CỤM TRƯỜNG THPT	ĐỀ THI THỬ HSG NĂM 2021-2022 MÔN TOÁN Thời gian: 150 phút

Câu 1. ***(3 điểm)*** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=x^3-3mx^2-9m^2x$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

Câu 2. ***(3 điểm)*** Cho phương trình:

$$\sin^3 x+2\sin x+3=\left(2\cos^3 x+m\right)\sqrt{2\cos^3 x+m-2}+2\cos^3 x+\cos^2 x+m.$$

Tìm m để phương trình trên có đúng 1 nghiệm $x\in\left[0;\frac{2\pi}{3}\right)$?

Câu 3. ***(3 điểm)*** Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)(y-2)}+x+5=2y+\sqrt{y-2}\\ \dfrac{(x-8)(y+1)}{x^2-4x+7}=(y-2)\left(\sqrt{x+1}-3\right)\end{cases}\quad (x,y\in\mathbb{R})$$

Câu 4. ***(3 điểm)*** Trong cuộc thi văn nghệ do đoàn thanh niên trường THPT A tổ chức vào tháng 11 năm 2021 với thể lệ mỗi lớp tham gia một tiết mục bởi 1 video tự quay. Kết quả có 12 tiết mục đạt giải trong đó: có 4 tiết mục lớp 12, có 5 tiết mục khối 11 và 3 tiết mục khối 10. Ban tổ chức chọn ngẫu nhiên 5 tiết mục phát biểu diễn chào mừng ngày 20 tháng 11 (không tính thứ tự biểu diễn). Tính xác suất sao cho khối nào cũng có tiết mục được biểu diễn trong đó có ít nhất 2 tiết mục của khối 12.

Câu 5. ***(3 điểm)*** Cho tứ diện $ABCD$ có $AB=CD=a$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AD, BC. Biết $V_{ABCD}=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$ và $d(AB,CD)=a$. Tính độ dài MN

Câu 6. ***(3 điểm)*** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Điểm M di động trên cạnh SC, đặt $\dfrac{MC}{MS}=k$. Mặt phẳng qua A, M song song với BD cắt SB, SD theo thứ tự tại N,P. Tìm k để thể tích khối chóp $C.APMN$ lớn nhất.

Câu 7. ***(2 điểm)*** Cho a,b,c là số dương thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=1$. Tìm giá trị lớn nhất của $A=(1+2a)(1+2bc)$

Hết.

Câu	Hướng dẫn chấm	Điểm

Câu 3 điểm

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3mx^2 - 9m^2x$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

Lời giải

Cách 1:

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Có $y' = 3x^2 - 6mx - 9m^2$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -m \\ x = 3m \end{array}\right.$. **0,5**

+) Trường hợp 1: $-m = 3m \Leftrightarrow m = 0$

Ta có $y' = 3x^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, suy ra hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó loại $m = 0$. **0,5**

+) Trường hợp 2: $-m < 3m \Leftrightarrow m > 0$

Ta có bảng xét dấu y' như sau:

x	$-\infty$		$-m$		$3m$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	

0,5

Hàm số nghịch biến trên $(0;1)$ khi và chỉ khi

$-m \leq 0 < 1 \leq 3m \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 0 \\ m \geq \dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow m \geq \dfrac{1}{3}$. **0,5**

+) Trường hợp 3: $-m > 3m \Leftrightarrow m < 0$

Ta có bảng xét dấu y' như sau: **0,5**

x	$-\infty$		$3m$		$-m$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số nghịch biến trên $(0;1)$ khi và chỉ khi **0,5**

$3m \leq 0 < 1 \leq -m \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 0 \\ m \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq -1$.

Kết luận $m \geq \dfrac{1}{3}$ hoặc $m \leq -1$.

Cách 2:

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Có $y' = 3x^2 - 6mx - 9m^2$; $\Delta' = 36m^2 \ge 0, \forall m$.

Trường hợp 1: $\Delta' = 0 \Leftrightarrow m = 0$.

Ta có $y' = 3x^2 \ge 0, \forall x \in \mathbb{R}$, suy ra hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó loại $m = 0$.

Trường hợp 2: $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m \ne 0$.

Khi đó y' có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2\left(x_1 < x_2\right)$. Ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1x_2 = -3m^2 \end{cases}$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số nghịch biến trên $\left(0;1\right)$ khi và chỉ khi $x_1 \le 0 < 1 \le x_2$.

