



Chương

Bài 1.

DÃY SỐ



Lý thuyết

1. Dãy số



Định nghĩa:

- Mỗi hàm số u xác định trên tập các số nguyên dương $\mathbb{N}^*$ được gọi là một dãy số vô hạn. Nghĩa là:

$$u: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R} \\ n \mapsto u_n = u(n).$$

Dãy số trên được kí hiệu là (u_n)

Dạng khai triển của dãy số (u_n) là: $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$



Chú ý

- $u_1 = u(1)$ là số hạng đầu,
 $u_n = u(n)$ là số hạng thứ n (số hạng tổng quát) của dãy số.
- Nếu $u_n = C, \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì ta nói (u_n) là dãy số không đổi.
- Hàm số u xác định trên tập $M = \{1, 2, 3, \dots, m\}$ với $m \in \mathbb{N}^*$ thì được gọi là một dãy số hữu hạn.
- Dạng khai triển của dãy số này là: $u_1, u_2, u_3, \dots, u_m$, trong đó u_1 là số hạng đầu. u_m là số hạng cuối.

2. Cách xác định dãy số



- Một dãy số có thể được cho bằng các cách sau:

- Cho bằng liệt kê các số hạng.
- Cho bằng công thức của số hạng tổng quát.
- Cho bằng phương pháp truy hồi.
Tức là: + Cho số hạng đầu.
+ Cho hệ thức truy hồi, tức là hệ thức biểu thị số hạng thứ n qua số hạng đứng trước nó.
- Cho bằng phương pháp mô tả.



3. Dãy số tăng, dãy số giảm và dãy số bị chặn



Định nghĩa:

- Dãy số (u_n) được gọi là dãy số tăng nếu ta có $u_{n+1} > u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.
- Dãy số (u_n) được gọi là dãy số giảm nếu ta có $u_{n+1} < u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.



Chú ý

Không phải mọi dãy số đều tăng hoặc giảm.
Chẳng hạn:

Dãy số (u_n) với $u_n = (-3)^n$ tức là dãy $-3, 9, -27, 81, \dots$ không tăng cũng không

4. Dãy số bị chặn



Định nghĩa:

- Dãy số (u_n) được gọi là bị chặn trên nếu tồn tại một số M :
 $u_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}^*$
- Dãy số (u_n) được gọi là bị chặn dưới nếu tồn tại một số m :
 $u_n \geq m, \forall n \in \mathbb{N}^*$



Chú ý

(1) Dãy tăng sẽ bị chặn dưới bởi u_1

(2) Dãy giảm sẽ bị chặn trên bởi u_1



Các dạng bài tập

Dạng 1. Tìm số hạng của dãy số từ dãy số cho trước



Phương

Ở dạng này, ta có 4 bài toán thường gặp:

✱ **Bài toán 1:** Cho dãy số (u_n) : $u_n = f(n)$. Hãy tìm số hạng u_k .

✱ **Bài toán 2:** Cho dãy số (u_n) : $\begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$. Hãy tìm số hạng u_k .

✱ **Bài toán 3:** Cho dãy số (u_n) : $\begin{cases} u_1 = a, u_2 = b \\ u_{n+2} = c.u_{n+1} + d.u_n + e \end{cases}$. Hãy tìm số hạng u_k .

✱ **Bài toán 4:** Cho dãy số (u_n) : $\begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = f(n, u_n) \end{cases}$. Trong đó $f(n, u_n)$ là kí hiệu của biểu thức u_{n+1} tính theo u_n và n . Hãy tìm số hạng u_k .

✱ **Bài toán 1:** Cho dãy số (u_n) : $u_n = f(n)$. Hãy tìm số hạng u_k .

✓ **Cách 1. Tự luận:** Thay trực tiếp $n=k$ vào $u_n = 2n+3$.

✓ **Cách 2. Dùng máy tính:** » Nhập: $f(n)$ CALC X=k
» Bấm $\rightarrow$ Kết quả

✱ **Bài toán 2:** Cho dãy số (u_n) : $\begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$. Hãy tìm số hạng u_k .

✓ **Cách 1. Tự luận:**

Tính lần lượt $u_2; u_3; \dots; u_k$ bằng cách thế u_1 vào u_2 , thế u_2 vào u_3 , ..., thế u_{k-1} vào u_k .

✓ **Cách 2. Dùng máy tính:** Cách lập quy trình bấm máy:

» Nhập giá trị của số hạng u_1 : $a \Rightarrow$ ANS

» Nhập biểu thức của $u_{n+1} = f(u_n)$

» Lặp dấu $=$ lần thứ $\boxed{k-1}$ cho ra giá trị của số hạng u_k .

