

DS6.CHUYÊN ĐỀ 9-PHÂN SỐ

CHỦ ĐỀ 2:PHÂN SỐ TỐI GIẢN

PHẦN I.TÓM TẮT LÝ THUYẾT

-Phân số tối giản hay còn gọi là phân số không thể rút gọn được nữa là phân số mà tử và mẫu chỉ có ước chung là 1 và -1.

-Giả sử ta có phân số $\frac{a}{b}$. Phân số $\frac{a}{b}$ được gọi là phân số tối giản khi và chỉ khi $\text{ƯCLN}(a,b)=1$.

- Nếu phân số $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản thì phân số $\frac{b}{a}$ cũng là phân số tối giản.

- Tổng (hiệu) của một số nguyên và một phân số tối giản là một phân số tối giản.

-Tính chất:

$$+ \begin{cases} a:m \\ b:m \end{cases} \Rightarrow a \pm b:m$$

$$+ a:m \Rightarrow a.k:m$$

-Thuật toán Öclit tìm ƯCLN(a;b):

Ta tìm ƯCLN(a ;b) bằng cách dùng thuật toán Euclide như sau :

$$a = bq_0 + r_1 \quad \text{với } 0 < r_1 < |b|$$

$$b = r_1 q_1 + r_2 \quad \text{với } 0 < r_2 < r_1$$

....

$$r_{n-1} = r_n q_n .$$

Thuật toán phải kết thúc với một số dư bằng 0

Do đó ta có: $(a; b) = (b; r_1) = (r_1; r_2) = \dots = (r_{n-1}; r_n) = r_n$.

PHẦN II.CÁC DẠNG BÀI

Dạng 1: Chứng minh phân số với tham số n là phân số tối giản.

I.Phương pháp giải

Chứng minh phân số $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản, ta cần chứng minh $\text{ƯCLN}(a,b) = \pm 1$, hoặc dùng

thuật toán Euclide hoặc tổng (hiệu) của một số nguyên và một phân số tối giản là một phân số tối giản.

II.Bài toán

Bài 1: Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n khác 0 thì các phân số sau là phân số tối giản.

a. $\frac{1}{n}$

b. $\frac{n+1}{n}$

c. $\frac{n-1}{n}$

Lời giải

a. $\frac{1}{n}$

Vì $\text{ÖCLN}(1, n) = 1$ nên $\frac{1}{n}$ là phân số tối giản.

b. $\frac{n+1}{n}$

*Cách 1: Theo thuật toán Euclide: $\text{ÖCLN}(n+1, n) = \text{ÖCLN}(n, 1) = 1$

do đó $\frac{n+1}{n}$ là phân số tối giản.

*Cách 2: Giả sử $\text{ÖCLN}(n+1, n) = d$

$$\Rightarrow \begin{cases} (n+1):d \\ n:d \end{cases}$$

$$\Rightarrow n+1 - n : d$$

$$\Rightarrow 1:d \Rightarrow d=1$$

Vậy $\frac{n+1}{n}$ là phân số tối giản.

*Cách 3: Ta có: $\frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$ mà $\frac{1}{n}$ là phân số tối giản nên phân số $\frac{n+1}{n}$ là phân số tối giản.

Bài 2: Chứng minh rằng với $n \in \mathbb{Z}$ các phân số sau tối giản.

a. $\frac{n}{2n+1}$

b. $\frac{1}{7n+1}$

c. $\frac{n+5}{n+6}$

d. $\frac{n+1}{2n+3}$

e. $\frac{3n+2}{5n+3}$

f. $\frac{7n+1}{14n+3}$

g. $\frac{2n+7}{3n+10}$

h. $\frac{2n+3}{4n+4}$

Lời giải

a. $\frac{n}{2n+1}$

$$\text{Giả sử } \text{ÖCLN}(n, 2n+1) = d$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n:d \\ 2n+1:d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2n:d \\ 2n+1:d \end{cases}$$

$$\Rightarrow (2n+1) - 2n : d$$

$$\Rightarrow 2n+1 - 2n : d$$

$$\Rightarrow 1:d \Rightarrow d=1$$

Vậy phân số $\frac{n}{2n+1}$ là phân số tối giản.

$$\text{b. } \frac{1}{7n+1}$$

Vì $\text{ÖCLN}(1, 7n+1) = 1$ nên $\frac{1}{7n+1}$ là phân số tối giản.

$$\text{c. } \frac{n+5}{n+6}$$

$$\text{Giả sử } \text{ÖCLN}(n+5, n+6) = d.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n+5:d \\ n+6:d \end{cases}$$

$$\Rightarrow (n+6) - (n+5) : d$$

$$\Rightarrow n+6 - n - 5 : d$$

$$\Rightarrow 1:d \Rightarrow d=1$$

Vậy phân số $\frac{n+5}{n+6}$ là phân số tối giản.

$$\text{d. } \frac{n+1}{2n+3}$$

$$\text{Giả sử } \text{ÖCLN}(n+1, 2n+3) = d.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n+1:d \\ 2n+3:d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2n+2:d \\ 2n+3:d \end{cases}$$

$$\Rightarrow (2n+3) - (2n+2) : d$$

$$\Rightarrow 2n+3-2n-2:d$$

$$\Rightarrow 1:d \Rightarrow d=1$$

Vậy phân số $\frac{n+1}{2n+3}$ là phân số tối giản.

$$e. \frac{3n+2}{5n+3}$$

Giả sử $\text{ÖCLN}(3n+2, 5n+3)=d$.

$$\Rightarrow \begin{cases} 3n+2:d \\ 5n+3:d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5(3n+2):d \\ 3(5n+3):d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 15n+10:d \\ 15n+9:d \end{cases}$$

$$\Rightarrow (15n+10)-(15n+9):d$$

$$\Rightarrow 15n+10-15n-9:d$$

$$\Rightarrow 1:d \Rightarrow d=1$$

Vậy phân số $\frac{3n+2}{5n+3}$ là phân số tối giản.

$$f. \frac{7n+1}{14n+3}$$

Giả sử $\text{ÖCLN}(7n+1, 14n+3)=d$.

$$\Rightarrow \begin{cases} 7n+1:d \\ 14n+3:d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(7n+1):d \\ 14n+3:d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 14n+2:d \\ 14n+3:d \end{cases}$$

$$\Rightarrow (14n+3)-(14n+2):d$$

$$\Rightarrow 14n+3-14n-2:d$$

$$\Rightarrow 1:d \Rightarrow d=1$$

Vậy phân số $\frac{7n+1}{14n+3}$ là phân số tối giản.

$$g. \frac{2n+7}{3n+10}$$

Giả sử $\text{ÖCLN}(2n+7, 3n+10)=d$.

$$\Rightarrow \begin{cases} 2n+7:d \\ 3n+10:d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3(2n+7):d \\ 2(3n+10):d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6n+21:d \\ 6n+20:d \end{cases}$$

$$\Rightarrow (6n+21) - (6n+20) : d$$

$$\Rightarrow 6n+21 - 6n - 20 : d$$

$$\Rightarrow 1 : d \Rightarrow d = 1$$

Vậy phân số $\frac{2n+7}{3n+10}$ là phân số tối giản.

h. $\frac{2n+3}{4n+4}$

$$\text{Giả sử } \text{ÖCLN}(2n+3, 4n+4) = d.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2n+3 : d \\ 4n+4 : d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(2n+3) : d \\ 4n+4 : d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4n+6 : d \\ 4n+4 : d \end{cases}$$

$$\Rightarrow (4n+6) - (4n+4) : d$$

$$\Rightarrow 4n+6 - 4n - 4 : d$$

$$\Rightarrow 2 : d$$

Vì $2n+3$ là số lẻ, $4n+4$ là số chẵn nên suy ra $d = 1$

Vậy phân số $\frac{2n+3}{4n+4}$ là phân số tối giản.

