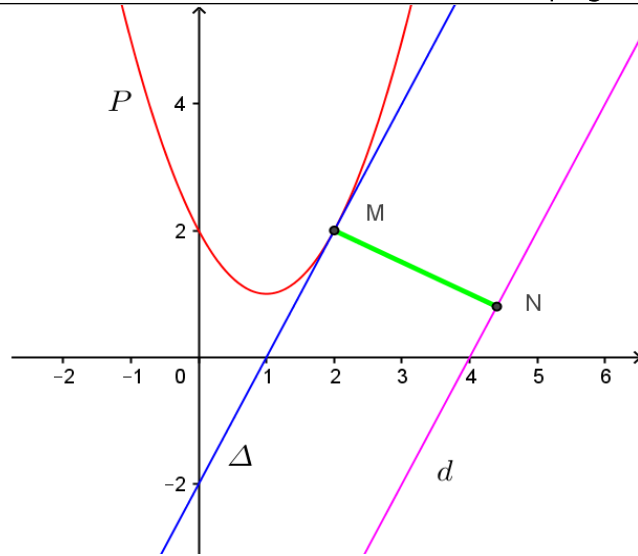
Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm mà tại đó tiếp tuyến $\Delta \parallel d$. Ta có $y' = 2x - 2$.

Do $\Delta \parallel d$ nên $y'(x_0) = 2 \Leftrightarrow 2x_0 - 2 = 2 \Leftrightarrow x_0 = 2$ suy ra $y_0 = 2$.

Phương trình tiếp tuyến Δ có dạng: $y = y'(x_0) \cdot (x - x_0) + y_0 \Leftrightarrow y = 2(x - 2) + 2 \Leftrightarrow y = 2x - 2$.

Khi đó: $\min MN = d(\Delta, d) = d(A; d)$ với $A \in \Delta$. Chọn $A(1; 0)$ ta có:

$$\min MN = \frac{|2 \cdot 1 - 0 - 8|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$$

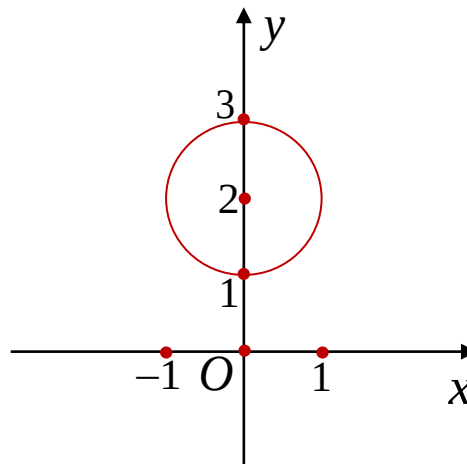


Câu 6: Chọn C
Cách 1.

Ta có: $\left| \frac{(1+i)z}{1-i} + 2 \right| = 1 \Leftrightarrow \left| \frac{(1+i)z + 2(1-i)}{1-i} \right| = 1 \Leftrightarrow |(1+i)z + 2(1-i)| = |1-i|$
 $\Leftrightarrow |(1+i)z + 2(1-i)| = \sqrt{2}.$

Mặt khác: $|(1+i)z| - |2(1-i)| \leq |(1+i)z + 2(1-i)| = \sqrt{2} \Leftrightarrow |(1+i)z| \leq |2(1-i)| + \sqrt{2}$
 $\Leftrightarrow \sqrt{2}|z| \leq 3\sqrt{2}.$ Khi đó: $M = |z - w| = |z - iz| = |(1-i)z| = \sqrt{2}|z| \leq 3\sqrt{2}.$

Cách 2.



$$\left| \frac{(1+i)z}{1-i} + 2 \right| = 1 \Leftrightarrow \left| \frac{(1+i)z + 2(1-i)}{1-i} \right| = 1 \Leftrightarrow |(1+i)z + 2(1-i)| = |1-i|$$

$$\Leftrightarrow |(1+i)z + 2(1-i)| = \sqrt{2} \quad (1)$$

Đặt $z = x + yi$ thay vào (1) ta được $|(1+i)(x + yi) + 2(1-i)| = \sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow (x - y + 2)^2 + (x + y - 2)^2 = 2 \Leftrightarrow x^2 + (y - 2)^2 = 1.$$

Tập hợp điểm biểu diễn số phức z trên hệ trục tọa độ là đường tròn tâm $I(0; 2)$ bán kính $R = 1$.

Khi đó: $1 \leq |z| \leq 3 \Rightarrow M = |z - w| = |z - iz| = |(1-i)z| = \sqrt{2}|z| \leq 3\sqrt{2}.$

Câu 7: Chọn C

Ta có: $2 = |z^2 - 2iz| = |z^2 - 2iz + i^2 + 1| = |(z-i)^2 + 1| \geq |(z-i)^2| - 1.$

$$\Rightarrow |z-i|^2 \leq 3 \Leftrightarrow |z-i| \leq \sqrt{3}.$$

$$P = |iz+1| = |i(z-i)| = |z-i| \leq \sqrt{3}. \text{ Vậy giá trị nhỏ nhất của } P \text{ bằng } \sqrt{3}.$$

Câu 8: Chọn B

$$\text{Đặt } z_1 = a+bi, z_2 = c+di, (a, b, c, d \in \mathbb{R}).$$

$$\text{Ta có: } z_1 + z_2 = 8+6i \text{ nên } a+bi+c+di=8+6i \Leftrightarrow \begin{cases} a+c=8 \\ b+d=6 \end{cases}.$$

$$\text{Do đó } (a+c)^2 + (b+d)^2 = 100 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 100 - 2ac - 2bd \quad (1).$$

$$\text{Vì } |z_1 - z_2| = 2 \quad \text{ nên } \quad \text{ta có:}$$

$$|a+bi-c-di| = 2 \Leftrightarrow (a-c)^2 + (b-d)^2 = 4 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4 + 2ac + 2bd \quad (2).$$

$$\text{Cộng và ta được: } 2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) = 104.$$

$$\text{Áp dụng bất đẳng thức } 2(x^2 + y^2) \geq (x+y)^2 \text{ ta có:}$$

$$P^2 = \left(\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2} \right)^2 \leq 2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) = 104. \text{ Do đó } P \leq 2\sqrt{26}.$$

$$\text{Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức là } 2\sqrt{26}.$$

Câu 9: Chọn D

$$\text{Ta có } |3z - \bar{z}| = |(1+i)(2+2i)| \Leftrightarrow |3x+3yi-x+yi| = 4 \Leftrightarrow |2x+4yi| = 4$$

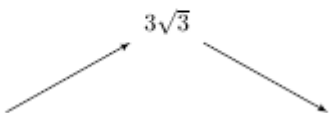
$$\Leftrightarrow x^2 + 4y^2 = 4 \Leftrightarrow |2y| = \sqrt{4-x^2} \quad (-2 \leq x \leq 2).$$

$$\text{Khi đó } Q = |z - \bar{z}|(2-x) \Leftrightarrow Q = |2yi|(2-x) = |2y|(2-x) = \sqrt{4-x^2}(2-x).$$

$$\text{Xét hàm số } f(x) = (2-x)\sqrt{4-x^2} \text{ với } x \in [-2; 2].$$

$$f'(x) = \frac{2x^2 - 2x - 4}{\sqrt{4-x^2}}; \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}.$$