✱ **Bài toán 3:** Cho dãy số (u_n) : $\begin{cases} u_1 = a, u_2 = b \\ u_{n+2} = c.u_{n+1} + d.u_n + e \end{cases}$. Hãy tìm số hạng u_k .

✓ **Cách 1. Tự luận:**

Tính lần lượt $u_2; u_3; \dots; u_k$ bằng cách thế u_1 vào u_2 , thế u_2 vào u_3 , ..., thế u_{k-1} vào u_k .

✓ **Cách 2. Dùng máy tính:** Cách lập quy trình bấm máy:



$\boxed{A}$: chứa giá trị của u_n

$\boxed{B}$: chứa giá trị của u_{n+1}

$\boxed{C}$: chứa giá trị của u_{n+2}

» Nhập $\boxed{C=cB+dA+e:A=B:B=C}$

» Bấm = rồi cho $B=b$, ấn =, nhập $A=a$ ấn =

» Lặp dấu = cho đến khi xuất hiện lần thứ $k-2$ giá trị của C thì đó chính là giá trị của số hạng u_k .

*** Bài toán 4:** Cho dãy số (u_n) : $\begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = f(n, u_n) \end{cases}$. Trong đó $f(n, u_n)$ là kí hiệu của biểu thức u_{n+1} tính theo u_n và n . Hãy tìm số hạng u_k .

✓ **Cách 1.** Tự luận:

Tính lần lượt $u_2; u_3; \dots; u_k$ bằng cách thế $\{1, u_1\}$ vào u_2 ; thế $\{2, u_2\}$ vào u_3 ; ...; thế $\{k-1, u_{k-1}\}$ vào u_k .

✓ **Cách 2.** Dùng máy tính: Cách lập quy trình bấm máy:

$\boxed{A}$: chứa giá trị của n

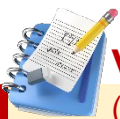
$\boxed{B}$: chứa giá trị của u_n

$\boxed{C}$: chứa giá trị của u_{n+1}

Lập công thức tính u_{n+1}

» Gán $A = \boxed{A} + 1$; $\boxed{B} := \boxed{C}$ để tính số hạng tiếp theo của dãy

» Lặp dấu = cho đến khi xuất hiện lần thứ $k-1$ giá trị của C thì đó chính là giá trị của số hạng u_k .



Ví dụ 1.1.

- (1) Xét dãy số gồm tất cả các số tự nhiên chia cho 5 dư 1 theo thứ tự tăng dần. Xác định số hạng tổng quát của dãy số.
- (2) Viết dãy số hữu hạn gồm năm số hạng đầu của dãy số trong câu 1. Xác định số hạng đầu và số hạng cuối của dãy số hữu hạn này.

Lời giải

(1) Xét dãy số gồm tất cả các số tự nhiên chia cho 5 dư 1 theo thứ tự tăng dần. Xác định số hạng tổng quát của dãy số.

Số hạng tổng quát của dãy số $u_n = 5n+1 (n \in \mathbb{N}^*)$

(2) Viết dãy số hữu hạn gồm năm số hạng đầu của dãy số trong câu 1. Xác định số hạng đầu và số hạng cuối của dãy số hữu hạn này.

dãy số hữu hạn gồm năm số hạng đầu: 6; 11; 16; 21; 26

Số hạng đầu của dãy số này là 6, số hạng cuối là 26



Ví dụ 1.2.

- (1) Viết năm số hạng đầu của dãy số (u_n) với số hạng tổng quát $u_n = n!$.
- (2) Viết năm số hạng đầu của dãy số Fibonacci (F_n) cho bởi hệ thức truy hồi

$$\begin{cases} F_1 = 1, F_2 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \end{cases}$$

Lời giải

- (1) Viết năm số hạng đầu của dãy số (u_n) với số hạng tổng quát $u_n = n!$.

Năm số hạng đầu của dãy: 1, 2, 6, 24, 120

- (2) Viết năm số hạng đầu của dãy số Fibonacci (F_n) cho bởi hệ thức truy hồi

$$\begin{cases} F_1 = 1, F_2 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad (n \geq 3) \end{cases}$$

$$F_1 = 1, F_2 = 1, F_3 = 1 + 1 = 2, F_4 = 2 + 1 = 3, F_5 = 3 + 2 = 5$$



Ví dụ 1.3.