Bài 3: Chứng minh rằng các phân số sau tối giản:

a. $\frac{n^2+1}{n}$

b. $\frac{n}{n^2+1}$

c. $\frac{7n+1}{7n^2+n+1}$

d. $\frac{n}{n^3+1}$

e. $\frac{2n^2+n+1}{n}$

Lời giải

a. $\frac{n^2+1}{n}$

Ta có: Theo thuật toán Euclide: $\text{ÖCLN}(n^2+1, n) = \text{ÖCLN}(n, 1) = 1.$

Do đó: phân số $\frac{n^2+1}{n}$ là phân số tối giản.

b. $\frac{n}{n^2+1}$

Vì phân số $\frac{n^2+1}{n}$ là phân số tối giản nên phân số $\frac{n}{n^2+1}$ là phân số tối giản.

c. $\frac{7n+1}{7n^2+n+1}$

Ta có: Theo thuật toán Euclide: $\text{ÖCLN}(7n^2+n+1, 7n+1) = \text{ÖCLN}(7n+1, 1) = 1$.

Do đó: phân số $\frac{7n^2+n+1}{7n+1}$ là phân số tối giản.

Vì phân số $\frac{7n^2+n+1}{7n+1}$ là phân số tối giản nên phân số $\frac{7n+1}{7n^2+n+1}$ là phân số tối giản.

d. $\frac{n}{n^3+1}$

Ta có: Theo thuật toán Euclide: $\text{ÖCLN}(n^3+1, n) = \text{ÖCLN}(n, 1) = 1$.

Do đó: phân số $\frac{n^3+1}{n}$ là phân số tối giản.

Vì phân số $\frac{n^3+1}{n}$ là phân số tối giản nên phân số $\frac{n}{n^3+1}$ là phân số tối giản.

e. $\frac{2n^2+n+1}{n}$

Ta có: Theo thuật toán Euclide: $\text{ÖCLN}(2n^2+n+1, n) = \text{ÖCLN}(n, 1) = 1$.

Do đó: phân số $\frac{2n^2+n+1}{n}$ là phân số tối giản.

Bài 4: Cho a là số tự nhiên chia 4 dư 3. Phân số $\frac{a}{a+2}$ có là phân số tối giản không?

Lời giải

Giả sử $\text{ÖCLN}(a, a+2) = d$.

$$\Rightarrow \begin{cases} a:d \\ a+2:d \end{cases}$$

$$\Rightarrow (a+2) - a : d$$

$$\Rightarrow a+2 - a : d$$

$$\Rightarrow 2:d$$

Vì a là số tự nhiên chia 4 dư 3 nên a là số lẻ.

Suy ra: $d=1$

Vậy phân số $\frac{a}{a+2}$ là phân số tối giản.

Bài 5: Chứng minh rằng nếu a là số nguyên khác -1 thì giá trị của biểu thức $A = \frac{a^3 + 2a^2 - 1}{a^3 + 2a^2 + 2a + 1}$ là phân số tối giản.

Lời giải

$$\text{Ta có: } A = \frac{a^3 + 2a^2 - 1}{a^3 + 2a^2 + 2a + 1} = \frac{(a+1)(a^2 + a - 1)}{(a+1)(a^2 + a + 1)} = \frac{a^2 + a - 1}{a^2 + a + 1}$$

$$\text{Gọi } d = \text{ÖCLN}(a^2 + a - 1, a^2 + a + 1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 + a - 1 : d \\ a^2 + a + 1 : d \end{cases}$$

$$\Rightarrow [a^2 + a + 1 - (a^2 + a - 1)] : d$$

$$\Rightarrow 2 : d$$

$$\text{Mà } a^2 + a + 1 = a(a+1) + 1 \text{ là số lẻ nên } d \text{ lẻ} \Rightarrow d=1$$

Vậy với a khác -1 thì giá trị của A là phân số tối giản.

Bài 6: Chứng minh với mọi số nguyên n khác không thì phân số $\frac{2n+1}{2n(n+1)}$ là phân số tối giản.

Lời giải

$$\text{Giả sử } d = \text{ÖCLN}[2n+1, 2n(n+1)]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2n+1 : d \\ 2n(n+1) : d \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2n+1 : d \\ n(2n+2) : d \end{cases}$$

$$\text{Mà } \text{ÖCLN}(2n+1, 2n+2) = 1 \text{ nên}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2n+1 : d \\ n : d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2n+1 : d \\ 2n : d \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2n+1 - 2n : d \Rightarrow 1 : d \Rightarrow d=1$$

Vậy phân số $\frac{2n+1}{2n(n+1)}$ là phân số tối giản.

Dạng 2: Tìm tham số n để phân số tối giản.

I. Phương pháp giải

- Bước 1: Giả sử d là ước chung của tử và mẫu $\Rightarrow$ Tử và mẫu cùng chia hết cho d .

- Bước 2: Vận dụng các tính chất quan hệ chia hết để tìm các giá trị của d .

- Bước 3: Xác định giá trị khác -1 và 1 của $d \Rightarrow$ tử hoặc mẫu không chia hết cho các giá trị đó $\Rightarrow$ từ đó tìm các điều kiện của n .

Hoặc biến đổi phân số thành tổng hoặc hiệu của số nguyên với phân số tối giản.

II. Bài toán

Bài 1: Tìm số tự nhiên n để các phân số sau là phân số tối giản.

a. $\frac{2n+3}{4n+1}$

b. $\frac{3n+2}{7n+1}$

c. $\frac{2n+7}{5n+2}$

Lời giải

a. $\frac{2n+3}{4n+1}$

Giả sử $d \in \text{ƯC}(2n+3, 4n+1)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2n+3:d \\ 4n+1:d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(2n+3):d \\ 4n+1:d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4n+6:d \\ 4n+1:d \end{cases}$$

$$\Rightarrow (4n+6) - (4n+1):d$$

$$\Rightarrow 4n+6 - 4n - 1:d$$

$$\Rightarrow 5:d \Rightarrow d \in \{\pm 1; \pm 5\}$$

Để phân số $\frac{2n+3}{4n+1}$ là phân số tối giản thì $d \neq \pm 5$

Hay $2n+3$ không chia hết cho 5.

Ta có: $2n+3 \neq 5k \Leftrightarrow 2n+3 - 5 \neq 5k \ (k \in \mathbb{Z})$

$$\Leftrightarrow 2(n-1) \neq 5k$$

$$\Leftrightarrow n-1 \neq 5k \Leftrightarrow n \neq 5k+1$$

Vậy: với $n \neq 5k+1$ thì phân số $\frac{2n+3}{4n+1}$ là phân số tối giản.

b. $\frac{3n+2}{7n+1}$

Giả sử $d \in \text{ÖC}(3n+2, 7n+1)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3n+2:d \\ 7n+1:d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7(3n+2):d \\ 3(7n+1):d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 21n+14:d \\ 21n+3:d \end{cases}$$

$$\Rightarrow (21n+14) - (21n+3):d$$

$$\Rightarrow 21n+14 - 21n - 3:d$$

$$\Rightarrow 11:d \Rightarrow d \in \{\pm 1; \pm 11\}$$

Để phân số $\frac{3n+2}{7n+1}$ là phân số tối giản thì $d \neq \pm 11$

Hay $7n+1$ không chia hết cho 11.

