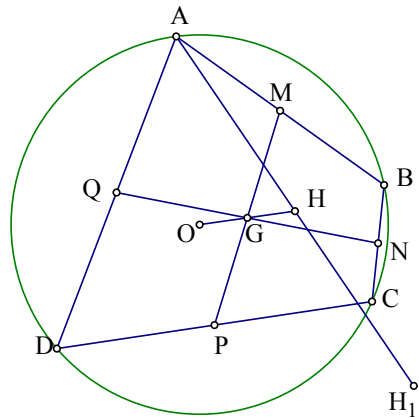


Câu 71. Giải:

Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA . Gọi G là giao điểm của MP, NQ thì G là trung điểm chung của cả hai đoạn đó. H đối xứng với O

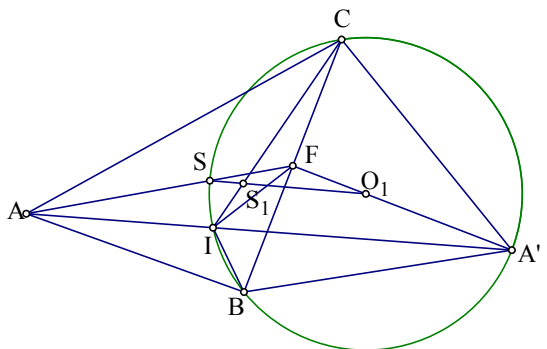


qua G , H_1' đối xứng với A qua H . Ta chứng minh $H_1' \circ H_1$. Thật vậy, ta có $MH \parallel BH_1'$ (MH là đường trung bình của tam giác ABH_1' ; $MH \parallel OP$ ($MOPH$ là hình bình hành); $OP \perp CD$ (đường kính đi qua trung điểm dây cung). Suy ra $BH_1' \perp CD$. Tương tự $DH_1' \perp BC$, suy ra H_1' là trực tâm của tam giác BCD do đó $H_1' \circ H$. Lấy O' đối xứng với O qua H , thì $AOH_1'O'$ là hình bình hành. Suy ra $O'H_1 = OA = R$ (bán kính của (O)). Tương tự $O'H_2 = O'H_3 = O'H_4 = R$. Vậy ta có đpcm.

Câu 72. Giải:

Ta sẽ chứng minh ba đường thẳng O-le đó cùng đi qua trọng tâm tam giác ABC .

Do tính tương tự, ta chỉ chứng minh cho tam giác BCI .



Về phía ngoài tam giác ABC , dựng tam giác $A'BC$ đều, nội tiếp trong đường tròn (O_1) . Tứ giác $IBA'C$ nội tiếp vì

$\angle BA'C + \angle BIC = 180^\circ$. Do $A'B = A'C$ nên IA' là phân giác $\angle CIB$, suy ra ba điểm A, I, A' thẳng hàng. Gọi F là trung điểm của BC , S và S_1 lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC và tam

giác IBC . Vì $\frac{FS}{FA} = \frac{FS_1}{FI} = \frac{FO_1}{FA'} = \frac{1}{3}$ nên ba

điểm S_1, O_1, S thẳng hàng. Mặt khác, O_1S_1 là đường thẳng Ơ-le của tam giác IBC , do đó đường thẳng Ơ-le của tam giác IBC đi qua trọng tâm tam giác ABC . Chứng minh hoàn toàn tương tự với các tam giác IAC, IAB . Ta có đpcm.

Câu 73. Giải:

Ta sử dụng bổ đề sau để chứng minh.

Bổ đề: cho tam giác nhọn ABC

có O là tâm đường tròn ngoại tiếp, H là trực tâm. Khi đó nếu

$AO = AH$ thì ta có $\angle BAC = 60^\circ$.

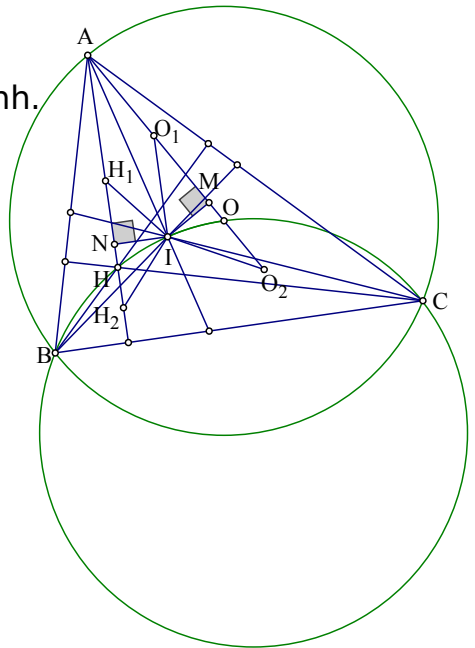
Trở lại bài toán: Giả sử bốn điểm

O, I, H, C cùng thuộc một đường

tròn. Vì CI là phân giác của $\angle HCO$

nên $IH = IO = r$.