Viết năm số hạng đầu và số hạng thứ 100 của các dãy số (u_n) có số hạng tổng quát cho bởi:

(1) $u_n = 3n - 2$

(2) $u_n = 3 \cdot 2^n$

(3) $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

Lời giải

(1) $u_n = 3n - 2$

$$u_1 = 1, u_2 = 4, u_3 = 7, u_4 = 10, u_5 = 13, u_{100} = 298$$

(2) $u_n = 3 \cdot 2^n$

$$u_1 = 6, u_2 = 12, u_3 = 24, u_4 = 48, u_5 = 96, u_{100} = 3.803 \times 10^{30}$$

(3) $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

$$u_1 = 2, u_2 = \frac{9}{4}, u_3 = \frac{64}{27}, u_4 = \frac{625}{256}, u_5 = 2.48832, u_{100} = 2.7148$$



Ví dụ 1.4.

Cho dãy số (u_n) biết

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

Tìm số hạng u_6 .

Lời giải

✓ **Cách 1:** Giải theo tự luận:

$$u_6 = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^6 - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^6 \right] = 8$$

Thế trực tiếp:



✓ **Cách 2:** Dùng máy tính cầm tay:

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^x - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^x \right]$$

» Nhập:

» Bấm **CALC** nhập $X=6$

» Máy hiện: 8



Ví dụ 1.5.

Cho dãy số (u_n) có số hạng tổng quát $u_n = \frac{2n+1}{n+2}$. Số $\frac{167}{84}$ là số hạng thứ mấy?

👉 **Lời giải**

✓ **Cách 1:** Giải theo tự luận:

Giả sử $u_n = \frac{167}{84} \Leftrightarrow \frac{2n+1}{n+2} = \frac{167}{84} \Leftrightarrow 84(2n+1) = 167(n+2) \Leftrightarrow n = 250$.

Vậy $\frac{167}{84}$ là số hạng thứ 250 của dãy số (u_n) .

✓ **Cách 2:** Dùng máy tính cầm tay:

» Nhập: $\frac{2X+1}{X+2}$

» Bấm **CALC** nhập $X=250$

» Máy hiện: $\frac{167}{84}$



Ví dụ 1.6.

Cho dãy số (u_n) biết $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n + 2}{u_n + 1} \end{cases}$. Tìm số hạng u_{10} .

👉 **Lời giải**

✓ **Cách 1:** Giải theo tự luận:

$$\begin{aligned} u_2 &= \frac{u_1 + 2}{u_1 + 1} = \frac{1+2}{1+1} = \frac{3}{2}; & u_3 &= \frac{u_2 + 2}{u_2 + 1} = \frac{\frac{3}{2}+2}{\frac{3}{2}+1} = \frac{7}{5}; & u_4 &= \frac{u_3 + 2}{u_3 + 1} = \frac{\frac{7}{5}+2}{\frac{7}{5}+1} = \frac{17}{12}; \\ u_5 &= \frac{u_4 + 2}{u_4 + 1} = \frac{\frac{17}{12}+2}{\frac{17}{12}+1} = \frac{41}{29}; & u_6 &= \frac{u_5 + 2}{u_5 + 1} = \frac{\frac{41}{29}+2}{\frac{41}{29}+1} = \frac{99}{70}; & u_7 &= \frac{u_6 + 2}{u_6 + 1} = \frac{\frac{99}{70}+2}{\frac{99}{70}+1} = \frac{239}{169}; \\ u_8 &= \frac{u_7 + 2}{u_7 + 1} = \frac{\frac{239}{169}+2}{\frac{239}{169}+1} = \frac{577}{408}; & u_9 &= \frac{u_8 + 2}{u_8 + 1} = \frac{\frac{577}{408}+2}{\frac{577}{408}+1} = \frac{1393}{985}; & u_{10} &= \frac{u_9 + 2}{u_9 + 1} = \frac{\frac{1393}{985}+2}{\frac{1393}{985}+1} = \frac{3363}{2378} \end{aligned}$$

✓ **Cách 2:** Dùng máy tính cầm tay:

Lập quy trình bấm máy:



» Nhập: $1 \boxed{=}$ (u_1)

$\boxed{\text{ANS}} + 2$

» Nhập $\boxed{\text{ANS}} + 1$

» Lập dấu $\boxed{=}$ ta được giá trị số hạng $u_{10} = \frac{3363}{2378}$.



Ví dụ 1.7.

Cho dãy số (u_n) được xác định như sau: $\begin{cases} u_1 = 1; u_2 = 2 \\ u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n + 5 \end{cases}$. Tìm số hạng u_8 .