Ta có bảng biến thiên

x	-2	-1	2
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$			

$$\text{Nên } \max_{x \in [-2; 2]} f(x) = 3\sqrt{3} = f(-1).$$

$$\text{Vậy } M = 3\sqrt{3}; \quad x_0 = -1; \quad y_0^2 = \frac{3}{4} \Rightarrow T = -\frac{9\sqrt{3}}{4}.$$

Câu 10: Chọn B

$$\begin{aligned}
\text{Ta có } |z^2 - 2z + 5| &= |(z-1+2i)(z+3i-1)| \Leftrightarrow |(z-1)^2 + 4| = |(z-1+2i)(z+3i-1)| \\
&\Leftrightarrow |(z-1+2i)(z-1-2i)| = |(z-1+2i)(z+3i-1)| \Leftrightarrow |z-1+2i||z-1-2i| = |z-1+2i||z+3i-1| \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} |z-1+2i| = 0 \\ |z-1-2i| = |z+3i-1| \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\text{Trường hợp 1: } |z-1+2i| = 0 \Leftrightarrow z = 1-2i \Rightarrow w = z-2+2i = 1-2i-2+2i = -1 \Rightarrow |w| = 1$$

$$\begin{aligned}
\text{Trường hợp 2: } |z-1-2i| &= |z+3i-1| \Leftrightarrow |(z-2+2i)+1-4i| = |(z-2+2i)+1+i| \\
&\Leftrightarrow |w+1-4i| = |w+1+i|
\end{aligned}$$

$$\text{Gọi } w = x + yi \ (x, y \in \mathbb{R}) \text{ thì } \Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-4)^2 = (x+1)^2 + (y+1)^2 \Leftrightarrow y = \frac{3}{2}.$$

$$\text{Khi đó } |w| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} \geq \frac{3}{2}. \text{ Đẳng thức xảy ra } \Leftrightarrow x = 0. \text{ Suy ra: } \min |w| = \frac{3}{2}$$

$$\text{Từ và suy ra } \min |w| = 1.$$

Câu 11: Chọn D

$$\text{Ta có: } |z| = |(z-2-i) + (2+i)|.$$

Áp dụng bất đẳng thức $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ ta có:

$$||z-2-i| - |2+i|| \leq |z| \leq |z-2-i| + |2+i| \Leftrightarrow |1-\sqrt{5}| \leq |z| \leq 1+\sqrt{5} \Leftrightarrow \sqrt{5}-1 \leq |z| \leq 1+\sqrt{5}$$

$$\text{Vậy } m = \sqrt{5}-1, M = \sqrt{5}+1, \text{ do đó } M+m = 2\sqrt{5}.$$

Câu 12: Chọn B

$$\text{Theo đề } |z| = 1. \text{ Đặt } z = \cos x + i \sin x \ (x \in \mathbb{R}). \text{ Suy ra } z^4 = (\cos x + i \sin x)^4 = \cos 4x + i \sin 4x.$$

$$\begin{aligned}
\text{Khi đó } \left| z^4 + z + \frac{1}{2} \right|^2 &= \left| \left(\cos 4x + \cos x + \frac{1}{2} \right) + (\sin 4x + \sin x)i \right|^2 \\
&= \left(\cos 4x + \cos x + \frac{1}{2} \right)^2 + (\sin 4x + \sin x)^2 = \frac{9}{4} + \cos 4x + 2 \cos 3x + \cos x \\
&= \frac{9}{4} + 8 \cos^4 x + 8 \cos^3 x - 8 \cos^2 x - 5 \cos x + 1 \\
&= \frac{9}{4} + f(t). \text{ Với } f(t) = 8t^4 + 8t^3 - 8t^2 - 5t + 1, \ t \in [-1; 1]. \\
&\geq \frac{9}{4} + \min_{[-1; 1]} f(t) = \frac{9}{4} + f\left(\frac{-1+\sqrt{11}}{4}\right) = \frac{1}{8}.
\end{aligned}$$

Câu 13: Chọn D

$$\text{Vì } z_1^2 - 5z_1z_2 + 4z_2^2 = 0 \ (z_1 \neq z_2) \text{ suy ra } z_1 = 4z_2 \Rightarrow P = |7z_2|$$

$$\text{Mặt khác } S_{\triangle OMN} = \frac{1}{2} OM \cdot ON \cdot \sin \angle MON \Leftrightarrow 12 = \frac{1}{2} |z_1| |z_2| \sin \angle MON \Leftrightarrow |z_2|^2 \sin \angle MON = 6.$$

$$\Rightarrow P = |7z_2| = 7 \sqrt{\frac{6}{\sin \angle MON}}. \text{ Nên } P = |7z_2| \text{ nhỏ nhất khi } \sin \angle MON \text{ lớn nhất } \Leftrightarrow \sin \angle MON = 1.$$

Khi đó $P = 7\sqrt{6}$.

Câu 14: Chọn A

Giả sử $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Theo giả thiết ta có $x^2 + y^2 = 1$.

Ta có: $P = |z^2 - z| + |z^2 + z + 1| = |z(z-1)| + |z^2 + z + 1| = |z| \cdot |z-1| + |z^2 + z + 1| = |z-1| + |z^2 + z + 1|$.

$$|z-1| = |x + yi - 1| = \sqrt{(x-1)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + y^2 - 2x + 1} = \sqrt{2-2x}.$$

$$z^2 + z + 1 = x^2 - y^2 + 2xyi + x + yi + 1 = 2x^2 + x + y(2x+1)i$$

$$\Rightarrow |z^2 + z + 1| = \sqrt{x^2(2x+1)^2 + y^2(2x+1)^2} = \sqrt{(2x+1)^2(x^2 + y^2)} = |2x+1|.$$

Suy ra $P = \sqrt{2-2x} + |2x+1|$. Xét hàm số $f(x) = \sqrt{2-2x} + |2x+1|$ trên đoạn $[-1; 1]$.

$$\text{Trên } \left[-1; -\frac{1}{2}\right); f(x) = \sqrt{2-2x} - 2x - 1 \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{2-2x}} - 2 < 0, \forall x \in \left[-1; -\frac{1}{2}\right).$$

Mặt khác hàm số $f(x) = \sqrt{2-2x} - 2x - 1$ liên tục trên $\left[-1; -\frac{1}{2}\right]$.