Ta có: $7n+1 \neq 11k \Leftrightarrow 7n+1 - 22 \neq 11k \ (k \in \mathbb{Z})$

$$\Leftrightarrow 7(n-3) \neq 11k$$

$$\Leftrightarrow n-3 \neq 11k \Leftrightarrow n \neq 11k+3$$

Vậy: với $n \neq 11k+3$ thì phân số $\frac{2n+3}{4n+1}$ là phân số tối giản.

c. $\frac{2n+7}{5n+2}$

Giả sử $d \in \text{ÖC}(2n+7, 5n+2)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2n+7:d \\ 5n+2:d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5(2n+7):d \\ 2(5n+2):d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10n+35:d \\ 10n+4:d \end{cases}$$

$$\Rightarrow (10n+35) - (10n+4):d$$

$$\Rightarrow 10n+35 - 10n - 4:d$$

$$\Rightarrow 31:d \Rightarrow d \in \{\pm 1; \pm 31\}$$

Để phân số $\frac{2n+7}{5n+2}$ là phân số tối giản thì $d \neq \pm 31$

Hay $2n+7$ không chia hết cho 31.

Ta có: $2n+7 \neq 31k \Leftrightarrow 2n+7 - 31 \neq 31k \ (k \in \mathbb{Z})$

$$\Leftrightarrow 2(n-12) \neq 31k$$

$$\Leftrightarrow n-12 \neq 31k \Leftrightarrow n \neq 31k+12$$

Vậy: với $n \neq 31k+12$ thì phân số $\frac{2n+3}{4n+1}$ là phân số tối giản.

Bài 2 : Tìm tất cả các số nguyên n để các phân số sau là phân số tối giản.

a. $\frac{3n+4}{n-1}$ b. $\frac{2n-9}{n-1}$ c. $\frac{n^2-n-7}{n-1}$

Lời giải

a. $\frac{3n+4}{n-1}$

Ta có: $\frac{3n+4}{n-1} = \frac{3n-3+7}{n-1} = 3 + \frac{7}{n-1}$ (với $n \neq 1$)

Để $\frac{3n+4}{n-1}$ là phân số tối giản thì $\frac{7}{n-1}$ là phân số tối giản.

Mà $\frac{7}{n-1}$ là phân số tối giản ta phải có $\text{ÖCLN}(7, n-1) = 1$

Vì 7 là số nguyên tố do đó nếu $\text{ÖCLN}(7, n-1) \neq 1$ thì $n-1:7$ hay $n-1=7k$ ($k \in \mathbb{Z}$) do đó $n=7k+1$ ($k \in \mathbb{Z}$) nên $\text{ÖCLN}(7, n-1) = 1$ khi $n \neq 7k+1$ ($k \in \mathbb{Z}$)

Vậy: phân số $\frac{3n+4}{n-1}$ là phân số tối giản khi $n \neq 7k+1$ ($k \in \mathbb{Z}$)

b. $\frac{2n-9}{n-1}$

Ta có: $\frac{2n-9}{n-1} = \frac{2n-2-7}{n-1} = 2 - \frac{7}{n-1}$ (với $n \neq 1$)

Để $\frac{2n-9}{n-1}$ là phân số tối giản thì $\frac{7}{n-1}$ là phân số tối giản.

Mà $\frac{7}{n-1}$ là phân số tối giản ta phải có $\text{ÖCLN}(7, n-1) = 1$

Vì 7 là số nguyên tố do đó nếu $\text{ÖCLN}(7, n-1) \neq 1$ thì $n-1:7$ hay $n-1=7k$ ($k \in \mathbb{Z}$) do đó $n=7k+1$ ($k \in \mathbb{Z}$) nên $\text{ÖCLN}(7, n-1) = 1$ khi $n \neq 7k+1$ ($k \in \mathbb{Z}$)

Vậy: phân số $\frac{3n+4}{n-1}$ là phân số tối giản khi $n \neq 7k+1 (k \in \mathbb{Z})$

c. $\frac{n^2 - n - 7}{n-1}$

Ta có: $\frac{n^2 - n - 7}{n-1} = n - \frac{7}{n-1}$ (với $n \neq 1$)

Để $\frac{n^2 - n - 7}{n-1}$ là phân số tối giản thì $\frac{7}{n-1}$ là phân số tối giản.

Mà $\frac{7}{n-1}$ là phân số tối giản ta phải có $\text{ÖCLN}(7, n-1) = 1$

Vì 7 là số nguyên tố do đó nếu $\text{ÖCLN}(7, n-1) \neq 1$ thì $n-1:7$ hay $n-1=7k (k \in \mathbb{Z})$ do đó $n=7k+1 (k \in \mathbb{Z})$ nên $\text{ÖCLN}(7, n-1) = 1$ khi $n \neq 7k+1 (k \in \mathbb{Z})$

Vậy: phân số $\frac{n^2 - n - 7}{n-1}$ là phân số tối giản khi $n \neq 7k+1 (k \in \mathbb{Z})$

Bài 3: Tìm tất cả các số nguyên n để phân số $\frac{3}{2n+3}$ là phân số tối giản.

Lời giải

Vì 3 là số nguyên tố nên $\frac{3}{2n+3}$ là phân số tối giản khi $2n+3$ không chia hết cho 3.

Do $3:3$ nên $2n \nmid 3$ khi $n \nmid 3$ hay $n \neq 3k (k \in \mathbb{Z})$

Bài 4: Tìm các số tự nhiên n để các phân số sau là phân số tối giản.

a. $\frac{4n^2 + 6n + 3}{n+3}$

b. $\frac{18n+3}{21n+7}$

c. $\frac{8n+193}{4n+3}$

Lời giải

a. $\frac{4n^2 + 6n + 3}{2n+3}$

Giả sử $d \in \text{ÖC}(4n^2 + 6n + 3, 2n+3)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4n^2 + 6n + 3 : d \\ 2n + 3 : d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4n^2 + 6n + 3 : d \\ 2n(2n+3) : d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4n^2 + 6n + 3 : d \\ 4n^2 + 6n : d \end{cases}$$

$$\Rightarrow (4n^2 + 6n + 3) - (4n^2 + 6n) : d$$

$$\Rightarrow 4n^2 + 6n + 3 - 4n^2 - 6n : d$$

$$\Rightarrow 3 : d \Rightarrow d \in \{\pm 1; \pm 3\}$$

Để phân số $\frac{4n^2 + 6n + 3}{2n + 3}$ là phân số tối giản thì $d \neq \pm 3$

Hay $2n + 3$ không chia hết cho 3.

Ta có: $2n + 3 \neq 3k \Leftrightarrow 2n + 3 - 9 \neq 3k \Leftrightarrow 2n - 6 \neq 3k (k \in \mathbb{Z})$

$$\Leftrightarrow 2(n - 3) \neq 3k$$

$$\Leftrightarrow n - 3 \neq 3k \Leftrightarrow n \neq 3k + 3$$

Vậy: với $n \neq 3(k + 1)$ thì phân số $\frac{4n^2 + 6n + 3}{2n + 3}$ là phân số tối giản.

b. $\frac{18n + 3}{21n + 7}$

Giả sử d là ước chung nguyên tố của $(18n + 3)$ và $(21n + 7)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 18n + 3 : d \\ 21n + 7 : d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7(18n + 3) : d \\ 6(21n + 7) : d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 126n + 21 : d \\ 126n + 42 : d \end{cases}$$

$$\Rightarrow (126n + 42) - (126n + 21) : d$$

$$\Rightarrow 126n + 42 - 126n - 21 : d$$

$$\Rightarrow 21 : d \Rightarrow d \in \{3; 7\}$$

$$+ d = 3 \Rightarrow 21n + 7 : 3 \Rightarrow 7 : 3 \text{ (vô lí)}$$

$$+ d = 3 \Rightarrow 18n + 3 : 7 \Rightarrow 18n + 3n - 3n + 3 : 7 \Rightarrow 21n - 3n + 3 : 7 \Rightarrow 3 - 3n : 7 \Rightarrow n - 1 : 7$$

$$\Rightarrow n - 1 = 7k \Rightarrow n = 7k + 1$$

Vậy: với $n \neq 7k + 1$ thì phân số $\frac{18n + 3}{21n + 7}$ là phân số tối giản.