Ta có: $x_1 \le 0 < 1 \le x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1.x_2 \le 0 \\ \left(x_1 - 1\right)\left(x_2 - 1\right) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1x_2 \le 0 \\ x_1x_2 - \left(x_1 + x_2\right) + 1 \le 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3m^2 \le 0 \\ -3m^2 - 2m + 1 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \ne 0 \\ \left[\begin{array}{l} m \le -1 \\ m \ge \dfrac{1}{3} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \le -1 \\ m \ge \dfrac{1}{3} \end{array}\right..$$

Kết luận $m \ge \dfrac{1}{3}$ hoặc $m \le -1$.

Câu 2
3 điểm

Cho phương trình:

$\sin^3 x + 2\sin x + 3 = \left(2\cos^3 x + m\right)\sqrt{2\cos^3 x + m - 2} + 2\cos^3 x + \cos^2 x + m$ Tìm m để phương trình trên có đúng 1 nghiệm $x \in \left[0; \dfrac{2\pi}{3}\right)$?

Lời giải

Ta có:

$\sin^3 x + \sin^2 x + 2\sin x = \left(\sqrt{2\cos^3 x + m - 2}\right)^3 + \left(2\cos^3 x + m - 2\right) + 2\sqrt{2\cos^3 x + m - 2}\left(1\right)$

Xét hàm số $f\left(t\right) = t^3 + t^2 + 2t$ có $f'\left(t\right) = 6t^2 + 2t + 2 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$, nên hàm số $f\left(t\right)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. **0,5**

Bởi vậy:

0,5

		$(1) \Leftrightarrow f(\sin x) = f\left(\sqrt{2\cos^3 x + m - 2}\right)$ $\Leftrightarrow \sin x = \sqrt{2\cos^3 x + m - 2} \qquad (2)$	**0,5**
		Với $x \in \left[0; \frac{2\pi}{3}\right)$ thì $(2) \Leftrightarrow \sin^2 x = 2\cos^3 x + m - 2$ $\Leftrightarrow -2\cos^3 x - \cos^2 x + 3 = m \qquad (3)$	**0,5**
		Đặt $t = \cos x$, phương trình (3) trở thành $-2t^3 - t^2 - 1 = m \qquad (4)$ Ta thấy, với mỗi $t \in \left(-\frac{1}{2}; 1\right]$ thì phương trình $\cos x = t$ cho ta một nghiệm $x \in \left[0; \frac{2\pi}{3}\right)$	**0,5**
		Xét hàm số $g(t) = -2t^3 - t^2 + 3$ với $t \in \left(-\frac{1}{2}; 1\right]$. Ta có $g'(t) = -6t^2 - 2t$, $g'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = -\frac{1}{3} \end{array}\right.$	**0,5**

Ta có bảng biến thiên

t	$-\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{3}$		0		1
$g'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(t)$	3	$\searrow$	$\frac{80}{27}$	$\nearrow$	3	$\searrow$	0

Do đó, để phương trình đã cho có đúng 1 nghiệm $x \in \left[0; \frac{2\pi}{3}\right)$ điều kiện cần và đủ là phương trình (4) có đúng một nghiệm $t \in \left(-\frac{1}{2}; 1\right]$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 3 \\ m \in \left[0; \frac{80}{27}\right] \end{array}\right.$$

Câu 3
3 điểm

Câu 3. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)(y-2)}+x+5=2y+\sqrt{y-2} & (1) \\ \dfrac{(x-8)(y+1)}{x^2-4x+7}=(y-2)\left(\sqrt{x+1}-3\right) & (2) \end{cases} \quad (x,y\in\mathbb{R})$$

Lời giải

ĐK: $\begin{cases} x\ge -1 \\ y\ge 2 \end{cases}$ **0,5**

Phương trình (1): $\Leftrightarrow\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{y-2}\right)+\sqrt{(x+1)(y-2)}-(y-2)+x+1-(y-2)=0$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{y-2}\right)+\sqrt{y-2}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{y-2}\right)+\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{y-2}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{y-2}\right)=0$$ **0,5**

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{y-2}\right)\left(1+2\sqrt{y-2}+\sqrt{x-1}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{x-1}=\sqrt{y-2}\Leftrightarrow y=x+3$$