Do đó hàm số nghịch biến trên $\left[-1; -\frac{1}{2}\right] \Rightarrow f(x) \leq f(-1) = 3, \forall x \in \left[-1; -\frac{1}{2}\right]$.

$$\Rightarrow \max_{x \in \left[-1; -\frac{1}{2}\right]} f(x) = 3.$$

Trên $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$

$$f(x) = \sqrt{2-2x} + 2x + 1 \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{2-2x}} + 2 \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2-2x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{7}{8}.$$

$$\text{Có: } f\left(-\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3}; f\left(\frac{7}{8}\right) = \frac{13}{4}; f(1) = 3 \Rightarrow \max_{x \in \left[-\frac{1}{2}; 1\right]} f(x) = \frac{13}{4}.$$

$$\text{Từ và } \Rightarrow \max_{x \in [-1; 1]} f(x) = \frac{13}{4} \text{ hay } P_{\max} = \frac{13}{4}.$$

Câu 15: Chọn D

Ta có: $(1+2i)|z| = \frac{\sqrt{10}}{z} - 2 + i \Leftrightarrow (|z|+2) + i(2|z|-1) = \frac{\sqrt{10}}{z}$ lấy môđun hai vế

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{10}}{|z|} = \sqrt{(|z|+2)^2 + (2|z|-1)^2} \Rightarrow |z| = 1 \in \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right).$$

Câu 16: Chọn D

Gọi $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$). Khi đó:

$$|z-2-4i| = |z-2i| \Leftrightarrow \sqrt{(a-2)^2 + (b-4)^2} = \sqrt{a^2 + (b-2)^2} \Leftrightarrow a = 4-b.$$

$$|iz+2-i| = \sqrt{(2-b)^2 + (a-1)^2} = \sqrt{(2-b)^2 + (3-b)^2} = \sqrt{2b^2 - 10b + 13}$$

$$= \sqrt{2\left(b-\frac{5}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}} \geq \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $|iz + 2 - i|$ là $\frac{\sqrt{2}}{2}$ khi $b = \frac{5}{2}$; $a = \frac{3}{2}$.

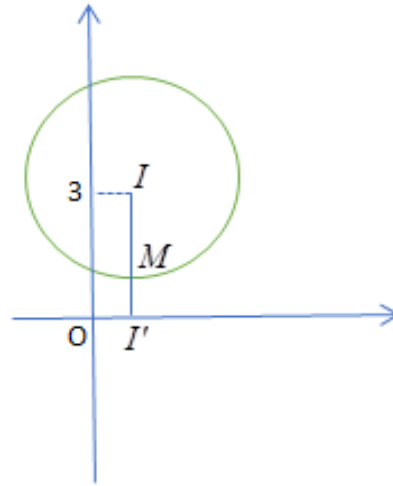
Câu 17: Chọn B

Gọi $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$. Khi đó $M(x; y)$ là điểm biểu diễn của số phức z .

Theo bài ra ta có $|z - 1 - 3i| = 2 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 4$.

Suy ra tập hợp điểm M là đường tròn tâm $I(1; 3)$ bán kính $R = 2$.

Khi đó $|z - 1| = \sqrt{(x - 1)^2 + y^2} = I'M$ với $I'(1; 0)$.



$|z - 1|$ nhỏ nhất khi $I'M$ ngắn nhất hay I, M, I' thẳng hàng, M nằm giữa I và I' .

Phương trình đường thẳng II' là $x = 1$.

Tọa độ giao điểm của đường thẳng II' với đường tròn tâm I bán kính $R = 2$ là $M_1(1; 1)$ và $M_1(1; 5)$. Thử lại ta thấy $M_1(1; 1)$ thỏa mãn. Vậy $z = 1 + i$.

Câu 18: Chọn A

Cách 1

Ta có: $(2 + i)|z| = \frac{z}{w} + 1 - i \Leftrightarrow (2|z| - 1) + (|z| + 1)i = \frac{z}{w}$

$$\Rightarrow |(2|z| - 1) + (|z| + 1)i| = \left| \frac{z}{w} \right| \Leftrightarrow \sqrt{(2|z| - 1)^2 + (|z| + 1)^2} = \frac{|z|}{|w|} \Leftrightarrow \sqrt{5|z|^2 - 2|z| + 2} = \frac{|z|}{|w|}.$$

Vì $5|z|^2 - 2|z| + 2 > 0 \quad \forall z \Rightarrow |z| > 0$. Đặt $t = |z|$ ($t > 0$).

$$\text{Ta có: } \frac{1}{|w|} = \frac{\sqrt{5t^2 - 2t + 2}}{t} = \sqrt{5 - \frac{2}{t} + \frac{2}{t^2}} = \sqrt{2\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{2}} \geq \frac{3}{\sqrt{2}} \quad \forall t > 0 \Rightarrow |w| \leq \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

$$\text{Khi đó: } T = |w + 1 - i| \leq |w| + |1 - i| \leq \frac{\sqrt{2}}{3} + \sqrt{2} = \frac{4\sqrt{2}}{3}.$$

$$\text{Dấu đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} w = k(1-i) \quad (k \in \mathbb{R}, k \geq 0) \\ |w| = \frac{\sqrt{2}}{3} \\ |z| = 2 \end{cases} \Rightarrow k\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{3} \Leftrightarrow k = \frac{1}{3} \Leftrightarrow w = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}i.$$

$$\text{Vậy } \max T = \frac{4\sqrt{2}}{3}.$$

Cách 2

$$\text{Ta có: } (2+i)|z| = \frac{z}{w} + 1 - i \Leftrightarrow (2|z|-1) + (|z|+1)i = \frac{z}{w}$$

$$\Rightarrow |(2|z|-1) + (|z|+1)i| = \left| \frac{z}{w} \right| \Leftrightarrow \sqrt{(2|z|-1)^2 + (|z|+1)^2} = \frac{|z|}{|w|} \Leftrightarrow \sqrt{5|z|^2 - 2|z| + 2} = \frac{|z|}{|w|}.$$

$$\text{Vì } 5|z|^2 - 2|z| + 2 > 0 \quad \forall z \Rightarrow |z| > 0. \text{ Đặt } t = |z| \quad (t > 0).$$

$$\text{Ta có: } \frac{1}{|w|} = \frac{\sqrt{5t^2 - 2t + 2}}{t} = \sqrt{5 - \frac{2}{t} + \frac{2}{t^2}} = \sqrt{2\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{2}} \geq \frac{3}{\sqrt{2}} \quad \forall t > 0 \Rightarrow |w| \leq \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Suy ra tập hợp các điểm biểu diễn cho số phức w là hình tròn tâm $O(0;0)$, bán kính $R = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

$$\text{Khi đó: } T = |w + 1 - i| = MI$$

Dễ thấy điểm $I(0;2)$ nằm ngoài đường tròn tâm $C(O;R)$, suy ra $T = MI$ đạt giá trị lớn nhất

$$\text{khi và chỉ khi } T = MI = IO + R = 2 + \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{6 + \sqrt{5}}{3}. \text{ Vậy } \max T = \frac{4\sqrt{2}}{3}.$$