Ta chứng minh: nếu $\angle BAC \neq 60^\circ$ thì bốn điểm O, I, H, A cùng thuộc một đường tròn.



Kí hiệu M, N lần lượt là hình chiếu của I trên OA và AH .

Lấy hai điểm O_1, O_2 nằm trên tia AO sao cho $IO_1 = IO_2 = t$ (O_1 nằm giữa A và M , M nằm giữa O_1 và O_2).

Lấy hai điểm H_1, H_2 nằm trên tia AH sao cho $IH_1 = IH_2 = t$ (H_1 nằm giữa A và N , N nằm giữa H_1 và H_2).

a) Nếu $O \circ O_1$ và $H \circ H_1$, hoặc $O \circ O_2$ và $H \circ H_2$. Khi đó $DAIO : DAIH$ suy ra $AO = AH$. Áp dụng bổ đề ta được $\angle BAC = 60^\circ$, trái với điều giả thiết.

b) Nếu $O \circ O_1$ và $H \circ H_2$ hoặc $O \circ O_2$ và $H \circ H_1$. Ta có $DIO_1O_2 = DIH_1H_2$ nên $\angle IO_1O_2 = \angle IH_2H_1$ và $\angle IO_2O_1 = \angle IH_1H_2$. Suy ra tứ giác $AOIH$ nội tiếp.

Giả sử A và B không nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác OIH . Khi đó $\angle BAC = \angle ABC = 60^\circ$ nên tam giác ABC đều, suy ra ba điểm O, I, H trùng nhau, vô lý. Vậy ta có đpcm.

Câu 74. Giải:

Gọi E là giao điểm của AH

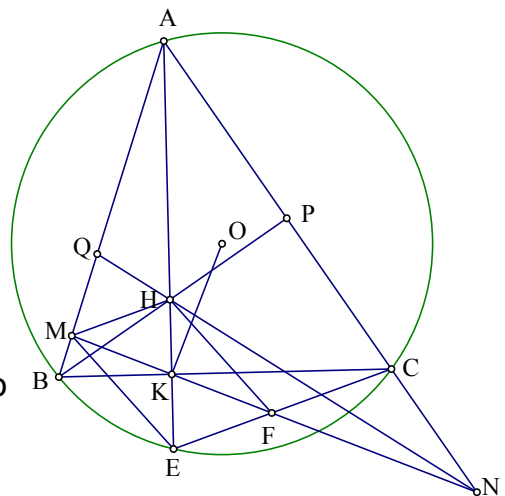
và (O) , (E khác A). Giao

điểm của MN và EC là F .

Tứ giác $ABEC$ nội tiếp đường

tròn (O) , có $OK \perp MK$ nên theo

“bài toán con bướm” ta có



$KM = KF$ (1). Mặt khác $\angle MAK = \angle BAE = \angle HCB$ và $HE \perp BK$ nên tam giác HCE cân tại C , suy ra $HK = KE$ (2). Từ (1) và

(2) ta có tứ giác $MHFE$ là hình bình hành, do đó $MH \parallel EF$.

Suy ra $\hat{MHK} = \hat{KEF} = \hat{ABC}$.

Chứng minh hoàn toàn tương tự ta cũng được $\hat{NHK} = \hat{ACB}$.

Ta có $\hat{QHP} = \hat{MHN} = \hat{ABC} + \hat{ACB} = 180^\circ - \hat{BAC}$. Suy ra tứ giác $AQPH$ nội tiếp được.

Câu 75. Giải:

Ta có $\hat{ARC} = \hat{APC} = \hat{ABC} = 180^\circ - \hat{AHC}$. Do đó tứ giác $AHCR$ nội tiếp. Suy ra $\hat{AHX} = \hat{ACR} = \hat{CAP}$.

Tương tự ta cũng có tứ giác

$AHBQ$ nội tiếp. Từ đó suy ra

$$\hat{XAH} = \hat{QBH} =$$

$$\hat{QBA} + \hat{ABH} = \hat{BAP} + \hat{ABH} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\hat{AHX} + \hat{XAH} =$