Với $y=x+3$ thay vào phương trình (2) $\dfrac{(x-8)(x+4)}{x^2-4x+7}=(x+1)\left(\sqrt{x+1}-3\right)(*)$ **0,5**

Vì $\sqrt{x+1}+3>0$ nên nhân 2 vế với $\sqrt{x+1}+3$ của phương trình (*) ta có

$$\frac{(x-8)(x+4)\left(\sqrt{x+1}+3\right)}{x^2-4x+7}=(x+1)(x-8)$$ **0,5**

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x-8=0 \\ (x+4)\left(\sqrt{x+1}+3\right)=(x+1)\left(x^2-4x+7\right)(3) \end{array}\right.$$

(3) $\Leftrightarrow(x+1+3)\left(\sqrt{x+1}+3\right)=(x-2+3)\left((x-2)^2+3\right)$ **0,5**

Xét hàm số $f(t)=(t+3)\left(t^2+3\right), t\in\mathbb{R}$

Ta có $f'(t)=3(t+1)^2\ge 0,\forall t\in\mathbb{R}$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ mà

$$f\left(\sqrt{x+1}\right)=f(x-2)\Leftrightarrow\sqrt{x+1}=x-2$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} x\ge 2 \\ x+1=x^2-4x+4 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x\ge 2 \\ x^2-5x+3=0 \end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{5+\sqrt{13}}{2} \\ x=\dfrac{5-\sqrt{13}}{2}(l) \end{array}\right.$$ **0,5**

Vì $x_1<x_2$ nên $x_1=\dfrac{5+\sqrt{13}}{2}; x_2=8$ và $y_1=\dfrac{11+\sqrt{13}}{2}$. $y_2=11$

Câu 4
3 điểm

Trong cuộc thi văn nghệ do đoàn thanh niên trường THPT X tổ chức vào tháng 11 năm 2021 với thể lệ mỗi lớp tham gia một tiết mục bởi 1 video . Kết quả có 12 tiết mục đạt giải trong đó: có 4 tiết mục lớp 12, có 5 tiết mục khối 11 và 3 tiết mục khối 10. Ban tổ chức chọn ngẫu nhiên 5 tiết mục biểu diễn chào mừng ngày 20 tháng 11 (không tính thứ tự biểu diễn). Tính xác suất sao cho khối nào cũng có tiết mục được biểu diễn trong đó có ít nhất 2 tiết mục của khối 12.

Lời giải

Gọi không gian mẫu của phép chọn ngẫu nhiên là Ω

Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega)=C_{12}^{5}=792$ **0,5**

Gọi A là biến cố: ‘‘Chọn 5 tiết mục sao cho khối nào cũng có tiết mục được biểu diễn trong đó có ít nhất 2 tiết mục của khối 12’’. **0,5**

Chỉ có 3 khả năng xảy ra thuận lợi cho biến cố A là:

+ 2 tiết mục khối 12, 2 tiết mục khối 10, 1 tiết mục khối 11 **0,5**

+ 2 tiết mục khối 12, 1 tiết mục khối 10, 2 tiết mục khối 11 **0,5**

+ 3 tiết mục khối 12, 1 tiết mục khối 10, 1 tiết mục khối 11 **0,5**

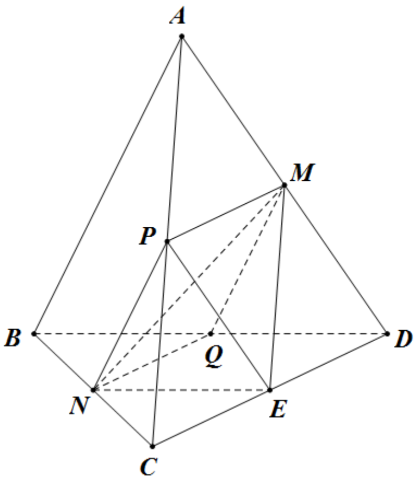
Số kết quả thuận lợi cho biến cố A là $n(A)=C_4^2.C_3^2.C_5^1+C_4^2.C_3^1.C_5^2+C_4^3.C_3^1.C_5^1=330$ **0,5**

Xác suất cần tìm là $P(A)=\dfrac{330}{792}=\dfrac{5}{12}$.

Câu 5:
3 điểm

Cho tứ diện $ABCD$ có $AB=CD=a$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AD, BC.