Câu 19: Chọn A**Cách 1**

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } (1+i)|z| &= \frac{z}{w} - 2 + i \Leftrightarrow |z| - 2 + (|z|+1)i = \frac{z}{w} \Leftrightarrow \sqrt{(|z|-2)^2 + (|z|+1)^2} = \frac{|z|}{|w|} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{2|z|^2 - 2|z| + 5} = \frac{|z|}{|w|} \end{aligned}$$

$$\text{Đánh giá: } 2|z|^2 - 2|z| + 5 > 0, \forall z \Rightarrow |z| > 0. \text{ Đặt } t = |z| \quad (t > 0)$$

$$\text{Ta có: } \frac{1}{|w|} = \frac{\sqrt{2t^2 - 2t + 5}}{t} = \sqrt{2 - \frac{2}{t} + \frac{5}{t^2}} = \sqrt{5\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{5}\right)^2 + \frac{9}{5}} \geq \frac{3}{\sqrt{5}} \Rightarrow |w| \leq \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\text{Khi đó ta có: } |w - 2i| \leq |w| + |-2i| \leq \frac{\sqrt{5}}{3} + 2$$

$$\text{Điều kiện xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} w = k(-2i), (k \in \mathbb{R}, k > 0) \\ |w| = \frac{\sqrt{5}}{3} \\ |z| = 5 \end{cases} \Rightarrow \frac{\sqrt{5}}{3} = 2k \Rightarrow k = \frac{\sqrt{5}}{6} \Leftrightarrow w = -\frac{\sqrt{5}}{2}i$$

$$\text{Vậy: } \max T = \frac{\sqrt{5}}{3} + 2.$$

Cách 2

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } (1+i)|z| &= \frac{z}{w} - 2 + i \Leftrightarrow |z| - 2 + (|z|+1)i = \frac{z}{w} \Leftrightarrow \sqrt{(|z|-2)^2 + (|z|+1)^2} = \frac{|z|}{|w|} \\ \Leftrightarrow \sqrt{2|z|^2 - 2|z| + 5} &= \frac{|z|}{|w|} \end{aligned}$$

$$\text{Đánh giá: } 2|z|^2 - 2|z| + 5 > 0, \forall z \Rightarrow |z| > 0. \text{ Đặt } t = |z| \quad (t > 0)$$

$$\text{Ta có: } \frac{1}{|w|} = \frac{\sqrt{2t^2 - 2t + 5}}{t} = \sqrt{2 - \frac{2}{t} + \frac{5}{t^2}} = \sqrt{5\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{5}\right)^2 + \frac{9}{5}} \geq \frac{3}{\sqrt{5}} \Rightarrow |w| \leq \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\text{Suy ra tập hợp các điểm biểu diễn cho số phức } w \text{ là hình tròn tâm } O(0;0), \text{ bán kính } R = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

$$\text{Khi đó: } T = |w - 2i| = MI$$

Để thấy điểm $I(0;2)$ nằm ngoài đường tròn tâm $C(O;R)$, suy ra $T = MI$ đạt giá trị lớn nhất

$$\text{khi và chỉ khi } T = MI = IO + R = 2 + \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

$$\text{Vậy } \max T = 2 + \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

Câu 20: Chọn B

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } (3+2i)|z| &= \frac{z}{iw-1+3i} + 1 - i \Leftrightarrow 3|z| - 1 + (2|z|+1)i = \frac{z}{iw-1+3i} \\ \Leftrightarrow \sqrt{(3|z|-1)^2 + (2|z|+1)^2} &= \frac{|z|}{|i(w+3+i)|} \Leftrightarrow \sqrt{13|z|^2 - 2|z| + 2} = \frac{|z|}{|w+3+i|} \end{aligned}$$

$$\text{Đánh giá: } 13|z|^2 - 2|z| + 2 > 0, \forall z \Rightarrow |z| > 0. \text{ Đặt } t = |z| \quad (t > 0)$$

$$\text{Ta có: } \frac{1}{|w+3+i|} = \frac{\sqrt{13t^2 - 2t + 2}}{t} = \sqrt{13 - \frac{2}{t} + \frac{2}{t^2}} = \sqrt{2\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{25}{2}} \geq \frac{5}{\sqrt{2}} \Rightarrow |w+3+i| \leq \frac{\sqrt{2}}{5}$$

$$\text{Khi đó ta có: } |w| = |w+3+i + (-3-i)| \leq |w+3+i| + |-3-i| \leq \frac{\sqrt{2}}{5} + \sqrt{10}$$

$$\text{Dấu đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} w+3+i = k(-3-i), (k \in \mathbb{R}, k > 0) \\ |w+3+i| = \frac{\sqrt{2}}{5} \\ |z| = 2 \end{cases} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{5} = k\sqrt{10} \Rightarrow k = \frac{1}{5\sqrt{5}}$$

$$\Leftrightarrow w+3+i = \frac{1}{5\sqrt{5}}(-3-i) \Leftrightarrow w = -\left(\frac{3}{5\sqrt{5}}+3\right) - \left(\frac{1}{5\sqrt{5}}+1\right)i$$

$$\text{Vậy: } \text{Max} T = \frac{\sqrt{2}}{5} + \sqrt{10}$$

Câu 21: Chọn B

Đặt $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$).

$$\text{Ta có: } |\bar{z}| = |z+2i| \Leftrightarrow \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{a^2+(b+2)^2} \Leftrightarrow 4b+4=0 \Leftrightarrow b=-1 \Rightarrow z = a-i.$$

$$\text{Xét: } |z-1+2i| + |z+1+3i| = |a-1+i| + |a+1+2i| = \sqrt{(1-a)^2+1^2} + \sqrt{(1+a)^2+2^2}.$$

Áp dụng BĐT Mincôpxki:

$$\sqrt{(1-a)^2+1^2} + \sqrt{(1+a)^2+2^2} \geq \sqrt{(1-a+1+a)^2+(1+2)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}.$$

$$\text{Suy ra: } |z-1+2i| + |z+1+3i| \text{ đạt GTNN là } \sqrt{13} \text{ khi } 2(1-a)=1+a \Leftrightarrow a=\frac{1}{3}.$$

Nhận xét: Bài toán trên có thể được giải quyết bằng cách đưa về bài toán hình học phẳng.

Câu 22: Chọn A

$$\text{Từ giả thiết: } |z_1|z_1 = 9|z_2|z_2 \quad (1)$$

$$\text{Lấy môđun hai vế ta được: } |z_1|^2 = 9|z_2|^2 \Rightarrow |z_1| = 3|z_2|.$$

$$\text{Thay } |z_1| = 3|z_2| \text{ vào (1) ta được } z_1 = 3z_2.$$

$$\text{Gọi } z_2 = a + bi \quad (a, b \in \mathbb{R}) \Rightarrow z_1 = 3a + 3bi, \bar{z}_2 = a - bi.$$

$$\text{Điểm } M(3a; 3b), N(a; -b) \Rightarrow S_{OMN} = \frac{1}{2}|-3ab - 3ab| = 3|a||b|.$$

$$\text{Mà } S_{OMN} = 6 \text{ nên } |a||b| = 2 \text{ và } |z_1 + z_2| = |4a + 4bi| = 4\sqrt{a^2+b^2} \geq 4\sqrt{2|a||b|} = 8.$$

$$\text{Suy ra min } |z_1 + z_2| = 8.$$

Lưu ý công thức tính diện tích tam giác OAB với $\overrightarrow{OA} = (a_1; a_2)$, $\overrightarrow{OB} = (b_1; b_2)$ là

$$S_{OAB} = \frac{1}{2}|a_1b_2 - a_2b_1|.$$

Câu 23: Chọn D

Đặt $z_1 = x + yi$, ($x, y \in \mathbb{R}$), ta có

$$w = \frac{z_1 + 2 - i}{(z_1 + \overline{z_1})i + 1} = \frac{(x+2) + (y-1)i}{1 + 2xi} = \frac{x+2 + 2x(y-1) + [y-1-2x(x+2)]i}{1+4x^2}.$$

Vì w là số thực nên $y-1-2x(x+2)=0 \Leftrightarrow y=2x^2+4x+1$.