c. $\frac{8n + 193}{4n + 3}$

Giả sử d là ước chung nguyên tố của $(8n + 193)$ và $(4n + 3)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 8n + 193 : d \\ 4n + 3 : d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8n + 193 : d \\ 2(4n + 3) : d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8n + 193 : d \\ 8n + 6 : d \end{cases}$$

$$\Rightarrow (8n+193) - (8n+6) : d$$

$$\Rightarrow 8n+193 - 8n - 6 : d$$

$$\Rightarrow 187 : d \Rightarrow d \in \{11; 17\}$$

$$+d=11 \Rightarrow 4n+3 : 11 \Rightarrow 4n+3 - 11 : 11 \Rightarrow 4n - 8 : 11$$

$$\Rightarrow 4(n-2) : 11 \Rightarrow n-2 : 11 \Rightarrow n=11k+2 \ (k \in \mathbb{Z})$$

$$+d=17 \Rightarrow 4n+3 : 17 \Rightarrow 4n+3+17 : 17 \Rightarrow 4n+20 : 17 \Rightarrow 4(n+5) : 17$$

$$\Rightarrow n+5 : 17 \Rightarrow n=17l-5 \ (l \in \mathbb{Z})$$

Vậy: với $n \neq 11k+2, n \neq 17l-5 \ (k, l \in \mathbb{Z})$ thì phân số $\frac{8n+193}{4n+3}$ là phân số tối giản.

Bài 5: Tìm tất cả số tự nhiên n để các phân số sau là phân số tối giản.

a. $\frac{3-2n}{4n+5}$

b. $\frac{16n+5}{6n+1}$

Lời giải

a. $\frac{3-2n}{4n+5}$

Giả sử $d \in \text{ÖC}(3-2n, 4n+5)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3-2n : d \\ 4n+5 : d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(3-2n) : d \\ 4n+5 : d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6-4n : d \\ 4n+5 : d \end{cases}$$

$$\Rightarrow (6-4n) + (4n+5) : d$$

$$\Rightarrow 6-4n+4n+5 : d$$

$$\Rightarrow 11 : d \Rightarrow d \in \{\pm 1; \pm 11\}$$

Để phân số $\frac{3-2n}{4n+5}$ là phân số tối giản thì $d \neq \pm 11$

Hay $3-2n$ không chia hết cho 11.

Ta có: $3-2n \neq 11k \Leftrightarrow 3-2n-11 \neq 11k \ (k \in \mathbb{Z})$

$$\Leftrightarrow -2(n+4) \neq 11k \ (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow n+4 \neq 11k \Leftrightarrow n \neq 11k-4 \ (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy: với $n \neq 11k - 4 (k \in \mathbb{Z})$ thì phân số $\frac{3-2n}{4n+5}$ là phân số tối giản.

b. $\frac{16n+5}{6n+1}$

Giả sử $d \in \text{ÖC}(16n+5, 6n+1)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 16n+5:d \\ 6n+1:d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3(16n+5):d \\ 8(6n+1):d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 48n+15:d \\ 48n+8:d \end{cases}$$

$$\Rightarrow (48n+15) - (48n+8):d$$

$$\Rightarrow 48n+15 - 48n - 8:d$$

$$\Rightarrow 7:d \Rightarrow d \in \{\pm 1; \pm 7\}$$

Để phân số $\frac{16n+5}{6n+1}$ là phân số tối giản thì $d \neq \pm 7$

Hay $6n+1$ không chia hết cho 7.

Ta có: $6n+1 \neq 7k \Leftrightarrow 6n+1 - 7n \neq 7k (k \in \mathbb{Z})$

$$\Leftrightarrow -1(n-1) \neq 7k (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow n-1 \neq 7k \Leftrightarrow n \neq 7k+1 (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy: với $n \neq 11k - 4 (k \in \mathbb{Z})$ thì phân số $\frac{3-2n}{4n+5}$ là phân số tối giản.

Bài 6: Tìm tất cả các số nguyên n để phân số $\frac{3n^2+2n+3}{2n+1}$ tối giản.

Lời giải

Giả sử $d \in \text{ÖC}(3n^2+2n+3, 2n+1)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3n^2+2n+3:d \\ 2n+1:d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(3n^2+2n+3):d \\ 3n(2n+1):d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6n^2+4n+6:d \\ 6n^2+3n:d \end{cases}$$

$$\Rightarrow (6n^2+4n+6) - (6n^2+3n):d$$

$$\Rightarrow 6n^2+4n+6 - 6n^2 - 3n:d$$

$$\Rightarrow n+6:d \Rightarrow 2(n+6):d$$

$$\Rightarrow 2n+12:d$$

$$\Rightarrow 11:d \Rightarrow d \in \{\pm 1; \pm 11\}$$

Để phân số $\frac{3n^2+2n+3}{2n+1}$ là phân số tối giản thì $d \neq \pm 11$

Hay $2n+1$ không chia hết cho 11.

Ta có: $2n+1 \neq 11k \Leftrightarrow 2n+1+11 \neq 11k \ (k \in \mathbb{Z})$

$$\Leftrightarrow 2(n+6) \neq 11k \ (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow n+6 \neq 11k \Leftrightarrow n \neq 11k-6 \ (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy: với $n \neq 11k-6 \ (k \in \mathbb{Z})$ thì phân số $\frac{3n^2+2n+3}{2n+1}$ là phân số tối giản.

Dạng 3: Tìm tham số n để phân số không tối giản.

I. Phương pháp giải

Để một phân số không tối giản thì tử số và mẫu số phải có ít nhất một ước chung là một số nguyên tố.

II. Bài toán

Bài 1: Tìm tất cả các số nguyên n để $\frac{7}{n-1} \ (n \neq 1)$ là phân số chưa tối giản.

Lời giải

Để $\frac{7}{n-1} \ (n \neq 1)$ không là phân số tối giản ta phải có $UCLN(n-1; 7) \neq 1$

Vì 7 là số nguyên tố do đó nếu $UCLN(n-1; 7) \neq 1$ thì $n-1; 7$

hay $n-1=7k \ (k \in \mathbb{Z}, k \neq 0)$, do đó $n=7k+1 \ (k \in \mathbb{Z}, k \neq 0)$

Bài 2: Tìm tất cả các số nguyên n để $A = \frac{63}{3n+1}$ không là phân số tối giản.

Lời giải

Ta có $63=3^2 \cdot 7$ nên A không phải là phân số tối giản khi $3n+1$ chia hết cho 3 hoặc 7.

Vì $3n+1$ không chia hết cho 3 nên $3n+1$ phải chia hết cho 7.

hay $3n+1-7=3(n-2); 7 \Rightarrow n-2; 7 \ (vì \ (3; 7)=1)$

do đó $n = 7k + 2$ ($k \in \mathbb{Z}, k \neq 0$)

Vậy $n = 7k + 2$ để $A = \frac{63}{3n+1}$ không là phân số tối giản.

Bài 3: Tìm tất cả các số tự nhiên n để phân số $B = \frac{6n+7}{3n+2}$ không là phân số tối giản.

Lời giải

Gọi d là ước nguyên tố chung (nếu có) của $6n+7$ và $3n+2$

$$\Rightarrow \begin{cases} 6n+7 : d \\ 3n+2 : d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6n+7 : d \\ 6n+4 : d \end{cases}$$

$$\Rightarrow (6n+7) - (6n+4) : d \text{ hay } 3 : d$$

Vì d là ước nguyên tố nên $d = 3$

Khi đó $(3n+2) : 3 \Rightarrow 2 : 3$ vô lý

Vậy không có số tự nhiên n để phân số $B = \frac{6n+7}{3n+2}$ không là phân số tối giản.