Biết $V_{ABCD}=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$ và $d(AB,CD)=a$. Tính độ dài MN



Gọi P, Q, E lần lượt là trung điểm của AC, BD, CD. Ta có tứ giác $MQNP$ là hình thoi cạnh $\dfrac{a}{2}$. Ta chứng minh được $V_{CDMQNP}=\dfrac{1}{2}V_{ABCD}=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$. **0,5**

Mặt khác:

$V_{C.PNE}=V_{D.QME}=\dfrac{1}{8}V_{ABCD}=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{96}\Rightarrow V_{E.MQNP}=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}-2.\dfrac{a^3\sqrt{3}}{96}=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{48}$. **0,5**

Vì AB, CD chéo nhau và $d\left(AB,CD\right)=a$ nên $d\left(CD,\left(MQNP\right)\right)=\dfrac{a}{2}$ (thật vậy, gọi Δ là đường vuông góc chung của AB, CD thì $\Delta\perp\left(MQNP\right)$ vì $\Delta\perp NP$, $\Delta\perp NQ$). **0,5**

Suy ra $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{48}=V_{E.MQNP}=\dfrac{1}{3}d\left(CD,\left(MQNP\right)\right).S_{MQNP}=\dfrac{1}{3}.\dfrac{a}{2}.S_{MQNP}$. **0,5**

$\Rightarrow S_{MQNP}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{8}$.

0,5

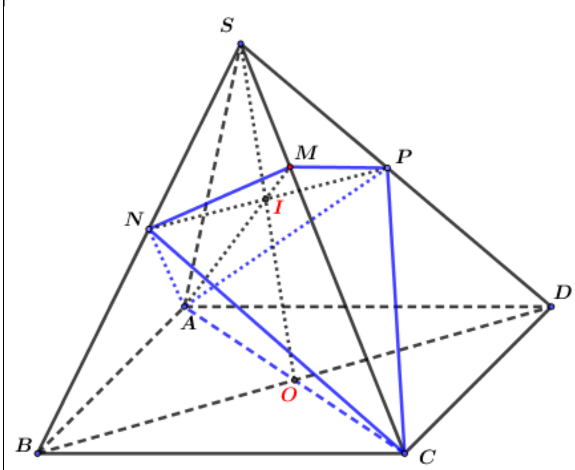
$\Leftrightarrow MQ.NQ.\sin\widehat{NQP}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{8}\Rightarrow\sin\widehat{NQP}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\widehat{NQP}=60^0\Rightarrow MN=\dfrac{a}{2}\\ \widehat{NQP}=120^0\Rightarrow MN=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\end{array}\right.$. **0,5**

Câu 6: 3 điểm

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Điểm M di động trên cạnh SC, đặt $\dfrac{MC}{MS}=k$. Mặt phẳng qua A, M song song với BD cắt SB, SD theo thứ tự tại N,P. Thể tích khối chóp $C.APMN$ lớn nhất khi

Lời giải



Gọi O là tâm hình bình hành $ABCD$; I là giao điểm của SO và NP. **0,5**

Ta có $\dfrac{SC}{SM}=\dfrac{SM}{SM}+\dfrac{CM}{SM}=1+k.$

Do $\begin{cases}AM\subset\left(ANMP\right)\\ BD//\left(ANMP\right)\\ \left(SBD\right)\cap\left(ANMP\right)=NP\end{cases}\Rightarrow NP//BD$. **0,5**

Áp dụng định lý Menelayut cho tam giác SOC và 3 điểm A,I,M thẳng hàng, ta được

$\frac{AO}{AC}.\frac{MC}{MS}.\frac{IS}{IO}=1\Rightarrow\frac{IS}{IO}=\frac{2}{k}\Rightarrow\frac{SO}{SI}=\frac{k+2}{2}$. **0,5**

Vì $NP//BD$ nên $\frac{SB}{SN}=\frac{SD}{SP}=\frac{SO}{SI}=\frac{k+2}{2}$.