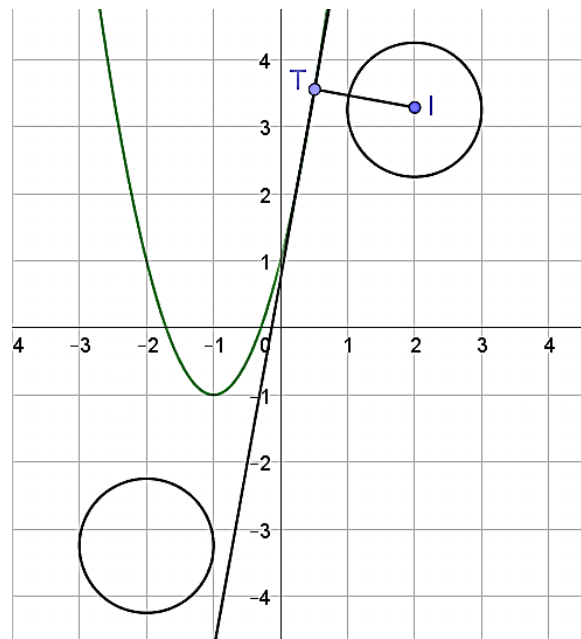
$$|4z_2 + 8 + 13i| = 4 \Leftrightarrow \left| z_2 + 2 + \frac{13}{4}i \right| = 1 \Leftrightarrow (x+2)^2 + \left(y + \frac{13}{4} \right)^2 = 1.$$

$$P = |z_1 + z_2| = |z_1 - (-z_2)|$$

Gọi M là điểm biểu diễn của z_1 thì điểm M thuộc parabol $(P): y=2x^2+4x+1$.

Gọi N là điểm biểu diễn của z_2 thì điểm N thuộc đường tròn $(C): (x+2)^2 + \left(y + \frac{13}{4} \right)^2 = 1$

Gọi N_1 là điểm biểu diễn của $-z_2$ thì điểm N_1 thuộc đường tròn $(C_1): (x-2)^2 + \left(y - \frac{13}{4} \right)^2 = 1$



Phương trình tiếp tuyến Δ của (P) tại $T(x_0, 2x_0^2+4x_0+1)$, $(x_0 > -1)$ là

$$y = (4x_0 + 4)(x - x_0) + 2x_0^2 + 4x_0 + 1 \Leftrightarrow (4x_0 + 4)x - y - 2x_0^2 + 1 = 0.$$

Khi đó:

$$P_{\min} \Leftrightarrow (MN_1)_{\min} \Leftrightarrow T \text{ là hình chiếu vuông góc của } I \text{ lên } \Delta, \text{ với } I\left(2, \frac{13}{4}\right) \text{ là tâm } (C_1)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{IT} \text{ cùng phương với VTPT } \overrightarrow{n_\Delta}, \text{ với } \overrightarrow{IT} = \left(x_0 - 2, 2x_0^2 + 4x_0 - \frac{9}{4}\right), \overrightarrow{n_\Delta} = (4x_0 + 4, -1)$$

$$\Leftrightarrow (4x_0 + 4)\left(2x_0^2 + 4x_0 - \frac{9}{4}\right) = 2 - x_0 \Leftrightarrow 8x_0^3 + 24x_0^2 + 8x_0 - 11 = 0 \Leftrightarrow x_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow T\left(\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)$$

$$\text{Vậy } P_{\min} = IT - R = \frac{\sqrt{37}}{4} - 1 = \frac{\sqrt{37} - 4}{4}.$$

Câu 24: Chọn B

Điều kiện: $w \neq 1$.

Ta có: $(3-i)|z| = \frac{z}{w-1} + 1-i \Leftrightarrow (3-i)|z| - 1+i = \frac{z}{w-1} \Leftrightarrow w = \frac{z}{(3|z|-1)+(1-|z|)i} + 1.$

Vậy
$$T = |w+i| = \left| \frac{z}{(3|z|-1)+(1-|z|)i} + 1+i \right| \leq \left| \frac{z}{(3|z|-1)+(1-|z|)i} \right| + |1+i|$$

$$\leq \frac{|z|}{\sqrt{10|z|^2 - 8|z| + 2}} + \sqrt{2}.$$

Đặt $t = |z|$ điều kiện: $t \geq 0$. Xét hàm số $f(t) = \frac{t}{\sqrt{10t^2 - 8t + 2}} + \sqrt{2}.$

$$f'(t) = \frac{-4t+2}{(10t^2-8t+2)\sqrt{10t^2-8t+2}}; f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}.$$

Bảng biến thiên:

t	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(t)$	+	0	-
$f(t)$	$\sqrt{2}$	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{10}}{10} + \sqrt{2}$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $T = |w+i| \leq \max_{[0;+\infty)} f(t) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$

Câu 25: Chọn C

Gọi $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$. Ta có: $|z+2| = |z+2i|$

$$\Leftrightarrow |(x+yi)+2| = |(x+yi)+2i| \Leftrightarrow |(x+2)+yi| = |x+(y+2)i| \Leftrightarrow (x+2)^2 + y^2 = x^2 + (y+2)^2$$

$$\Leftrightarrow x = y \text{ hay } z = x + xi$$

Khi đó ta có: $A = |(x-1)+(x-2)i| + |(x-3)+(x-4)i| + |(x-5)+(x-6)i|$

$$= \sqrt{(x-1)^2 + (x-2)^2} + \sqrt{(x-3)^2 + (x-4)^2} + \sqrt{(x-5)^2 + (x-6)^2}$$

$$= \sqrt{2x^2 - 6x + 5} + \sqrt{2x^2 - 14x + 25} + \sqrt{2x^2 - 22x + 61}$$

$$= \sqrt{2} \cdot \left(\sqrt{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{11}{2} - x\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} \right) + \sqrt{2\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}}$$

$$\geq \sqrt{2} \cdot \sqrt{\left(x - \frac{3}{2} + \frac{11}{2} - x\right)^2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^2} + \sqrt{2\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}} \geq \sqrt{2} \cdot \sqrt{17} + \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1+2\sqrt{17}}{\sqrt{2}}.$$

Dấu bằng xảy ra khi
$$\begin{cases} x - \frac{3}{2} = \frac{11}{2} - x \\ x - \frac{7}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{7}{2}.$$

Vậy: $\min A = \frac{1+2\sqrt{17}}{\sqrt{2}}$. Suy ra $a=1, b=2$ nên $3a-b=1$.