Bài 4: Tìm tất cả các số tự nhiên n để phân số $\frac{3n^2+2n+3}{2n+1}$ không là phân số tối giản.

Lời giải

Gọi d là ước nguyên tố chung (nếu có) của $3n^2+2n+3$ và $2n+1$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3n^2+2n+3 : d \\ 2n+1 : d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(3n^2+2n+3) : d \\ 3n(2n+1) : d \end{cases}$$

$$\Rightarrow [2(3n^2+2n+3) - 3n(2n+1)] : d \text{ hay } 2n+12 : d \Rightarrow 2n+1+11 : d$$

Suy ra $11 : d \Rightarrow d = 11$

Khi đó $(2n+1-11) : 11$ hay $2(n-5) : 11 \Rightarrow n-5 : 11$

$$\Rightarrow n = 11k + 5 (k \in \mathbb{N})$$

Vậy với $n = 11k + 5 (k \in \mathbb{N})$ để phân số $\frac{3n^2 + 2n + 3}{2n + 1}$ không là phân số tối giản.

Bài 5: Chứng minh rằng: $\frac{\overline{abab}}{\overline{cdcd}}$ là phân số chưa tối giản.

Lời giải

$$\text{Ta có } \frac{\overline{abab}}{\overline{cdcd}} = \frac{\overline{ab.101}}{\overline{cd.101}} = \frac{\overline{ab}}{\overline{cd}}$$

Vậy $\frac{\overline{abab}}{\overline{cdcd}}$ là phân số chưa tối giản.

Bài 6: Phân số $\frac{4n+7}{6n+5} (n \in \mathbb{N})$ rút gọn cho những số nguyên dương nào?

Lời giải

Gọi $d (d \in \mathbb{Z}^*)$ là ước chung (nếu có) của $4n+7$ và $6n+5$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4n+7 : d \\ 6n+5 : d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3(4n+7) : d \\ 2(6n+5) : d \end{cases}$$

$$\Rightarrow [3(4n+7) - 2(6n+5)] : d$$

$$\text{Suy ra } 11 : d \Rightarrow d = 11$$

Vậy phân số $\frac{4n+7}{6n+5} (n \in \mathbb{N})$ hoặc tối giản hoặc chỉ rút gọn được cho 11.

Dạng 4: Chứng minh phân số tối giản với điều kiện cho trước

I. Phương pháp giải

- Dùng phương pháp phản chứng.
- Dùng định nghĩa phân số tối giản.

II. Bài toán

Bài 1: Cho phân số $\frac{p}{q} (q \in \mathbb{N}^*)$ tối giản. Chứng minh rằng phân số $\frac{p+q}{q}$ tối giản.

Lời giải

Chứng minh bằng phương pháp phản chứng.

Giả sử $\frac{p+q}{q}$ không tối giản tức là tử $p+q$ và mẫu q có một ước chung $d \neq 1$.

suy ra $p+q : d; q : d \Rightarrow p : d$

như vậy p và q có một ước chung $d \neq 1$.

Điều này trái với đề bài đã có $\frac{p}{q}$ tối giản

Vậy $\frac{p+q}{q}$ là phân số tối giản.

Bài 2: Cho phân số $\frac{a}{b} (a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0)$ là phân số chưa tối giản. Chứng minh rằng phân số $\frac{a+b}{b}$ cũng chưa tối giản.

Lời giải

Vì phân số $\frac{a}{b}$ là phân số chưa tối giản nên $UCLN(a, b) = d (d \in \mathbb{Z}, d \neq 0, d \neq \pm 1)$

$$\Rightarrow a : d, b : d \Rightarrow (a+b) : d$$

$$\Rightarrow d \in UC(a+b, b) \text{ mà } d \neq 0, d \neq \pm 1$$

Do đó phân số $\frac{a+b}{b}$ cũng chưa tối giản.

Bài 3: Cho phân số tối giản $\frac{a}{b} (a, b \in \mathbb{N}^*)$ xét xem phân số $\frac{11a+2b}{18a+5b}$ có là phân số tối giản không?

Lời giải

Gọi $UCLN(11a+2b; 18a+5b) = d$ thì

$$\begin{cases} 18a + 5b : d \\ 11a + 2b : d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 11(18a + 5b) : d \\ 18(11a + 2b) : d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 11.18a + 55b : d \\ 11.18a + 36b : d \end{cases}$$

$$\Rightarrow (11.18a + 55b) - (11.18a + 36b) : d$$

$$\Rightarrow 55b - 36b = 19b : d \Rightarrow b : d \text{ hoặc } 19 : d$$

+ Nếu $b:d$ ta có

$$\begin{cases} 18a + 5b : d \\ 11a + 2b : d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3.(18a + 5b) : d \\ 5.(11a + 2b) : d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 54a + 15b : d \\ 55a + 10b : d \end{cases}$$

$$\Rightarrow a - 5b : d \text{ mà } b : d \text{ nên } \Rightarrow 5b : d \Rightarrow a : d$$

Mặt khác do $\frac{a}{b}$ tối giản nên $d=1$ (1)

+ Nếu $19:d$ thì $d=19$ hoặc $d=1$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{11a+2b}{18a+5b}$ hoặc tối giản hoặc rút gọn được cho 19.

Bài 4: Tìm số tự nhiên m nhỏ nhất khác 1 để các phân số $\frac{15}{m}; \frac{28}{m}$ đều tối giản.

Lời giải

Xét phân số $\frac{15}{m}$, có $15=3.5$

Nên phân số $\frac{15}{m}$ tối giản khi $m \neq 3k; m \neq 5k (k \in \mathbb{Z}^+)$

Xét phân số $\frac{28}{m}$, có $28=2^2.7$

Nên phân số $\frac{28}{m}$ tối giản khi $m \neq 2k; m \neq 7k (k \in \mathbb{Z}^+)$

Vậy các phân số $\frac{15}{m}; \frac{28}{m}$ cùng tối giản khi $m \neq 3k; m \neq 5k; m \neq 2k; m \neq 7k (k \in \mathbb{Z}^+)$

Mặt khác, m là số tự nhiên nhỏ nhất khác 1 nên ta chọn $m=11$.

Vậy $m=11$ thì các phân số $\frac{15}{m}; \frac{28}{m}$ đều tối giản.

Bài 5: Tìm các số nguyên $b (21 \leq b \leq 31)$ sao cho các phân số $\frac{7}{b}; \frac{10}{b}; \frac{11}{b}$ đều là phân số tối giản.

Lời giải

Ta có $10=2.5$ nên để các phân số $\frac{7}{b}; \frac{10}{b}; \frac{11}{b}$ đều là phân số tối giản thì

$$b \neq 2k; b \neq 5k; b \neq 7k; b \neq 11k (k \in \mathbb{Z}^+)$$

Vì $b \in \mathbb{Z}, 21 \leq b \leq 31$ nên ta chọn $b \in \{23; 27; 29; 31\}$.

Vậy $b \in \{23; 27; 29; 31\}$ thì các phân số $\frac{7}{b}; \frac{10}{b}; \frac{11}{b}$ đều là phân số tối giản.

Bài 6: Tìm số tự nhiên m nhỏ nhất để các phân số $\frac{7}{m+9}; \frac{8}{m+10}; \dots; \frac{31}{m+33}$ đều tối giản.