$\hat{CAP} + \hat{BAP} + \hat{ABH} = \hat{CAB} + \hat{ABH} = 90^\circ$. Do đó

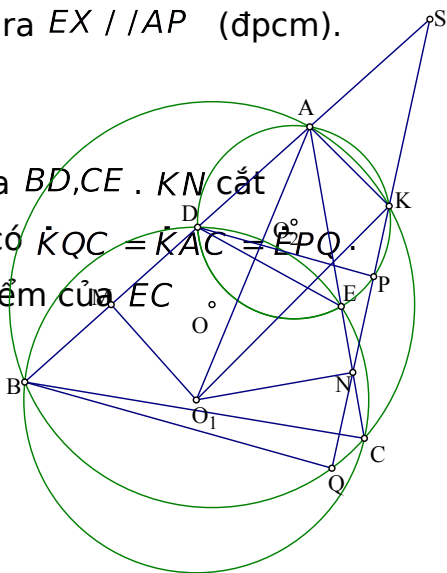
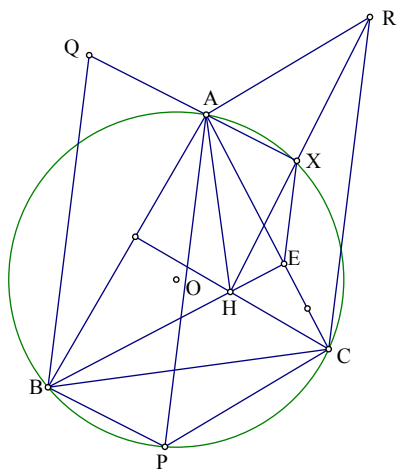
$\hat{AXH} = 90^\circ = \hat{AEH}$ hay tứ giác $AXEH$ nội tiếp được. Vậy

$\hat{XEA} = \hat{AHX} = \hat{CAP}$ (theo (1)). Suy ra $EX \parallel AP$ (đpcm).

Câu 76. Giải:

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BD, CE . KN cắt $AB, (O_2), (O)$ lần lượt tại S, P, Q . Ta có $\hat{KQC} = \hat{KAC} = \hat{EPQ}$. Suy ra $EP \parallel CQ$, mà N là trung điểm của EC nên N là trung điểm của PQ .

Ta thấy: $2SASM = SASD + SASB$;



$2SK \cdot SN = SK \cdot SP + SK \cdot SQ$ mà

$SA \cdot SD = SK \cdot SP$ (tứ giác $AKPD$

nội tiếp); $SA \cdot SB = SK \cdot SQ$ (tứ

giác $AKQB$ nội tiếp)

Þ $SA \cdot SM = SK \cdot SN$ Þ tứ giác $AKNM$

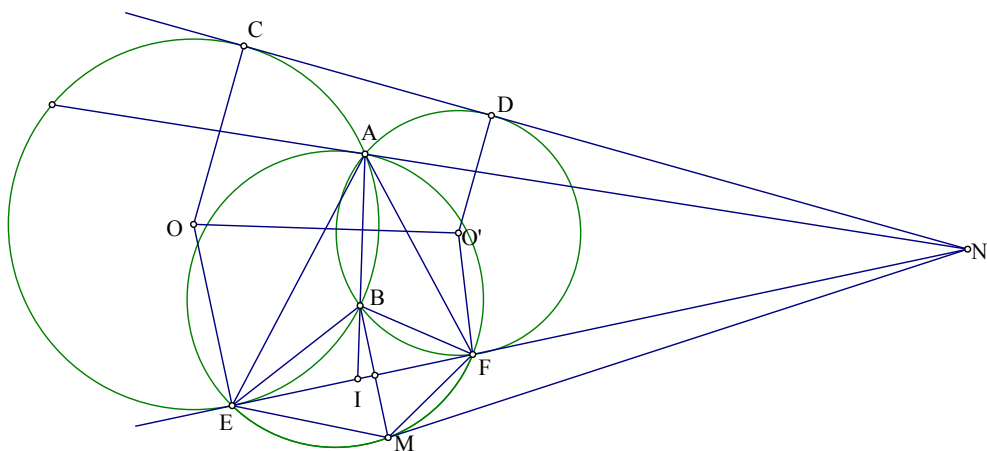
nội tiếp, hay K thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN .

Mặt khác tứ giác AMO_1N nội tiếp vì $\angle AMO_1 = \angle ANO_1 = 90^\circ$ hay

cũng có O_1 thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN . Suy

ra tứ giác $AKNO_1$ nội tiếp Þ $\angle KO_1N = \angle KNO_1 = 90^\circ$ (đpcm).

Câu 77.



Giải: Gọi M là điểm đối xứng của B qua EF . Ta có

$\angle EMF = \angle EBF$.

Mà $\angle BFA + \angle AFE = \angle BFA + \angle A_1 + \angle A_2 = \angle BFA + \angle E_1 + \angle F_1 = 180^\circ$ nên $\angle MFE + \angle AFE = 180^\circ$. Vậy tứ giác $MEAF$ nội tiếp đường tròn (j) . Gọi N là giao điểm của các tiếp