Câu 26: Chọn A

Đặt $\begin{cases} z_1 = a + bi \\ z_2 = c + di \end{cases} (a, b, c, d \in \mathbb{R})$. Theo đề ta có:
$$\begin{cases} (a-3)^2 + (b-4)^2 = 4 & (1) \\ (c-3)^2 + (d-4)^2 = 4 & (2) \\ (a-c)^2 + (b-d)^2 = 1 & (3) \end{cases}$$

Khi lấy – theo vế có $a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = 6(a-c) + 8(b-d)$.

Kết hợp sử dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz và sử dụng ta có:

$$|z_1|^2 - |z_2|^2 = a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = 6(a-c) + 8(b-d) \geq -\sqrt{(6^2 + 8^2)} \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2} = -10.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $|z_1|^2 - |z_2|^2$ là -10 khi
$$\begin{cases} (a-3)^2 + (b-4)^2 = 4 \\ (c-3)^2 + (d-4)^2 = 4 \\ (a-c)^2 + (b-d)^2 = 1 \\ \frac{a-c}{6} = \frac{b-d}{8} = k < 0 \end{cases}.$$

Tồn tại 2 cặp số phức thỏa mãn là:
$$\begin{cases} \begin{cases} z_1 = \frac{27-4\sqrt{15}}{10} + \frac{144+12\sqrt{15}}{40}i \\ z_2 = \frac{33-4\sqrt{15}}{10} + \frac{176+12\sqrt{15}}{40}i \end{cases} \\ \begin{cases} z_1 = \frac{27+4\sqrt{15}}{10} + \frac{144-12\sqrt{15}}{40}i \\ z_2 = \frac{33+4\sqrt{15}}{10} + \frac{176-12\sqrt{15}}{40}i \end{cases} \end{cases}.$$

Câu 27: Chọn A

Theo giả thiết có:

$$|2(a+bi) + 2-3i| = 1 \Leftrightarrow |(2a+2) + (2b-3)i| = 1 \Leftrightarrow (2a+2)^2 + (2b-3)^2 = 1.$$

$$\Leftrightarrow (a+1)^2 + \left(b - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \quad (*)$$

Cách 1:

$$(*) \Leftrightarrow a^2 + b^2 = -3 - 2a + 3b. \text{ Từ } (*) \text{ suy ra } \left(b - \frac{3}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4} \Leftrightarrow 1 \leq b \leq 2.$$

Khi đó biến đổi và sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được:

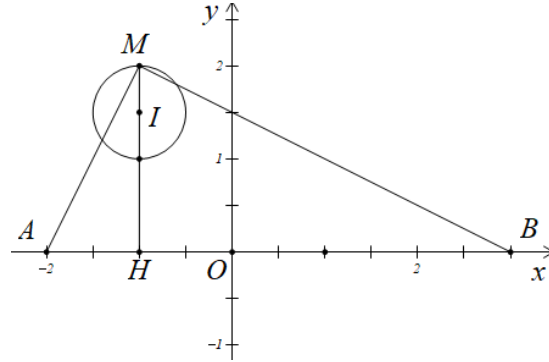
$$\begin{aligned} P &= 2|z+2| + |z-3| = 2\sqrt{(a+2)^2 + b^2} + \sqrt{(a-3)^2 + b^2} \\ &= 2\sqrt{a^2 + b^2 + 4a + 4} + \sqrt{a^2 + b^2 - 6a + 9} = 2\sqrt{(-3-2a+3b) + 4a + 4} + \sqrt{(-3-2a+3b) + 9 - 6a} \\ &= 2\sqrt{2a+3b+1} + \sqrt{-8a+3b+6} \\ &= \sqrt{8a+12b+4} + \sqrt{-8a+3b+6} \leq \sqrt{(1+1)(8a+12b+4-8a+3b+6)} \\ &= \sqrt{2(15b+10)} \leq \sqrt{2(15 \cdot 2 + 10)} = 4\sqrt{5}. \end{aligned}$$

Dấu “=” xảy ra khi $\begin{cases} 8a+12b+4 = -8a+3b+6 \\ b=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=2 \end{cases}.$

Số phức

Suy ra $\text{Max}P = 4\sqrt{5}$ khi $a = -1, b = 2$. Vậy $a - b = -3$.

Cách 2:



Gọi $M(a; b)$ là điểm biểu diễn hình học của số phức z .

Từ (*) suy ra M thuộc đường tròn (C) có tâm $I\left(-1; \frac{3}{2}\right)$ bán kính $R = \frac{1}{2}$.

Gọi $A(-2; 0), B(3; 0)$ và $H(-1; 0)$.

Khi đó $P = 2MA + MB$ và $\overrightarrow{HB} = -4\overrightarrow{HA}$.

Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được: $P^2 = (2MA + MB)^2 \leq (1+1)(4MA^2 + MB^2)$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } 4MA^2 + MB^2 &= 4\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 = 4(\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HA})^2 + (\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HB})^2 \\ &= (4MH^2 + 8\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{HA} + HA^2) + (MH^2 + 2\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{HB} + HB^2) \\ &= 5MH^2 + 2\overrightarrow{MH} \cdot (4\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB}) + (HA^2 + HB^2) = 5MH^2 + (HA^2 + HB^2). \end{aligned}$$

Do các điểm H, A, B cố định và $P > 0$ nên P lớn nhất khi MH là lớn nhất

$\Leftrightarrow M$ là giao điểm của đường thẳng IH với đường tròn (C) (I nằm giữa M và H).

Dễ dàng tìm được $M(-1; 2)$ hay $a = -1; b = 2$. Vậy $a - b = -3$.

Câu 28: Chọn A

Cách 1:

$$\text{Đặt } z = \frac{w}{3-4i} + \frac{5+8i}{2}.$$

$$\text{Ta có } |z-1-2i| + |z-4-6i| = \left| \frac{w}{3-4i} + \frac{3}{2} + 2i \right| + \left| \frac{w}{3-4i} - \frac{3}{2} - 2i \right| = 9 \Leftrightarrow \left| w + \frac{25}{2} \right| + \left| w - \frac{25}{2} \right| = 45.$$

Đặt $w = x + yi$ và gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn w . Khi đó tập hợp điểm M là elip có phương

$$\text{trình là } (E): \frac{x^2}{\left(\frac{45}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{350} = 1. \text{ Suy ra } y^2 = 350 - \frac{56}{81}x^2 \quad (1).$$

$$\text{Mặt khác ta có } T = |z-10-14i| = \left| \frac{w}{3-4i} - \frac{15}{2} - 10i \right| = \frac{1}{5} \left| w - \frac{125}{2} \right| = \frac{1}{5} \sqrt{\left(x - \frac{125}{2}\right)^2 + y^2}.$$

$$\text{Suy ra } T = \frac{1}{5} \sqrt{\left(x - \frac{125}{2}\right)^2 + 350 - \frac{56}{81}x^2} = \frac{1}{5} \sqrt{\frac{25}{81}x^2 - 125x + \frac{17025}{4}}.$$

$$\text{Từ (1) ta có } -\frac{45}{2} \leq x \leq \frac{45}{2}. \text{ Xét hàm số } f(x) = \frac{25}{81}x^2 - 125x + \frac{17025}{4} \text{ trên đoạn } \left[-\frac{45}{2}; \frac{45}{2}\right].$$

$$f'(x) = \frac{50}{81}x - 125. \text{ Xét } f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{405}{2} \notin \left[-\frac{45}{2}; \frac{45}{2}\right].$$

$$\text{Ta có } f\left(-\frac{45}{2}\right) = 7225; \quad f\left(\frac{45}{2}\right) = 1600.$$

$$\text{Vậy giá trị lớn nhất của } T \text{ bằng } \frac{1}{5} \sqrt{f\left(-\frac{45}{2}\right)} = 17.$$