Lời giải

$$\text{Ta có } \frac{7}{m+9} = \frac{7}{7+(m+2)}$$

$$\frac{8}{m+10} = \frac{8}{8+(m+2)}$$

.....

$$\frac{31}{m+33} = \frac{31}{31+(m+2)}$$

Các phân số trên có dạng $\frac{a}{a+(m+2)}$

Để các phân số trên tối giản thì a và $m+2$ là hai số nguyên tố cùng nhau(vì nếu chúng không là hai số nguyên tố cùng nhau thì chúng cùng chia hết cho số $d \neq 1$ suy ra phân số rút gọn được cho d)

Ta cần tìm số tự nhiên m sao cho $m+2$ nhỏ nhất và nguyên tố cùng nhau với các số $7; 8; \dots; 31$

Như vậy $m+2$ phải là số nguyên tố nhỏ nhất mà lớn hơn 31 đó là số 37

$$m+2=37 \Rightarrow m=35$$

Vậy với $m=35$ thì các phân số $\frac{7}{m+9}; \frac{8}{m+10}; \dots; \frac{31}{m+33}$ đều tối giản.

Bài 7: Tìm số tự nhiên n nhỏ nhất để các phân số $\frac{5}{n+8}; \frac{6}{n+9}; \dots; \frac{17}{n+20}$ đều tối giản.

Lời giải

$$\text{Ta có } \frac{5}{n+8} = \frac{5}{5+(n+3)}$$

$$\frac{6}{n+9} = \frac{6}{6+(n+3)}$$

.....

$$\frac{17}{n+20} = \frac{17}{17+(n+3)}$$

Các phân số trên có dạng $\frac{a}{a+(n+3)}$

Để các phân số trên tối giản thì a và $n+3$ là hai số nguyên tố cùng nhau(vì nếu chúng không là hai số nguyên tố cùng nhau thì chúng cùng chia hết cho số $d \neq 1$ suy ra phân số rút gọn được cho d)

Ta cần tìm số tự nhiên n sao cho $n+3$ nhỏ nhất và nguyên tố cùng nhau với các số $5; 6; \dots; 17$

Như vậy $n + 3$ phải là số nguyên tố nhỏ nhất mà lớn hơn 17 đó là số 19

$$n + 3 = 19 \Rightarrow n = 16$$

Vậy với $n = 16$ thì các phân số $\frac{5}{n+8}; \frac{6}{n+9}; \dots; \frac{17}{n+20}$ đều tối giản.

Bài 8: Tìm $n \in \mathbb{N}, n > 2$ để phân số $\frac{n+7}{n-2}$ tối giản.

Lời giải

Ta có phân số $\frac{n+7}{n-2}$ tối giản nên $UCLN(n+7, n-2) = 1$

Mà $(n+7) - (n-2) = 9$ nên $UCLN(n-2; 9) = 1$

Do đó $n-2 \nmid 9$

Đặt $n-2 = 3a (a \in \mathbb{N})$

Vậy $n \neq 2 + 3a (a \in \mathbb{N})$

Bài 9: Chứng minh rằng $5n^2 + 1 \nmid 6$, với $n \in \mathbb{N}$ thì $\frac{n}{2}; \frac{n}{3}$ là các phân số tối giản.

Lời giải

Vì với mọi $n \in \mathbb{N}$ thì $5n^2 + 1 \nmid 6 \Rightarrow n^2 \nmid 6 \Rightarrow n \nmid 6$ và n không chia hết cho 3

Vậy $\frac{n}{2}; \frac{n}{3}$ là các phân số tối giản.

Bài 10: Chứng tỏ rằng nếu $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản thì:

a) Phân số $\frac{a+b}{b}$ cũng là phân số tối giản, suy ra $\frac{246913579}{123456790}$ là tối giản.

b) Phân số $\frac{a-b}{b}$ hoặc $\frac{b-a}{b}$ cũng là phân số tối giản.

Lời giải

a) Vì phân số $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản nên $UCLN(a, b) = 1$

mà $UCLN(a, b) = UCLN(a+b, b) = 1$

Do đó phân số $\frac{a+b}{b}$ là phân số tối giản.

$$\text{Suy ra } \frac{246913579}{123456790} = \frac{123456789}{123456790} + 1$$

Mà $\frac{123456789}{123456790}$ là phân số tối giản

Vậy $\frac{246913579}{123456790}$ là phân số tối giản.

b) Ta có phân số $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản nên $UCLN(a, b) = 1$

$$\text{mà } UCLN(a, b) = UCLN(a - b, b) = UCLN(b - a, b) = 1$$

nên phân số $\frac{a-b}{b}$ hoặc $\frac{b-a}{b}$ là phân số tối giản.

Bài 11: CMR nếu $(a-1; b+1)=1$ thì $A = \frac{3a+5b+2}{5a+8b+3}$ là phân số tối giản.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Gọi } d = UCLN(3a+5b+2; 5a+8b+3) &\Rightarrow 5(3a+5b+2) - 3(5a+8b+3); d \\ &\Rightarrow b+1; d \quad (1) \end{aligned}$$

$$\text{Và } 8(3a+5b+2) - 5(5a+8b+3); d \Rightarrow a-1; d \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow d \in UC(a-1; b+1)$$

$$\text{Mà } UCLN(a-1; b+1) = 1 \Rightarrow d = \pm 1$$

Vậy nếu $(a-1; b+1)=1$ thì $A = \frac{3a+5b+2}{5a+8b+3}$ là phân số tối giản.

Dạng 5: Tìm phân số tối giản thỏa mãn điều kiện cho trước

I. Phương pháp giải

Dùng định nghĩa hai phân số bằng nhau $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$.

II. Bài toán

Bài 1: Tìm phân số tối giản $\frac{a}{b}$ ($b \neq 0$) mà giá trị của nó không đổi khi cộng thêm tử với 4, mẫu với 10.

Lời giải

Với $b \neq 0$, ta có:

Khi cộng thêm tử với 4, mẫu với 10 vào phân số $\frac{a}{b}$ ta được phân số $\frac{a+4}{b+10}$

Lúc này ta có: $\frac{a}{b} = \frac{a+4}{b+10}$

Từ tính chất hai phân số bằng nhau đã học ta có $a(b+10) = b(a+4)$

Suy ra $10a = 4b$ nên $\frac{a}{b} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$.

Vậy phân số cần tìm là $\frac{a}{b} = \frac{2}{5}$.

Bài 2: Tìm phân số tối giản biết rằng khi cộng mẫu vào tử và cộng mẫu vào mẫu thì giá trị của phân số đó tăng lên gấp 2 lần.

Lời giải

Gọi phân số cần tìm là $\frac{a}{b}$ ($b \neq 0$), theo đề bài ta có: $\frac{a+b}{b+b} = \frac{2a}{b}$ hay $\frac{a+b}{2b} = \frac{2a}{b}$

suy ra $ab + bb = 4ab$ hay $3ab = bb$

suy ra $\frac{ab}{bb} = \frac{1}{3}$ hay $\frac{a}{b} = \frac{1}{3}$ (vì $b \neq 0$)

Vậy phân số cần tìm là $\frac{a}{b} = \frac{1}{3}$.

Bài 3: Tìm phân số dương tối giản $\frac{a}{b}$ ($b \neq 0$) nhỏ nhất sao cho khi nhân phân số này với các phân số $\frac{14}{5}; \frac{12}{25}$ thì kết quả là các số nguyên dương.

Lời giải

Ta có $\frac{a}{b} \cdot \frac{14}{5} = \frac{14a}{5b} \in \mathbb{N}$

Mà $UCLN(a, b) = 1$ nên a là bội của 5 và b là ước của 14 (1)

Lại có $\frac{a}{b} \cdot \frac{12}{25} = \frac{12a}{25b} \in \mathbb{N}$

Mà $UC(a, b) = 1$ nên a là bội của 25 và b là ước của 12 (2)

Từ (1) và (2) suy ra $a = BCNN(5; 25) = 25; b = UCLN(14; 12) = 2$

Vậy phân số cần tìm là $\frac{a}{b} = \frac{25}{2}$.