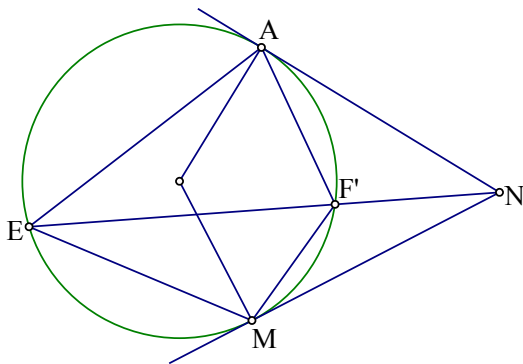
tuyến tại A và M của (j) ta

chứng minh ba điểm N, E, F

thẳng hàng. Thật vậy, gọi F'

là giao điểm thứ hai của NE

với (j) . Ta có $\angle NAE : \angle NFA$



(g.g). Suy ra $\frac{AE}{AF'} = \frac{NA}{NF'}$ (1). Tương tự $\frac{ME}{MF'} = \frac{NM}{NF'} = \frac{NA}{NF'}$

(2). Từ (1) và (2) ta có $\frac{AE}{AF'} = \frac{ME}{MF'}$ nên $\frac{AE}{ME} = \frac{AF'}{MF'}$ (*) Gọi I

là giao điểm của AB và EF . Ta có $IE^2 = IA \cdot IB = IF^2$ do đó $IE = IF$.

Mà $\angle IEB : \angle IAE$ (g.g) nên

$\frac{EB}{AE} = \frac{IF}{IA} = \frac{IE}{IA}$. Tương tự $\frac{BF}{AF} = \frac{IF}{IA}$. Suy ra $\frac{EB}{AE} = \frac{BF}{AF}$. Do vậy

$\frac{ME}{AE} = \frac{MF}{AF}$ hay $\frac{AE}{ME} = \frac{AF}{MF}$ (**). Từ (*) và (**) ta có

$\frac{AF'}{MF'} = \frac{AF}{MF}$ suy ra $F \equiv F'$. Vậy ba điểm N, E, F thẳng hàng.

Ta có N thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác ABF . Do vậy N thuộc trung trực AB , suy ra N thuộc đường thẳng OO' .

Tương tự D_2 và CD cắt nhau tại một điểm N' thuộc OO' . Do tính chất đối xứng, CD và EF cắt nhau tại một điểm thuộc OO' do đó $N \equiv N'$. Vậy các đường thẳng CD, EF, D_1, D_2

đồng quy tại N . (đpcm).

Câu 78. Giải(Bạn đọc có thể xem thêm phần"Các định lý hình học nổi tiếng"Nội dung định lý Lyness

Qua M kẻ tiếp tuyến chung của (O') và (O) .

Ta có $N_1 = \dot{N}MX$ và $B_1 = \dot{M}_1$

do đó $\dot{NMD} = \dot{NMB}$.

Vậy MN là phân giác góc $\widehat{DMB}$.

Gọi Q là giao điểm thứ hai của

MN và (O) . Ta có Q là điểm

chính giữa của cung BD do đó

CQ là phân giác góc $\widehat{DCB}$. Gọi I là giao điểm của CQ và NP .

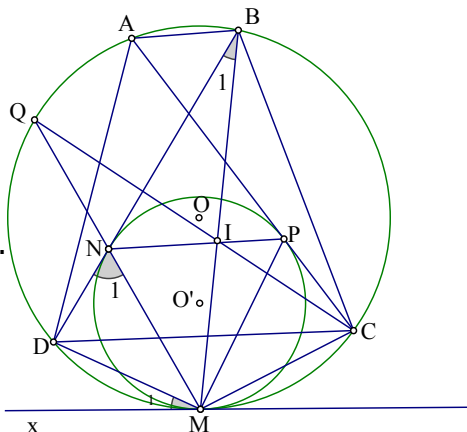
$$\text{Ta có } iCM = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{e}} \left(\frac{1}{D} \right) + s \frac{1}{D} \frac{\partial}{\partial \mathbf{e}} \ddot{\mathbf{e}} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{e}} \left(\frac{1}{D} \right) + s \frac{1}{D} \frac{\partial}{\partial \mathbf{e}} \ddot{\mathbf{e}} = \mathbf{N}_1 = iPM.$$

Suy ra tứ giác $IPCM$ nội tiếp. Do đó

$\dot{Q}MB = \dot{N}PA = \dot{I}MC \vdash DQIM : DQNI \vdash QI^2 = QN.QM$. Mà

$$\dot{Q}MD = \dot{Q}DN \vdash DDQN : DMQD \vdash QD^2 = QN.QM \vdash QD = QI .$$

Do đó I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác BCD . Tương tự tâm đường tròn nội tiếp tam giác ACD nằm trên NP .



Câu 79. Giải:

Gọi A' là giao điểm thứ hai của AI với (O) . Theo câu 78 ta có tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC nằm trên IM (xét với (O_1) và IN (xét với (O_2)). Suy ra tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC . (đpcm).