Cách 2:

$$\text{Ta có } |z - 10 - 14i| \leq |z - 1 - 2i| + |-9 - 12i| = |z - 1 - 2i| + 15.$$

$$\text{Ta có } |z - 10 - 14i| \leq |z - 4 - 6i| + |-6 - 8i| = |z - 4 - 6i| + 10.$$

$$\text{Suy ra } 2|z - 10 - 14i| \leq 9 + 15 + 10 = 34 \Leftrightarrow |z - 10 - 14i| \leq 17.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi } z = -\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i. \text{ Vậy } \max|z - 10 - 14i| = 17.$$

Cách 3:

Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức z . Gọi $F_1(1; 2)$ và $F_2(4; 6)$. Suy ra $MF_1 + MF_2 = 9$.

Suy ra tập hợp điểm biểu diễn z là Elip và có $F_1F_2 = 5$.

Ta có $P = |z - 10 - 14i| = MA$ với $A(10; 14)$.

$$\text{Ta có } \overrightarrow{F_1A} = (9; 12), \quad \overrightarrow{F_1F_2} = (3; 4) \Rightarrow \overrightarrow{F_1A} = 3\overrightarrow{F_1F_2} \Rightarrow F_1, A, F_2 \text{ thẳng hàng và có } \begin{cases} F_1F_2 = 5 \\ F_1A = 15 \\ F_2A = 10 \end{cases}$$

Ta có $MA \leq MF_2 + F_2A \leq 7 + 10 = 17$. Dấu "=" xảy ra khi M, F_1, F_2 thẳng hàng và $MF_1 + F_1F_2 = MF_2$.

Câu 29: Chọn C

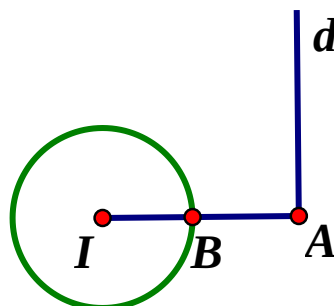
$$\text{Ta có: } |iw - 2 + 5i| = 1 \Leftrightarrow |w + 5 + 2i| = 1; |z| = 2 \Rightarrow z \cdot \bar{z} = 4$$

$$\text{Đặt: } z = x + iy, w = a + ib; (x, y, a, b \in \mathbb{R}). \text{ Khi đó: } \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ (a + 5)^2 + (b + 2)^2 = 1 \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } |z^2 - wz - 4| = |z| \left| z - w - \frac{4}{z} \right| = 2 \left| (z - \bar{z}) - w \right|$$

Gọi A, B lần lượt là điểm biểu diễn $z - \bar{z}$ và w .

Dẫn đến: $A(0; 2y)$ với $-2 \leq y \leq 2$, B thuộc đường tròn có tâm $I(-5; -2)$ và có bán kính $R = 1$.



Khi đó: $|z^2 - wz - 4| = 2AB$. Ta có: $AB_{\min} = d(I, d) - R = 4$

Giá trị nhỏ nhất của $|z^2 - wz - 4| = 8$.

Nhận xét:

Ta xem bài toán trên gồm 3 giả thiết: $|z| = 2 \Rightarrow z\bar{z} = 4$

$$|iw - 2 + 5i| = 1 \Leftrightarrow |w + 5 + 2i| = 1$$

$$|z^2 - wz - 4| = 2|z - w - \bar{z}| (*)$$

Việc đầu tiên, ta rút gọn các giả thiết của bài toán.

Từ $(*)$, ta gọi A là điểm biểu diễn của $z - \bar{z}$, B là điểm biểu diễn của w .

Bài toán trở thành tìm độ dài AB nhỏ nhất.

Câu 30: Chọn C

Cách 1.

$$\text{Ta có } 5w = (2+i)(z-4) \Leftrightarrow 5w+5i = 5i+(2+i)(z-4) \Leftrightarrow 5|w+i| = |(2+i)z-8+i|.$$

$$\text{Đặt } z = x + yi \text{ với } x, y \in \mathbb{R} \text{ ta được } |(2+i)(x+yi)-8+i| = 3\sqrt{5}$$

$$\Leftrightarrow |2x-y-8+(x+2y+1)i| = 3\sqrt{5} \Leftrightarrow (2x-y-8)^2 + (x+2y+1)^2 = 45$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 + y^2 + 64 - 4xy - 32x + 16y + x^2 + 4y^2 + 1 + 4xy + 2x + 4y = 45$$

$$\Leftrightarrow 5x^2 + 5y^2 - 30x + 20y + 20 = 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y+2)^2 = 9$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} x = 3\sin\alpha + 3 \\ y = 3\cos\alpha - 2 \end{cases}. \text{ Khi đó}$$

$$P = \sqrt{x^2 + (y-2)^2} + \sqrt{(x-6)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{18\sin\alpha - 24\cos\alpha + 34} + \sqrt{-18\sin\alpha - 24\cos\alpha + 34}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhia Copsky ta có

$$P \leq \sqrt{1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{-48\cos\alpha + 68} \leq 2\sqrt{58}$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi } \begin{cases} \frac{\sqrt{18\sin\alpha - 24\cos\alpha + 34}}{1} = \frac{\sqrt{-18\sin\alpha - 24\cos\alpha + 34}}{1} \\ \cos\alpha = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\alpha = -1 \\ \sin\alpha = 0 \end{cases}.$$

$$\text{Suy ra } \max P = 2\sqrt{58} \text{ khi } z = 3 - 5i.$$

Cách 2.

$$\text{Ta có } 5w = (2+i)(z-4) \Leftrightarrow 5w+5i = 5i+(2+i)(z-4) \Leftrightarrow 5|w+i| = |(2+i)z-8+i|.$$

$$\Leftrightarrow 5|w+i| = |2+i| \left| z - \frac{8-i}{2+i} \right| \Leftrightarrow 3\sqrt{5} = \sqrt{5} |z - (3-2i)| \Leftrightarrow |z - (3-2i)| = 3.$$

Khi đó tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I(3; -2)$ và bán kính $R = 3$.

Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức z ;

$A(0; 2)$ là điểm biểu diễn số phức $z_1 = 2i$;

$B(6; 2)$ là điểm biểu diễn số phức $z_2 = 6 + 2i$.