Bài 4: Tìm phân số tối giản $\frac{a}{b}$ ($b \in N^*$) biết rằng lấy tử cộng với 6, lấy mẫu cộng với 14 thì được một phân số bằng $\frac{3}{7}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \frac{a+6}{b+14} = \frac{3}{7}$$

$$\text{Suy ra } 7(a+6) = 3(b+14)$$

$$7a + 42 = 3b + 42$$

$$7a = 3b$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{3}{7}.$$

Vậy phân số cần tìm là $\frac{a}{b} = \frac{3}{7}$.

Bài 5: Tìm phân số tối giản $\frac{a}{b}$ ($b \in N^*$) biết rằng lấy tử cộng với 7, lấy mẫu cộng với 20 thì giá trị của phân số không đổi.

Lời giải

$$\text{Ta có } \frac{a+7}{b+20} = \frac{a}{b}$$

$$\text{Suy ra } b(a+7) = a(b+20)$$

$$ab + 7b = ab + 20a$$

$$7b = 20a$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{7}{20}.$$

Vậy phân số cần tìm là $\frac{a}{b} = \frac{7}{20}$.

Bài 6: Tìm một phân số tối giản biết rằng khi cộng mẫu vào tử để có tử mới và lấy mẫu trừ tử để có mẫu mới thì được một số chính phương chẵn bé nhất.

Lời giải

Gọi phân số cần tìm là $\frac{a}{b}$ ($b \in N^*$, $a \neq b$), theo đề bài ta có: $\frac{a+b}{b-a} = 4$

$$\text{suy ra } a+b = 4b-4a \text{ hay } 5a = 3b$$

suy ra $\frac{a}{b} = \frac{3}{5}$

Vậy phân số cần tìm là $\frac{a}{b} = \frac{3}{5}$.

Bài 7: Tìm phân số tối giản có mẫu là 11, biết rằng khi cộng tử với -18, nhân mẫu với 7 thì được một phân số bằng phân số ban đầu.

Lời giải

Gọi phân số cần tìm là $\frac{x}{11}$ ($x \in \mathbb{Z}$). Theo đề bài ta có:

$$\frac{x}{11} = \frac{x + (-18)}{11 \cdot 7}$$

$$\Rightarrow \frac{7x}{11 \cdot 7} = \frac{x + (-18)}{11 \cdot 7} \Rightarrow 7x = x - 18$$

$$\Rightarrow 6x = -18$$

$$\Rightarrow x = -3$$

Vậy phân số cần tìm là $\frac{-3}{11}$.

Bài 8: Tìm một phân số khi chưa tối giản có tổng của tử và mẫu là 1100, sau khi rút gọn được $\frac{3}{7}$. Tìm phân số ban đầu.

Lời giải

Phân số ban đầu cần tìm $\frac{3n}{7n}$ và $3n + 7n = 1100$ ($n \in \mathbb{N}^*$)

$$\text{Hay } 10n = 1100 \Rightarrow n = 110$$

Vậy phân số ban đầu là $\frac{330}{770}$.

Bài 9: a) Với a là một số nguyên tố nào thì phân số $\frac{a}{74}$ là phân số tối giản.

b) Với b là một số nguyên tố nào thì phân số $\frac{b}{225}$ là phân số tối giản.

Lời giải

a) Ta có $\frac{a}{74} = \frac{a}{2 \cdot 37}$ là phân số tối giản khi a là số nguyên tố khác 2 và 37.

b) Ta có $\frac{b}{225} = \frac{b}{3^2 \cdot 5^2}$ là phân số tối giản khi b là số nguyên tố khác 3 và 5.

Bài 10: Tìm $n \in \mathbb{N}$ để $\frac{n^3 + 5n + 1}{n^4 + 6n^2 + n + 5} = \frac{255}{1083}$.

Lời giải

Gọi $UCLN(n^3 + 5n + 1; n^4 + 6n^2 + n + 5) = d \ (d \in \mathbb{N}^*)$ suy ra

$$\begin{cases} n^3 + 5n + 1 : d \\ n^4 + 6n^2 + n + 5 : d \end{cases} \Rightarrow [(n^4 + 6n^2 + n + 5) - n(n^3 + 5n + 1)] : d$$

Hay $n^2 + 5 : d$

Do đó $[(n^3 + 5n + 1) - n(n^2 + 5)] : d$ hay $1 : d \Rightarrow d = 1$

Ta có $\frac{255}{1083} = \frac{85}{361}$

$$\frac{n^3 + 5n + 1}{n^4 + 6n^2 + n + 5}; \frac{85}{361} \text{ tối giản và } \frac{n^3 + 5n + 1}{n^4 + 6n^2 + n + 5} = \frac{85}{361}$$

Vì dạng tối giản của phân số là duy nhất nên

$$\begin{cases} n^3 + 5n + 1 = 85 \\ n^4 + 6n^2 + n + 5 = 361 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n^3 + 5n + 1 = 85 \\ n(n^3 + 5n + 1) + n^2 + 5 = 361 \end{cases}$$

$$\Rightarrow n^2 + 85n - 356 = 0$$

$$n^2 - 4n + 89n - 365 = 0$$

$$n(n - 4) + 89(n - 4) = 0$$

$$(n - 4)(n + 89) = 0$$

$$\Rightarrow n - 4 = 0 \text{ (vì } n + 89 > 0)$$

$$n = 4$$

Vậy với $n = 4$ thì $\frac{n^3 + 5n + 1}{n^4 + 6n^2 + n + 5} = \frac{255}{1083}$

PHẦN III. BÀI TOÁN THƯỜNG GẶP TRONG ĐỀ HSG.

Bài 1: (HUYỆN HOA LƯU NĂM 2020-2021)

Cho $A = \frac{2n+5}{n+3}$. Chứng tỏ A là phân số tối giản.

Lời giải

ĐK: $n \neq 3$

Gọi $UCLN(n+3, 2n+5) : d$

$$\Rightarrow (n+3):d; (2n+5):d$$

$$\Rightarrow 2(n+3):d; (2n+5):d$$

$$\Rightarrow [(2n+6) - (2n+5)] : d$$

$$\Rightarrow 1:d$$

$$\Rightarrow d=1$$

Vậy A là phân số tối giản

Bài 2: (HUYỆN PHÙ CÁT NĂM 2020-2021)

Tìm $\frac{n+1}{3n-1}$ để phân số $\frac{n+1}{3n-1}$ là phân số tối giản.

Lời giải

Gọi $UCLN(n+1, 3n-1) = d$

$$\Rightarrow \begin{cases} n+1:d \\ 3n-1:d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3n+3:d \\ 3n-1:d \end{cases}$$

$$\Rightarrow (3n+3) - (3n-1):d$$

$$\Rightarrow 4:d$$

$$\Rightarrow d \in \{1; 2; 4\}$$

Để $\frac{n+1}{3n-1}$ là phân số tối giản thì $d \notin \{2; 4\}$

$$\Rightarrow \begin{cases} n+1 \not\vdots 2 \\ n+1 \not\vdots 4 \end{cases} \Rightarrow n+1 \not\vdots 2$$

$$\Rightarrow n+1 \neq 2k \quad (k \in \mathbb{N}^*)$$

$$\Rightarrow n \neq 2k-1$$

Vậy $n \neq 2k-1 \quad (k \in \mathbb{N}^*)$ thì phân số $\frac{n+1}{3n-1}$ là phân số tối giản

Bài 3: (HUYỆN THANH BA NĂM 2020-2021)

Chứng minh phân số sau là phân số tối giản với mọi số tự nhiên n : $\frac{12n+1}{30n+2}$.