Câu 80. Giải:

Ta có $\hat{BMC} = 90^\circ + \frac{1}{2}\hat{A} = 180^\circ - \hat{B}$

và $\hat{ZMY} = 180^\circ - \hat{B}$

(vì tứ giác $MZCY$ nội tiếp)

Do đó $\hat{BMZ} = \hat{YMC}$ nên

$\hat{XBM} = \hat{YNC}$. Suy ra $DBXM : DMYC$

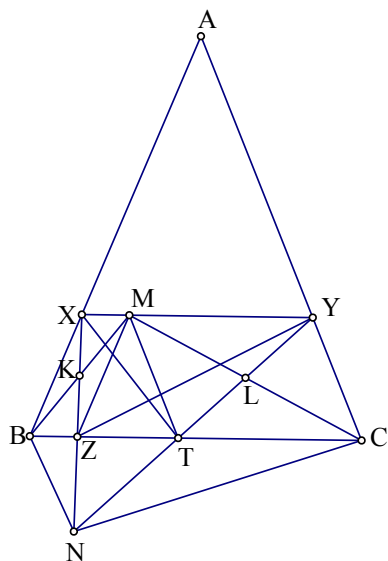
do đó $DKXB : DLYM$

↳ $\hat{BXK} = \hat{LYM} = \hat{YTC} = \hat{BTN}$. Vậy tứ giác $BXTN$ nội tiếp.

Tương tự ta cũng có tứ giác $YCNZ$ nội tiếp. Mặt khác

$\hat{BNX} = \hat{BTX} = \hat{BMX}$ suy ra $\hat{YNC} = \hat{YNT} = \hat{YMC}$ và $\hat{XNY} = \hat{B}$. Từ đó

$\hat{BNC} = \hat{BMX} + \hat{YMC} + \hat{B} = \hat{BMX} + \hat{XBM} + \hat{B} = 2\hat{B} = \hat{B} + \hat{C}$ do đó $\hat{BNC} + \hat{BAC} = \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$. Suy ra tứ giác $ABNC$ nội tiếp.



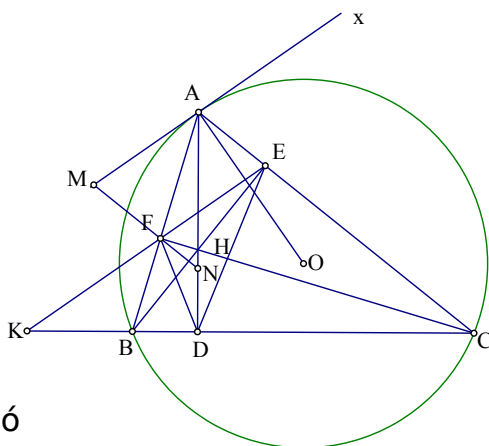
Câu 81. Giải:

a) $DABE : DACF$ (g.g)

↳ $\frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AF}$ ↳ $AE \cdot AC = AF \cdot AB$.

b). Ta có $\hat{BFH} + \hat{BDH} = 180^\circ$ ↳

Tứ giác $BFHD$ nội tiếp (tứ giác có hai góc đối bù nhau).



Ta có $\angle ADB = \angle AEB (= 90^\circ) \Rightarrow$ Tứ giác $ABDE$ nội tiếp (tứ giác có hai đỉnh D, E cùng nhìn AB dưới một góc vuông).

c). Ta có $\angle BFC = \angle BEC (= 90^\circ) \Rightarrow$ Tứ giác $BFEC$ nội tiếp (tứ giác có hai đỉnh F, E cùng nhìn BC dưới một góc vuông)
 $\Rightarrow \angle AEF = \angle ABC$. Mà $\angle FAC = \angle ABC$ (hệ quả). Do đó $\angle FAC = \angle AEF$ (hai góc ở vị trí so le trong) nên $AF \parallel EF$. Lại có $OA \perp AF$. Do đó $OA \perp EF$.

d). Gọi I là giao điểm của AD và EF . Ta có
 $\angle ADE = \angle ABE = \angle FDH \Rightarrow DI$ là tia phân giác $\angle EDF$. Mà $AD \perp BC$ nên có DK là đường phân giác ngoài của $\triangle DEF$. Xét $\triangle DEF$ có $\frac{KF}{KE} = \frac{IF}{IE}$ (1). Áp dụng hệ quả Talet vào các tam giác:

$\triangle AIE$ có $FN \parallel AE : \frac{NF}{AE} = \frac{IF}{IE}$ (2); $\triangle KAE$ có

$MF \parallel AE : \frac{KF}{KE} = \frac{MF}{AE}$ (3). Từ (1), (2), (3) cho

$$\frac{NF}{AE} = \frac{MF}{AE} \Rightarrow NF = MF.$$

Câu 82. Giải:

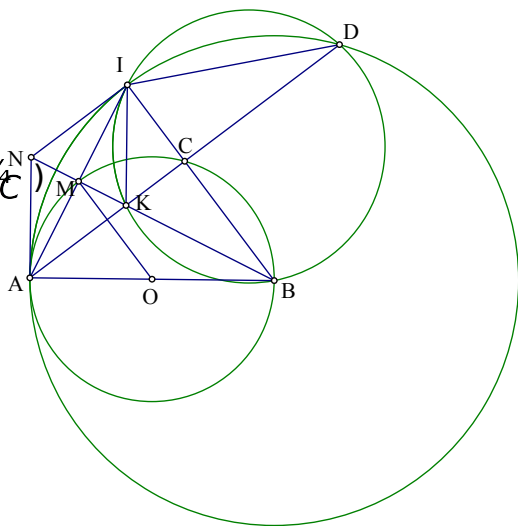
a). Ta có $\frac{1}{AM} = \frac{1}{MC}$

(M là điểm chính giữa của AC)

$\Rightarrow \angle BAM = \angle CBM$ (hệ quả góc

nội tiếp). $\angle AMB = \angle CMB = 90^\circ$

(góc nội tiếp chắn nửa đường



tròn) $\hat{P} BM \wedge AI, AC \wedge BI$.

$DABI$ có BM vừa là đường cao ($BM \wedge AI$) vừa là đường phân giác ($\angle ABM = \angle IBM$). Do đó tam giác ABI cân tại B .

b) Ta có $\angle KMI = 90^\circ (BM \wedge AI)$; $\angle KCI = 90^\circ (AC \wedge BI)$

$\hat{P} \angle KMI + \angle KCI = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$. Vậy tứ giác $MICK$ nội tiếp.

c) Xét $DABN$ và $DIBN$ có $AB = BI$ ($DABI$ cân tại B), $\angle ABN = \angle IBN$ (chứng minh trên), BN cạnh chung. Do đó $DABN = DIBN$ (c.g.c) $\hat{P} \angle NAB = \angle NIB$. Mà $\angle NAB = 90^\circ$ nên $\angle NIB = 90^\circ \hat{P} NI \wedge BI$. Mà I thuộc đường tròn (B, BA) (vì $BI = BA$). Vậy NI là tiếp tuyến của đường tròn (B, BA) .

+ Xét $DABC$ có M là trung điểm của AI , $DABI$ cân tại B , BM là đường cao, O là trung điểm của $AB \hat{P} MO$ là đường trung bình của tam giác $ABI \hat{P} MO \parallel BI$. Mà $NI \wedge BI$ (chứng minh trên). Vậy $NI \wedge MO$.

d) Ta có $\angle IKD = \angle IBM$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung IK

của đường tròn (IBK)). Mà $\angle IDA = \frac{1}{2} \angle IBA = \angle IBM$ ($\angle IDA$ và $\angle IBA$ là góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn cung AI của đường tròn (B, BA) , BN là tia phân giác của $\angle IBA$). Do đó $\angle IDK = \angle IDA \hat{P}$ hai tia DK, DA trùng nhau.

$\hat{P} D, K, A$ thẳng hàng. Mà C, K, A thẳng hàng nên D, K, A, C thẳng hàng. Vậy ba điểm A, C, D thẳng hàng.

Câu 83. Giải: a) Ta có $\angle ICD = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O)). Tứ giác $IHDC$ có $\angle IHD = \angle ICD = 90^\circ$. Do đó tứ giác $IHDC$ nội tiếp đường tròn tâm $M \hat{P} \angle IMH = 2\angle ICH$ và

a) AM, AN là các tiếp tuyến của đường tròn (O) (gt)

b. $\angle MO = \angle NO = 90^\circ$. Tứ giác $AMON$ có

$\widehat{AMO} + \widehat{ANO} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ $\Rightarrow$ Tứ giác $AMON$ nội tiếp đường tròn đường kính OA .

b) I là trung điểm của BC (gt) $\Rightarrow OI \perp BC, \angle IO = 90^\circ \Rightarrow I$ thuộc đường tròn đường kính OA . Ta có $AM = AN$ (AM, AN là các tiếp tuyến của (O)).

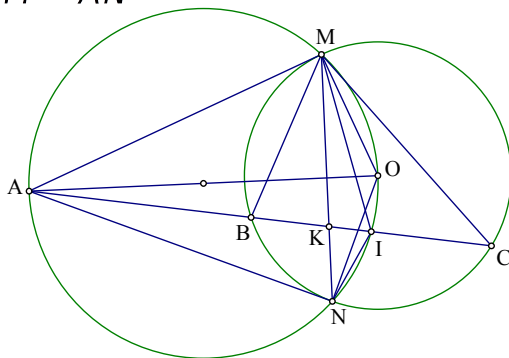
+ Xét đường tròn $(AMON)$ có $AM = AN$

$$\rho \dot{A}M = \dot{A}N \text{ et } \dot{A}IM = \dot{A}MK.$$

Xét DAIM và DAMK có j_{AM}

(chung), $\dot{A}IM = \dot{A}MK$.