Lời giải

✓ **Cách 1:** Giải theo tự luận:

$$\begin{aligned} u_3 &= 2u_2 + 3u_1 + 5 = 12; & u_4 &= 2u_3 + 3u_2 + 5 = 35; & u_5 &= 2u_4 + 3u_3 + 5 = 111; \\ u_6 &= 2u_5 + 3u_4 + 5 = 332; & u_7 &= 2u_6 + 3u_5 + 5 = 1002; & u_8 &= 2u_7 + 3u_6 + 5 = 3005 \end{aligned}$$

✓ **Cách 2:** Dùng máy tính cầm tay:

$\boxed{\text{A}}$: chứa giá trị của u_n

$\boxed{\text{B}}$: chứa giá trị của u_{n+1}

$\boxed{\text{C}}$: chứa giá trị của u_{n+2}

Lập quy trình bấm máy:

» Nhập: $\text{C} = 2\text{B} + 3\text{A} + 5; \text{A} = \text{B}; \text{B} = \text{C}$

» Bấm $\boxed{\text{CALC}}$ nhập $\text{B} = 2$, ấn $\boxed{=}$, nhập $\text{A} = 1$ ấn $\boxed{=}$

» Lập dấu $\boxed{=}$ cho đến khi giá trị của C xuất hiện lần thứ 6 thì đó là giá trị của số hạng u_8 bằng 3005.



Ví dụ 1.8.

Cho dãy số (u_n) được xác định như sau: $\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{n}{n+1}(u_n + 1) \end{cases}$. Tìm số hạng u_{11} .

Lời giải

✓ **Cách 1:** Giải theo tự luận:

$$\begin{aligned} u_2 &= \frac{1}{2}(u_1 + 1) = \frac{1}{2}; & u_3 &= \frac{2}{3}(u_2 + 1) = 1; & u_4 &= \frac{3}{4}(u_3 + 1) = \frac{3}{2}; & u_5 &= \frac{4}{5}(u_4 + 1) = 2; \\ u_6 &= \frac{5}{6}(u_5 + 1) = \frac{5}{2}; & u_7 &= \frac{6}{7}(u_6 + 1) = 3; & u_8 &= \frac{7}{8}(u_7 + 1) = \frac{7}{2}; & u_9 &= \frac{8}{9}(u_8 + 1) = 4; \\ u_{10} &= \frac{9}{10}(u_9 + 1) = \frac{9}{2}; & u_{11} &= \frac{10}{11}(u_{10} + 1) = 5 \end{aligned}$$

✓ **Cách 2:** Dùng máy tính cầm tay:

$\boxed{\text{A}}$: chứa giá trị của n

$\boxed{\text{B}}$: chứa giá trị của u_n



$\boxed{C}$: chứa giá trị của u_{n+1}

Lập quy trình bấm máy:

» Nhập: $C = \frac{A}{A+1}(B+1):A = A+1:B = C$

» Bấm $\boxed{\text{CALC}}$ nhập $A=1$ ấn $=$, nhập $B=0$ ấn $=$

» Lập dấu $=$ cho đến khi giá trị của C xuất hiện lần thứ 10 thì đó là giá trị của số hạng u_{11} bằng 5.



Dạng 2. Tính tăng - giảm của dãy số



Phương

- Dãy số (u_n) được gọi là **dãy số tăng** nếu ta có $u_{n+1} > u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.
- Dãy số (u_n) được gọi là **dãy số giảm** nếu ta có $u_{n+1} < u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

❖ **Cách 1:** Xét hiệu $u_{n+1} - u_n$

- Nếu $u_{n+1} - u_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì (u_n) là dãy số tăng.
- Nếu $u_{n+1} - u_n < 0 \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì (u_n) là dãy số giảm.

❖ **Cách 2:** Khi $u_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}^*$ ta xét tỉ số $\frac{u_{n+1}}{u_n}$

- Nếu $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ thì (u_n) là dãy số tăng.
- Nếu $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ thì (u_n) là dãy số giảm.

❖ Tính chất:

- Nếu $\begin{cases} (u_n) \uparrow \\ (v_n) \uparrow \end{cases}$ thì dãy số $(u_n + v_n) \uparrow$
- Nếu $\begin{cases} (u_n) \downarrow \\ (v_n) \downarrow \end{cases}$ thì dãy số $(u_n + v_n) \downarrow$
- Nếu $\begin{cases} (u_n) \uparrow; u_n \geq 0 \forall n \in \mathbb{N}^* \\ (v_n) \uparrow; v_n \geq 0 \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$ thì dãy số $(u_n \cdot v_n) \uparrow$
- Nếu $\begin{cases} (u_n) \downarrow; u_n \geq 0 \forall n \in \mathbb{N}^* \\ (v_n) \downarrow; v_n \geq 0 \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$ thì dãy số $(u_n \cdot v_n) \downarrow$
- Nếu $(u_n) \uparrow$ và $u_n \geq 0 \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì dãy số $(\sqrt[n]{u_n}) \uparrow$ và dãy số $((u_n)^m) \uparrow \forall m \in \mathbb{N}^*$
- Nếu $(u_n) \downarrow$ và $u_n \geq 0 \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì dãy số $(\sqrt[n]{u_n}) \downarrow$ và dãy số $((u_n)^m) \downarrow \forall m \in \mathbb{N}^*$
- Nếu $(u_n) \uparrow$ và $u_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì dãy số $\left(\frac{1}{u_n}\right) \downarrow$
- Nếu $(u_n) \downarrow$ và $u_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì dãy số $\left(\frac{1}{u_n}\right) \uparrow$