Lời giải

Gọi $UCLN(12n+1, 30n+2) = d$

$$\Rightarrow \begin{cases} 12n+1:d \\ 30n+2:d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5(12n+1):d \\ 2(30n+2):d \end{cases}$$

$$\Rightarrow (60n+5) - (60n+4):d$$

$$\Rightarrow 1:d$$

$$\Rightarrow d=1$$

Vậy phân số $\frac{12n+1}{30n+2}$ là phân số tối giản với mọi số tự nhiên n .

Bài 4: (HUYỀN CHƯƠNG MỸ NĂM 2020-2021)

Cho phân số $P = \frac{3n+5}{n+2}$ ($n \in \mathbb{N}$)

- Chứng tỏ rằng phân số P tối giản.
- Tìm giá trị lớn nhất, giá trị bé nhất của biểu thức P .

Lời giải

Cho phân số $P = \frac{3n+5}{n+2}$ ($n \in \mathbb{N}$)

a) Gọi $UCLN(3n+5, n+2) = d$

$$\Rightarrow 3n+5 \equiv 0 \pmod{d} \text{ và } n+2 \equiv 0 \pmod{d}$$

$$\Rightarrow 3(n+2) - (3n+5) \equiv 0 \pmod{d}$$

$$\Rightarrow 1 \equiv 0 \pmod{d}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d = -1 \\ d = 1 \end{cases}$$

Suy ra phân số $P = \frac{3n+5}{n+2}$ ($n \in \mathbb{Z}$) tối giản.

b) Ta có: $P = \frac{3n+5}{n+2}$ ($n \in \mathbb{Z}$)

$$P = \frac{3(n+2) - 1}{n+2}$$

$$P = 3 - \frac{1}{n+2}$$

Để P đạt giá trị lớn nhất thì $\frac{1}{n+2}$ đạt giá trị âm nhỏ nhất, mà $n \in \mathbb{Z}$ nên $n+2$ đạt giá trị nguyên âm lớn nhất khi $n = -3$.

Khi đó giá trị lớn nhất của P là: $P = 3 - \frac{1}{-3+2} = 4$.

Để P đạt giá trị nhỏ nhất thì $\frac{1}{n+2}$ đạt giá trị dương lớn nhất; mà $n \in \mathbb{Z}$ nên $n+2$ đạt giá trị nguyên dương nhỏ nhất khi $n = -1$.

Khi đó giá trị nhỏ nhất của P là: $P = 3 - \frac{1}{-1+2} = 2$.

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng 4, đạt tại $n = -3$

Giá trị nhỏ nhất của P bằng 2, đạt tại $n = -1$.

Bài 5: (HSG SƠN TỊNH NĂM 2020-2021)

Chứng tỏ rằng với mọi số tự nhiên n , phân số $\frac{12n+5}{15n+6}$ là phân số tối giản.

Lời giải

Gọi $UCLN(12n+5, 15n+6) = d$

$$\Rightarrow \begin{cases} 12n+5:d \\ 15n+6:d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5(12n+5):d \\ 4(15n+6):d \end{cases}$$

$$\Rightarrow (60n+25) - (60n+24):d$$

$$\Rightarrow 1:d$$

$$\Rightarrow d=1$$

Vậy phân số $\frac{12n+5}{15n+6}$ là phân số tối giản.

Bài 6: (HUYỆN NHO QUAN NĂM 2020-2021)

Chúng tỏ rằng với n là số nguyên dương thì $\frac{14n+3}{24n+5}$ là phân số tối giản.

Lời giải

Gọi $d = \text{ÖCLN}(14n+3; 24n+5)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 14n+3:d \\ 24n+5:d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12.(14n+3):d \\ 7.(24n+5):d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 168n+36:d \\ 168n+35:d \end{cases}$$

$$\Rightarrow (168n+36) - (168n+35):d$$

$$\Rightarrow 168n+36 - 168n - 35:d$$

$$\Rightarrow 1:d \Rightarrow d=1$$

Vậy: phân số $\frac{14n+3}{24n+5}$ là phân số tối giản với $n \in \mathbb{N}$.

Bài 7: (HUYỆN TRIỆU SƠN NĂM 2020-2021)

Tìm các số tự nhiên n để phân số $\frac{1-3n}{2n-3}$ là phân số tối giản.

Lời giải

Gọi $d = \text{ÖC}(1-3n; 2n-3)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1-3n:d \\ 2n-3:d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2.(1-3n):d \\ 3.(2n-3):d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2-6n:d \\ 6n-9:d \end{cases}$$

$$\Rightarrow (2-6n) + (6n-9):d$$

$$\Rightarrow 2-6n+6n-9:d$$

$$\Rightarrow -7:d \Rightarrow d = \{\pm 1; \pm 7\}$$

Để phân số $\frac{1-3n}{2n-3}$ là phân số tối giản thì $d \neq \pm 7$

Hay $2n-3$ không chia hết cho 7

$$\Rightarrow 2n-3 \neq 7k$$

$$\Rightarrow 2n-3-7 \neq 7k$$

$$\Rightarrow 2n-10 \neq 7k$$

$$\Rightarrow n-5 \neq 7k$$

$$\Rightarrow n \neq 7k+5$$

Vậy: với $n \neq 7k+5$ phân số $\frac{1-3n}{2n-3}$ là phân số tối giản.

Bài 8: (THỊ XÃ THÁI HÒA NĂM 2020-2021)

Chứng minh rằng phân số $\frac{4n+1}{6n+1}$ là phân số tối giản với mọi số tự nhiên n .

Lời giải

Gọi $d = \text{ÖCLN}(4n+1; 6n+1)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4n+1:d \\ 6n+1:d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3.(4n+1):d \\ 2.(6n+1):d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12n+3:d \\ 12n+2:d \end{cases}$$

$$\Rightarrow (12n+3) - (12n+2):d$$

$$\Rightarrow 12n+3-12n-2:d$$

$$\Rightarrow 1:d \Rightarrow d=1$$

Vậy phân số $\frac{4n+1}{6n+1}$ là phân số tối giản với $n \in \mathbb{N}$.

Bài 9: (HUYỆN ANH SƠN NĂM 2020-2021)

Chứng minh rằng với mọi số nguyên n thì $\frac{3n+2}{5n+3}$ là phân số tối giản.

Lời giải

Gọi $d = \text{ÖCLN}(3n+2; 5n+3)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3n+2:d \\ 5n+3:d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5.(3n+2):d \\ 3.(5n+3):d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 15n+10:d \\ 15n+9:d \end{cases}$$

$$\Rightarrow (15n+10) - (15n+9) : d$$

$$\Rightarrow 15n+10 - 15n - 9 : d$$

$$\Rightarrow 1 : d \Rightarrow d = 1$$

Vậy phân số phân số $\frac{3n+2}{5n+3}$ là phân số tối giản với $n \in \mathbb{Z}$.

Bài 10: (HUYỆN PHÚ LƯƠNG NĂM 2020-2021)

Tìm số tự nhiên n nhỏ nhất để các phân số sau đều là phân số tối giản:

$$\frac{7}{n+9}, \frac{8}{n+10}, \frac{9}{n+11}, \dots, \frac{100}{n+102}$$

Lời giải

Ta có các phân số đã cho đều có dạng $\frac{x}{x+(n+2)}$ với $x \in \{7; 8; 9; \dots; 100\}$

Do đó để các phân số đều tối giản thì x và $n+2$ phải nguyên tố cùng nhau.

Suy ra $n+2$ phải nhỏ nhất và nguyên tố cùng nhau với các số $7; 8; 9; \dots; 100$

$\Rightarrow n+2$ là số nguyên tố nhỏ nhất và lớn hơn 100

$$\Rightarrow n+2 = 101$$

$$\Rightarrow n = 99$$

!HẾT!

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

<https://www.vnteach.com>

Hướng dẫn tìm và tải các tài liệu ở đây

<https://forms.gle/LzVNwfMpYB9qH4JU6>