Do đó $DAIM : DAMK$ (g.g)


$$\text{p } \frac{AI}{AM} = \frac{AM}{AK} \text{ p } AK \cdot AI = AM^2.$$

Xét DAMB và DACM có $\dot{M}_{AB}$ (chung), $\ddot{A}_{MB} = \ddot{A}_{CM}$ (hệ quả góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung). Do đó

DAMB : DACM (g.g) $\Rightarrow \frac{AM}{AC} = \frac{AB}{AM} \Rightarrow AB.AC = AM^2$. Vậy

$$AK \perp AI = AB \perp AC (= AM^2).$$

c) Ta có $\angle IO = 90^\circ$; O, A cố định. vậy I thuộc đường tròn đường kính OA . Khi $B \in M$ thì $I \in M$; khi $B \in N$ thì $I \in N$. Do vậy khi cát tuyến ABC thay đổi thì I chuyển động trên cung tròn MON của đường tròn đường kính OA .

d) Xét đường tròn đường kính OA có $\widehat{AM} = \widehat{AN}$ p $\widehat{MIK} = \widehat{NIK}$

$\triangle IMN$ có IK là đường phân giác $\Rightarrow \frac{IM}{IN} = \frac{MK}{NK}$. Do đó

$$IM = 2IN \Leftrightarrow \frac{IM}{IN} = 2 \Leftrightarrow \frac{MK}{NK} = 2 \Leftrightarrow MK = 2NK \Leftrightarrow MK = \frac{2}{3}MN.$$

Vậy khi cát tuyến ABC cắt đoạn thẳng MN tại điểm K sao cho $MK = \frac{2}{3}MN$ thì $IM = 2IN$.

Câu 85. Giải:

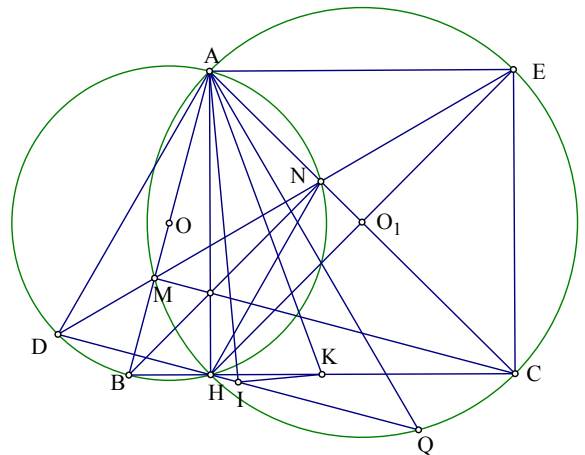
a) Ta có $\angle AHB = 90^\circ (AH \perp BC)$. Do đó H thuộc đường tròn (O) . H và E đối xứng qua AC (gt) và $N \in AC$.

Do đó $\angle HAN = \angle EAN$

(tính chất đối xứng trục)

Mà $\angle HAN = \angle ADN \Leftrightarrow \frac{1}{2} \angle HAN = \frac{1}{2} \angle ADN$

Do đó $\angle EAN = \angle ADN \Rightarrow \triangle ADE$ cân tại A . Vậy $AD = AE$.



b) $\angle ADB = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn

nửa đường tròn), $AH = AE$ (tính chất đối xứng trục) và $AD = AE$ nên $AD = AH$.

+ Xét $\triangle ADB$ ($\angle ADB = 90^\circ$) và $\triangle AHB$ ($\angle AHB = 90^\circ$) có $AD = AH$, AB (cạnh chung). Do đó $\triangle ADB = \triangle AHB$ (cạnh huyền- cạnh góc vuông) $\Rightarrow \angle DAB = \angle HAB$.

+ Xét $\triangle ADM$ và $\triangle AHM$ có $AD = AH$, $\angle DAM = \angle HAM$, AM (cạnh

chung). Do đó $\widehat{DADM} = \widehat{DAHM}$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{ADM} = \widehat{AHM}$. Ta có $\widehat{AHM} = \widehat{AHN}$ ($= \widehat{ADM}$). Vậy HA là tia phân giác của $\widehat{MHN}$.

c) H và E đối xứng qua AC (gt) $\Rightarrow \widehat{AHC} = \widehat{AEC}$ (tính chất đối xứng trục). Mà $\widehat{AHC} = 90^\circ$ ($AH \perp BC$) nên $\widehat{AEC} = 90^\circ$. Tứ giác $AHCE$ có $\widehat{AHC} + \widehat{AEC} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ nên tứ giác $AHCE$ nội tiếp $\Rightarrow A, H, C, E$ cùng thuộc một đường tròn.

Mặt khác $\widehat{AHM} = \widehat{AEM}$ ($= \widehat{ADM}$) $\Rightarrow$ tứ giác $AEHM$ nội tiếp $\Rightarrow A, E, H, M$ cùng thuộc một đường tròn (2). Từ (1) và (2) ta có năm điểm A, E, C, H, M cùng thuộc một đường tròn.