❖ Một vài kết quả về dạng toán tăng - giảm dãy số:

(1) Dãy số (u_n) có $u_n = an + b$	- Tăng khi $a > 0$ - Giảm khi $a < 0$
(2) Dãy số (u_n) có $u_n = q^n$	- Tăng khi $q > 1$ - Giảm khi $0 < q < 1$ - Không tăng, không giảm khi $q < 0$



(3) Dãy số (u_n) có $u_n = \frac{an+b}{cn+d}$ với điều kiện $cn+d > 0 \forall n \in \mathbb{N}^*$	⊛ Tăng khi $ad - bc > 0$ ⊛ Giảm khi $ad - bc < 0$
(4) Dãy số đan điệu cũng là dãy số không tăng, không giảm	
(5) Nếu dãy số (u_n) tăng hoặc giảm thì dãy số $(q^n \cdot u_n)$ không tăng, không giảm	
(6) Dãy số (u_n) có $u_{n+1} = au_n + b$	⊛ Tăng nếu $\begin{cases} a > 0 \\ u_2 - u_1 > 0 \end{cases}$ ⊛ Giảm nếu $\begin{cases} a > 0 \\ u_2 - u_1 < 0 \end{cases}$ ⊛ Không tăng không giảm nếu $a < 0$
(7) Dãy số (u_n) có $\begin{cases} u_{n+1} = \frac{au_n + b}{cu_n + d} \\ c, d > 0, u_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$	⊛ Tăng nếu $\begin{cases} ad - bc > 0 \\ u_2 - u_1 > 0 \end{cases}$ ⊛ Giảm nếu $\begin{cases} ad - bc > 0 \\ u_2 - u_1 < 0 \end{cases}$
(8) Dãy số (u_n) có $\begin{cases} u_{n+1} = \frac{au_n + b}{cu_n + d} \\ c, d > 0, u_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$ không tăng không giảm nếu $ad - bc < 0$	



Ví dụ 2.1.

Xét tính đơn điệu của dãy số (u_n) biết

(1) $u_n = 3n + 6$

(2) $u_n = \frac{n+5}{n+2}$

Lời giải

(1) $u_n = 3n + 6$

Ta có $u_n = 3n + 6 \Rightarrow u_{n+1} = 3(n+1) + 6 = 3n + 9$

Xét hiệu $u_{n+1} - u_n = (3n+9) - (3n+6) = 3 > 0 \forall n \in \mathbb{N}^*$. Vậy (u_n) là dãy số tăng

✓ **Giải nhanh:** Dãy này có dạng $u_n = an + b$; $a = 3 > 0$ nên dãy số tăng

(2) $u_n = \frac{n+5}{n+2}$

Ta có $u_n = \frac{n+5}{n+2} = 1 + \frac{3}{n+2} \Rightarrow u_{n+1} = 1 + \frac{3}{n+3}$

Xét hiệu $u_{n+1} - u_n = \frac{3}{n+3} - \frac{3}{n+2} = \frac{-3}{(n+2)(n+3)} < 0 \forall n \in \mathbb{N}^*$. Vậy (u_n) là dãy số giảm



✓ **Giải nhanh:** Dãy này có dạng $u_n = \frac{an+b}{cn+d}$; $\begin{cases} n+2 > 0 \forall n \in \mathbb{N}^* \\ ad - bc = -3 < 0 \end{cases}$ nên (u_n) là dãy giảm



Ví dụ 2.2.

Xét tính tăng giảm của các dãy số sau:

- (1) Dãy số (u_n) với $u_n = 2n^3 - 5n + 1$. (2) Dãy số (u_n) với $u_n = 3^n - n$.
(3) Dãy số (u_n) với $u_n = \frac{n}{n^2 + 1}$. (4) Dãy số (u_n) với $u_n = \frac{\sqrt{n}}{2^n}$.

Lời giải

- (1) Dãy số (u_n) với $u_n = 2n^3 - 5n + 1$.

Với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có: $u_{n+1} - u_n = [2(n+1)^3 - 5(n+1) + 1] - (2n^3 - 5n + 1)$
 $= 2n^3 + 6n^2 + 6n + 2 - 5n - 5 - 1 - 2n^3 + 5n - 1$
 $= 6n^2 + 6n - 3 = 6n^2 + 3n + (3n - 3) > 0$ (đúng) do $n \geq 1$.