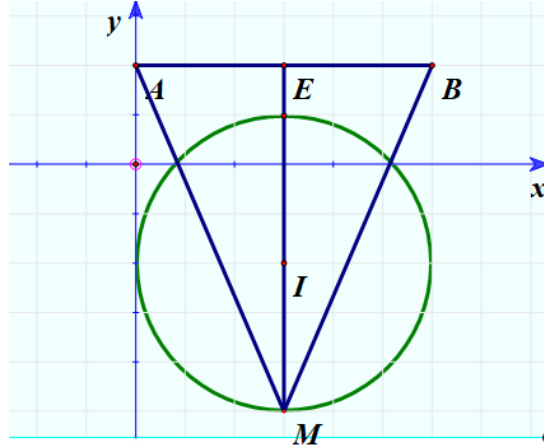
$E(3; 2)$ là trung điểm của đoạn thẳng AB .

Ta có $P = MA + MB \Rightarrow P^2 = (MA + MB)^2 \leq 2(MA^2 + MB^2) = 4ME^2 + AB^2$.

Khi đó P đạt giá trị lớn nhất khi ME đạt giá trị lớn nhất hay $ME = R + IE$.

Vậy $P_{\max} = \sqrt{4(R + IE)^2 + AB^2} = 2\sqrt{58}$

$$\text{khi } \overrightarrow{MI} = \frac{3}{7}\overrightarrow{ME} \Leftrightarrow 7\overrightarrow{MI} - 3\overrightarrow{ME} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = \frac{7x_I - 3x_E}{4} \\ y_M = \frac{7y_I - 3y_E}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = 3 \\ y_M = -5 \end{cases}.$$



Câu 31: Chọn D

Đặt $\begin{cases} w_1 = z_1 + 2 + 3i = a + bi \\ w_2 = z_2 + 2 + 3i = c + di \end{cases}$ với $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, theo giả thiết ta có: $\begin{cases} |w_1| = 3 = \sqrt{a^2 + b^2} \\ |w_2| = \frac{3}{5} = \sqrt{c^2 + d^2} \end{cases}$.

$$\frac{z_1 + 2 + 3i}{z_2 + 2 + 3i} = \frac{w_1}{w_2} = \frac{(a + bi)(c - di)}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd + (bc - ad)i}{\frac{9}{25}}.$$

Phần thực của số phức $\frac{w_1}{w_2}$ là $\frac{25(ac + bd)}{9}$.

Ta có $(ac + bd)^2 \leq (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \Leftrightarrow (ac + bd)^2 \leq 9 \cdot \frac{9}{25} \Rightarrow ac + bd \leq \frac{9}{5}$.

$\Rightarrow \frac{25(ac + bd)}{9} \leq 5$. Dấu "=" xảy ra khi $ad = bc$ hay $\frac{w_1}{w_2}$ là số thực và $|w_1| = 5|w_2| = 3$.

Vậy $m_0 = 5$.

Câu 32: Chọn C

Gọi $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$).

Ta có $|(1+i)z + 2| + |(1+i)z - 2| = 4\sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow |(1+i)z + (1+i)(1-i)| + |(1+i)z - (1+i)(1-i)| = 4\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow |(1+i)(z+1-i)| + |(1+i)(z-1+i)| = 4\sqrt{2} \Leftrightarrow |1+i||z+1-i| + |1+i||z-1+i| = 4\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow |z+1-i| + |z-1+i| = 4 \Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2} + \sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2} = 4(*).$$

Gọi $M(x; y), F_1(-1; 1), F_2(1; -1)$. Ta có $\Leftrightarrow MF_1 + MF_2 = 4$.

Do đó tập hợp điểm M biểu diễn cho số phức z là một Elip có hai tiêu điểm là F_1, F_2 ; tiêu cự bằng $\frac{1}{2}F_1F_2 = \sqrt{2}$; độ dài trục lớn bằng $MF_1 + MF_2 = 4$; một nửa độ dài trục bé bằng $\sqrt{2}$.

Ta có $m = \max|z| = 2$; $n = \min|z| = \sqrt{2} \Rightarrow w = 2 + \sqrt{2}i \Rightarrow |w| = \sqrt{6} \Rightarrow |w|^{2018} = (\sqrt{6})^{2018} = 6^{1009}$.

Câu 33: Chọn C

Ta có $|(1+i)z+1-3i| = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow |z-1-2i| = 3$ nên tập hợp điểm M biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I(1;2)$, bán kính $R=3$.

Đặt $a = z-1-2i, b = 1+i$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} |z+2+i|^2 = |a+3b|^2 = |a|^2 + 9|b|^2 + 3(a\bar{b} + \bar{a}b) \\ |z-2-3i|^2 = |a-b|^2 = |a|^2 + |b|^2 - (a\bar{b} + \bar{a}b) \end{cases}$$

$$\Rightarrow |z+2+i|^2 + 3|z-2-3i|^2 = |a+3b|^2 + 3|a-b|^2 = 4|a|^2 + 12|b|^2 = 60.$$

$$\text{Khi đó } P = |a+3b| + \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}|a-b| \leq \sqrt{(1+2)(|a+3b|^2 + 3|a-b|^2)} = 6\sqrt{5}.$$

Câu 34: Chọn A

Ta có: $|z-i| = |\bar{z}+i|$ nên $|z^2-2iz-1| = |z-i|^2 = |\bar{z}+i|^2$.

$$\text{Nhu vậy: } (1+i)|z^2-2iz-1| = \frac{2019\bar{z}+2019i}{w} + 2-2i \Leftrightarrow (1+i)|\bar{z}+i|^2 = \frac{2019(\bar{z}+i)}{w} + 2-2i$$

$$\Leftrightarrow (1+i)|\bar{z}+i|^2 + 2i-2 = \frac{2019(\bar{z}+i)}{w} \Leftrightarrow |\bar{z}+i|^2 - 2 + (|\bar{z}+i|^2 + 2)i = \frac{2019(\bar{z}+i)}{w}.$$

Điều kiện: $w \neq 0$ suy ra $\bar{z}+i \neq 0$ hay $|\bar{z}+i| > 0$.

Đặt $t = |\bar{z}+i|, t > 0$ ta có $t^2 - 2 + (t^2 + 2)i = \frac{2019(\bar{z}+i)}{w}$. Lấy môđun hai vế ta được:

$$\sqrt{(t^2-2)^2 + (t^2+2)^2} = \frac{2019|\bar{z}+i|}{|w|} \Leftrightarrow \sqrt{(t^2-2)^2 + (t^2+2)^2} = \frac{2019t}{|w|}$$

$$\Leftrightarrow |w| = \frac{2019t}{\sqrt{(t^2-2)^2 + (t^2+2)^2}} \Leftrightarrow |w| = \frac{2019t}{\sqrt{2t^4+8}} \Rightarrow |w| \leq \frac{2019t}{2\sqrt{2}t} \Leftrightarrow |w| \leq \frac{2019\sqrt{2}}{4}.$$

$$\text{Vậy } \max|w| = \frac{2019\sqrt{2}}{4} \text{ khi } 2t^4 = 8 \Leftrightarrow t^4 = 4 \Leftrightarrow t = \sqrt{2} \Leftrightarrow |z-i| = \sqrt{2}.$$