Theo công thức tỷ lệ thể tích **0,5**

$$\frac{V_{S.APMN}}{V_{S.ABCD}}=\frac{\frac{SA}{SA}+\frac{SD}{SP}+\frac{SC}{SM}+\frac{SB}{SN}}{4.\frac{SA}{SA}.\frac{SD}{SP}.\frac{SC}{SM}.\frac{SB}{SN}}=\frac{1+\frac{2+k}{2}+\left(1+k\right)+\frac{2+k}{2}}{4.\frac{2+k}{2}.\left(1+k\right).\frac{2+k}{2}}=\frac{\left(2+k\right).2}{4.\left(k+1\right).\frac{\left(2+k\right)^2}{4}}$$

$$=\frac{2}{\left(1+k\right)\left(2+k\right)}\Rightarrow V_{S.APMN}=\frac{2V_{S.ABCD}}{\left(1+k\right)\left(2+k\right)}.$$ **0,5**

$$V_{C.APMN}=k.V_{S.APMN}=k.\frac{2V_{S.ABCD}}{\left(1+k\right)\left(2+k\right)}=k.\frac{2.V_{S.ABCD}}{k^2+3k+2}=\frac{2.V_{S.ABCD}}{k+\frac{2}{k}+3}$$

$$\leq\frac{2V_{S.ABCD}}{2\sqrt{k.\frac{2}{k}}+3}=\frac{2V_{S.ABCD}}{2\sqrt{2}+3}.$$ **0,5**

$$V_{C.APMN}\max=\frac{2V_{S.ABCD}}{2\sqrt{2}+3}\Leftrightarrow k=\frac{2}{k}\Leftrightarrow k=\sqrt{2}.$$

Câu 7
2 điểm

Cho a,b,c là số dương thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=1$. Tìm giá trị lớn nhất của $A=\left(1+2a\right)\left(1+2bc\right)$

Phân tích

Rõ ràng ta sẽ đánh giá biểu thức A để làm xuất hiện $a^2+b^2+c^2$.

Trước tiên ta sẽ đánh giá a qua a^2 bởi $a^2+m^2\geq 2ma\Rightarrow 2a\leq\frac{a^2}{m}+m$ (với $m>0$)

Do b,c bình đẳng nên dự đoán dấu bằng A đạt giá trị nhỏ nhất khi $b=c$ nên ta đánh giá $2bc\leq b^2+c^2$. Suy ra $A\leq\left(\frac{a^2}{m}+m+1\right)\left(1+b^2+c^2\right)=B$. Tiếp tục ta sẽ sử dụng BĐT côsi dưới dạng $xy\leq\left(\frac{x+y}{2}\right)^2$ để là xuất hiện $a^2+b^2+c^2$ nên ta sẽ tách như sau

$$B=\frac{1}{m}\left(a^2+m^2+m\right)\left(1+b^2+c^2\right)\leq\frac{1}{m}\left(\frac{\left(a^2+m^2+m\right)+\left(1+b^2+c^2\right)}{2}\right)^2$$

Suy ra A $\leq\frac{1}{4m}\left(m^2+m+2\right)^2$

Dấu bằng xảy ra khi $a=m,b=c,a^2+m^2+m=1+b^2+c^2$ và $a^2+b^2+c^2=1$.

Từ đây ta có $m = \frac{2}{3}$. Do đó ta có lời giải như sau:

Lời giải

Áp dụng BĐT côsi ta có $a^2 + \frac{4}{9} \ge \frac{4}{3}a \Rightarrow 2a \le \frac{3a^2}{2} + \frac{2}{3}$ và $2bc \le b^2 + c^2$

0,5

Suy ra $A \le \left(\frac{3a^2}{2} + \frac{2}{3} + 1\right)\left(b^2 + c^2 + 1\right)$

Áp dụng BĐT côsi ta có

$$\left(\frac{3a^2}{2} + \frac{2}{3} + 1\right)\left(b^2 + c^2 + 1\right) = \frac{3}{2}\left(a^2 + \frac{10}{9}\right)\left(b^2 + c^2 + 1\right)$$

$$\le \frac{3}{2}\left(\frac{a^2 + \frac{10}{9} + b^2 + c^2 + 1}{2}\right)^2 = \frac{98}{27}$$

0,5

Suy ra $A \le \frac{98}{27}$, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

0,5

$$\begin{cases} a = \frac{2}{3} \\ b = c \\ a^2 + \frac{10}{9} = b^2 + c^2 + 1 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{3} \\ b = c = \sqrt{\frac{5}{18}} \end{cases}$$

0,5

Vậy $\max A = \frac{98}{27}$ khi và chỉ khi $a = \frac{2}{3}$ và $b = c = \sqrt{\frac{5}{18}}$.