Vì thế dãy số (u_n) là một dãy số tăng.

- (2) Dãy số (u_n) với $u_n = 3^n - n$.

Với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có: $u_{n+1} - u_n = [3^{n+1} - (n+1)] - (3^n - n)$
 $= 3 \cdot 3^n - n - 1 - 3^n + n$
 $= 2 \cdot 3^n + 3^n - 3^n - 1 = 2 \cdot 3^n - 1 > 0$ (đúng) (vì $n \geq 1$.)

Kết luận dãy số (u_n) là một dãy số tăng.

- (3) Dãy số (u_n) với $u_n = \frac{n}{n^2 + 1}$.

Với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{n+1}{(n+1)^2 + 1} - \frac{n}{n^2 + 1} = \frac{(n+1)(n^2 + 1) - n[(n+1)^2 + 1]}{[(n+1)^2 + 1](n^2 + 1)}$$

$$= \frac{n^3 + n + n^2 + 1 - (n^3 + 2n^2 + 2n)}{[(n+1)^2 + 1](n^2 + 1)} = \frac{-n^2 - n + 1}{[(n+1)^2 + 1](n^2 + 1)} < 0.$$

Vì $-n^2 - n + 1 < 0 \forall n \geq 1$, và $[(n+1)^2 + 1](n^2 + 1) > 0 \forall n \geq 1$.

Kết luận: dãy số (u_n) là một dãy số giảm.

- (4) Dãy số (u_n) với $u_n = \frac{\sqrt{n}}{2^n}$.

Để thấy $u_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}^*$. Xét tỉ số: $\frac{u_n}{u_{n+1}}$



Ta có: $\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{\sqrt{n}}{2^n} \cdot \frac{2^{n+1}}{\sqrt{n+1}} = \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} > 1 \quad (\forall n \geq 1)$

Thật vậy: $\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} > 1 \Leftrightarrow \frac{4n}{n+1} > 1 \Leftrightarrow 4n > n+1 \Leftrightarrow 3n > 1$
(đúng $\forall n \geq 1$)

Kết luận: (u_n) là một dãy số giảm.



Ví dụ 2.3.

Anh Thanh vừa được tuyển dụng vào một công ty công nghệ, được cam kết lương năm đầu sẽ là 200 triệu đồng và lương mỗi năm tiếp theo sẽ được tăng thêm 25 triệu đồng. Gọi s_n (triệu đồng) là lương vào năm thứ n mà anh Thanh làm việc cho công ty đó. Khi đó ta có: $s_1 = 200, s_n = s_{n-1} + 25; n \geq 2$.

(1) Tính lương của anh Thanh vào năm thứ 5 làm việc cho công ty..

(2) Chứng minh (s_n) là dãy số tăng. Giải thích ý nghĩa thực tế của kết quả

Lời giải

(1) Tính lương của anh Thanh vào năm thứ 5 làm việc cho công ty..

Số hạng tổng quát của dãy số là: $s_n = 200 + 25(n-1) = 175 + 25n$

Lương của anh Thanh vào năm thứ 5 làm việc cho công ty: $175 + 25 \cdot 5 = 300$ (triệu đồng)

(2) Chứng minh (s_n) là dãy số tăng. Giải thích ý nghĩa thực tế của kết quả này.

Ta có: $s_{n+1} = 175 + 25(n+1) = 200 + 25n > s_n$ suy ra (s_n) là dãy số tăng

Ý nghĩa: Tiền lương của anh Thành sẽ được tăng dần hàng năm



Dạng 3. Tính bị chặn của dãy số



Phương pháp

- Dãy số (u_n) được gọi là **bị chặn trên** nếu tồn tại một số M : $u_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}^*$
- Dãy số (u_n) được gọi là **bị chặn dưới** nếu tồn tại một số m : $u_n \geq m, \forall n \in \mathbb{N}^*$
- Dãy số (u_n) được gọi là **bị chặn** nếu nó vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới.

Tức là tồn tại các số m, M : $m \leq u_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}^*$

✓ **Phương pháp:** Chứng minh trực tiếp bằng các phương pháp chứng minh bất đẳng thức

✱ **Cách 1:** Dãy số (u_n) có $u_n = f(n)$ là hàm số đơn giản.

✱ Ta chứng minh trực tiếp bất đẳng thức

$$\begin{cases} u_n = f(n) \leq M, \forall n \in \mathbb{N}^* \\ u_n = f(n) \geq m, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

✱ **Cách 2:** Dãy số (u_n) có $u_n = v_1 + v_2 + \dots + v_k + \dots + v_n$

✱ Ta làm trội $v_k \leq a_k - a_{k+1}$

✱ Lúc đó $u_n \leq (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + \dots + (a_n - a_{n+1})$. Suy ra $u_n \leq a_1 - a_{n+1} \leq M, \forall n \in \mathbb{N}^*$

✱ **Cách 3:** Dãy số (u_n) có $u_n = v_1 \cdot v_2 \cdot v_3 \cdot \dots \cdot v_n$ với $v_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$

✱ Ta làm trội $v_k \leq \frac{a_{k+1}}{a_k}$

$$u_n \leq \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdot \dots \cdot \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_{n+1}}{a_1} \leq M, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

✱ Một vài kết quả về dạng toán dãy số bị chặn:

- Dãy số (u_n) có $u_n = q^n$ ($|q| \leq 1$) bị chặn
- Dãy số (u_n) có $u_n = q^n$ ($q < -1$) không bị chặn
- Dãy số (u_n) có $u_n = q^n$ với $q > 1$ bị chặn dưới
- Dãy số (u_n) có $u_n = an + b$ bị chặn dưới nếu $a > 0$ và bị chặn trên nếu $a < 0$
- Dãy số (u_n) có $u_n = an^2 + bn + c$ bị chặn dưới nếu $a > 0$ và bị chặn trên nếu $a < 0$
- Dãy số (u_n) có $u_n = a_m n^m + a_{m-1} n^{m-1} + \dots + a_1 n + a_0$ bị chặn dưới nếu $a_m > 0$, bị chặn trên nếu $a_m < 0$
- Dãy số (u_n) có $u_n = q^n (a_m n^m + a_{m-1} n^{m-1} + \dots + a_1 n + a_0)$ với $a_m \neq 0$ và $q < -1$ không bị chặn
- Dãy số (u_n) có $u_n = \sqrt{a_m n^m + a_{m-1} n^{m-1} + \dots + a_1 n + a_0}$ bị chặn dưới với $a_m > 0$
- Dãy số (u_n) có $u_n = \sqrt[m]{a_m n^m + a_{m-1} n^{m-1} + \dots + a_1 n + a_0}$ bị chặn dưới nếu $a_m > 0$, bị chặn trên nếu $a_m < 0$



- (10) Dãy số (u_n) có $u_n = \frac{P(n)}{Q(n)}$ trong đó $P(n)$ và $Q(n)$ là các đa thức, bị chặn nếu bậc của $P(n)$ nhỏ hơn hoặc bằng bậc của $Q(n)$
- (11) Dãy số (u_n) có $u_n = \frac{P(n)}{Q(n)}$ trong đó $P(n)$ và $Q(n)$ là các đa thức, bị chặn dưới hoặc bị chặn trên nếu bậc của $P(n)$ lớn hơn bậc của $Q(n)$



Ví dụ 3.1.

Xét tính bị chặn của dãy số (u_n) biết

$$(1) \quad u_n = \frac{-1}{2n+3}$$

$$(2) \quad u_n = \frac{n+5}{n+2}$$

Lời giải

$$(1) \quad u_n = \frac{-1}{2n+3}$$

Ta có $2n+3 \geq 5, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow 0 < \frac{1}{2n+3} \leq \frac{1}{5} \Rightarrow -\frac{1}{5} \leq \frac{-1}{2n+3} < 0 \Rightarrow -\frac{1}{5} \leq u_n < 0$

Suy ra dãy số (u_n) bị chặn

✓ **Giải nhanh:** dãy số (u_n) có u_n có bậc của tử thấp hơn bậc của mẫu nên bị chặn

$$(2) \quad u_n = \frac{4n+5}{n+1}$$

Ta có $u_n = \frac{4n+5}{n+1} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$

$$u_n = \frac{4n+5}{n+1} = \frac{4(n+1)+1}{n+1} = 4 + \frac{1}{n+1} \leq 4 + \frac{1}{2} = \frac{9}{2} \Rightarrow u_n \leq \frac{9}{2} \Rightarrow 0 < u_n \leq \frac{9}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Vậy dãy số (u_n) bị chặn

✓ **Giải nhanh:** dãy số (u_n) có u_n có bậc của tử bằng bậc của mẫu nên bị chặn



Ví dụ 2.2.

Xét tính bị chặn của các dãy số sau:

$$(1) \quad u_n = \frac{1}{2n^2 - 1}$$

$$(2) \quad u_n = 3 \cdot \cos \frac{n\pi}{3}$$

$$(3) \quad u_n = 2n^3 + 1$$

$$(4) \quad u_n = \frac{n^2 + 2n}{n^2 + n + 1}$$

Lời giải

$$(1) \quad u_n = \frac{1}{2n^2 - 1}$$



$u_n = \frac{1}{2n^2 - 1}$ Có $2n^2 - 1 \geq 1 \Rightarrow u_n = \frac{1}{2n^2 - 1} \leq 1, \forall n \geq 1$. Vậy dãy số bị chặn trên bởi 1.

(2) $u_n = 3 \cdot \cos \frac{n\pi}{3}$

$u_n = 3 \cdot \cos \frac{n\pi}{3}$ có $-1 \leq \cos \frac{n\pi}{3} \leq 1 \Rightarrow -3 \leq 3 \cdot \cos \frac{n\pi}{3} \leq 3$.

Vậy dãy số bị chặn dưới bởi -3 ; chặn trên bởi 3.

(3) $u_n = 2n^3 + 1$

$u_n = 2n^3 + 1$ có $2n^3 + 1 \geq 3, \forall n \geq 1$. Vậy dãy số bị chặn dưới bởi 3.

(4) $u_n = \frac{n^2 + 2n}{n^2 + n + 1}$

$u_n = \frac{n^2 + 2n}{n^2 + n + 1}$ có $u_n = \frac{n^2 + 2n}{n^2 + n + 1} = 1 + \frac{n-1}{n^2 + n + 1} \geq 1, \forall n \geq 1$.

Vậy dãy số bị chặn dưới bởi 1.



Ví dụ 3.3.

Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 0$ và $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 4, \forall n \geq 1$.

(1) Chứng minh dãy (u_n) bị chặn trên bởi số 8.

(2) Chứng minh dãy (u_n) tăng, từ đó suy ra dãy (u_n) bị chặn.

Lời giải

(1) Chứng minh dãy (u_n) bị chặn trên bởi số 8.

Ta chứng minh $u_n \leq 8$ với mọi $n \geq 1$.

Khi $n=1$, ta có $u_1 = 0 < 8$.

Giả sử $u_n \leq 8$ với $n=k \geq 1$, tức là $u_k \leq 8$. Ta cần chứng minh $u_{k+1} \leq 8$.

Thật vậy, $u_{k+1} = \frac{1}{2}u_k + 4 \leq \frac{1}{2} \cdot 8 + 4 = 8$.

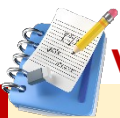
Vậy $u_n \leq 8$, với mọi $n \geq 1$ hay (u_n) bị chặn trên bởi 8.

(2) Chứng minh dãy (u_n) tăng, từ đó suy ra dãy (u_n) bị chặn.

Với mọi $n \geq 1$, ta có $u_{n+1} - u_n = 4 - \frac{1}{2}u_n$. Mà $u_n \leq 8$ nên $u_{n+1} - u_n \geq 0$.

Suy ra u_n là dãy số tăng. Do đó (u_n) bị chặn dưới bởi $u_1 = 0$.

Kết hợp với câu (1), ta được dãy số (u_n) bị chặn.



Ví dụ 3.4.

Cho dãy số (u_n) với $u_n = n^2 - 4n + 3$.

- (1) Viết công thức truy hồi của dãy số.
- (2) Chứng minh dãy số bị chặn dưới.
- (3) Tính tổng n số hạng đầu của dãy số đã cho.

Lời giải

- (1) Viết công thức truy hồi của dãy số.

Ta có: $u_1 = 1^2 - 4 \cdot 1 + 3 = 0$.

Xét hiệu: $u_{n+1} - u_n = [(n+1)^2 - 4(n+1) + 3] - (n^2 - 4n + 3) = 2n - 3 \Rightarrow u_{n+1} = u_n + 2n - 3$.

Vậy công thức truy hồi:
$$\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_{n+1} = u_n + 2n - 3 \end{cases} \quad \forall n \geq 1.$$

- (2) Chứng minh dãy số bị chặn dưới.

Ta có: $u_n = n^2 - 4n + 4 - 1 = (n-2)^2 - 1 \geq -1 \quad \forall n \geq 1$.

Vậy dãy số bị chặn dưới, nhưng không bị chặn trên.

- (3) Tính tổng n số hạng đầu của dãy số đã cho.

Ta có:

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= 1^2 - 4 \cdot 1 + 3 \\ u_2 &= 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 \\ u_3 &= 3^2 - 4 \cdot 3 + 3 \\ &\dots \\ u_n &= n^2 - 4n + 3 \end{aligned} \right\} +$$

$$S_n = (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) - 4(1 + 2 + 3 + \dots + n) + 3n$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{4n(n+1)}{2} + 3n$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1) - 12n(n+1) + 18n}{6}$$

$$= \frac{n(n+1)(2n-11) + 18n}{6}$$

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com
<https://www.vnteach.com>