Ta có $\widehat{ANB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

$\widehat{AMC} = \widehat{AHC} = 90^\circ$ (A, E, C, H, M cùng thuộc một đường tròn)

$\triangle ABC$ có CM, BN, AH là ba đường cao (

$\widehat{AMC} = 90^\circ, \widehat{ANB} = 90^\circ, AH \perp BC$). Do đó ba đường thẳng CM, BN, AH đồng quy.

d) Xét $\triangle ADQ$ và $\triangle ABC$ có $\widehat{ADQ} = \widehat{ABC}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung $\widehat{AH}$ của (O)); $\widehat{AQD} = \widehat{ACB}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{AH}$ của (O_1)). Do đó $\triangle ADQ \sim \triangle ABC$ (g.g)

$\Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{DQ}{BC}$. Mà $DI = \frac{DQ}{2}$ (I là trung điểm của DQ),

$BK = \frac{BC}{2}$ (K là trung điểm của BC) nên $\frac{DI}{BK} = \frac{DQ}{BC}$

+ Xét $\triangle ADI$ và $\triangle ABK$ có $\widehat{ADI} = \widehat{ABK}$, $\frac{AD}{AB} = \frac{DI}{BK} \Rightarrow \frac{DQ}{BC} = \frac{DQ}{BC}$

+ Do đó $\triangle ADI \sim \triangle ABK$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{AID} = \widehat{AKB} \Rightarrow$ Tứ giác $AHKI$ nội tiếp. Vậy I thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác AHK .

Câu 86). Giải:

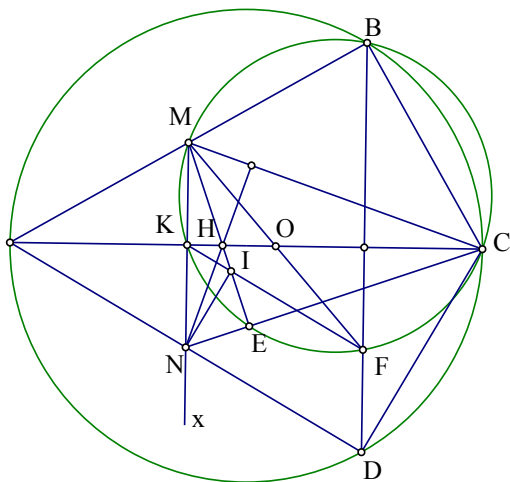
a). Ta có $\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn). Xét $\triangle ABC$ ($\angle ABC = 90^\circ$) và $\triangle ADC$ ($\angle ADC = 90^\circ$) có AC (cạnh chung), $AB = AD$ ($\triangle ABD$ đều) Do đó $\triangle ABC = \triangle ADC$ (cạnh huyền - cạnh góc vuông) $\Rightarrow \angle BAC = \angle DAC = 30^\circ$
 $CD = BC = AC \cdot \sin BAC = 2a \sin 30^\circ = a$;

$$BD = AD = AB = AC \cdot \cos BAC = \sqrt{3}a, DN = \frac{AD}{2} = \frac{\sqrt{3}a}{2}, \angle DNC$$

vuông tại D $\Rightarrow CN^2 = DN^2 + CD^2, CN^2 = \frac{3a^2}{4} + a^2 = \frac{7a^2}{4}$ nên

$$CN = \frac{\sqrt{7}a}{2}.$$

b) $\triangle ABD$ đều có AC là đường phân giác nên là đường cao, đường trung tuyến. M, N lần lượt là trung điểm AB, AD $\Rightarrow MN$ là đường trung bình của tam giác ABD $\Rightarrow MN \parallel BD$. Ta có



$$AC \perp BD, MN \parallel BD$$

$\Rightarrow MN \perp AC \Rightarrow \angle MKC = 90^\circ, \angle MBC = 90^\circ, \angle MKC = 90^\circ, \angle MEC = 90^\circ$ (H là trực tâm của $\triangle CMN$). Do đó B, M, K, E, C cùng thuộc một đường tròn (Γ) đường kính MC. Ta có $\angle FCB = \angle CAB$ (xét (Γ)), $\angle FCB = \angle ADB$ (xét (O)) $\Rightarrow \angle FCB = \angle ADB \Rightarrow KF \parallel AD$. Tứ giác KFDN có $KF \parallel ND$ và $KN \parallel FD$ nên là hình bình hành

▷ $DF = KN$. $\triangle DAMN$ có $AM = AN$ và $\angle DAM = \angle DAN$ nên AK là đường phân giác nên cũng là đường cao, đường trung tuyến

▷ $KN = \frac{MN}{2} = \frac{BD}{4} = \frac{\sqrt{3}a}{4}$. Vậy $DF = \frac{\sqrt{3}a}{4}$.

c) $\triangle DCMN$ có CK là đường cao, đường trung tuyến ▷ $\triangle DCMN$ cân tại C .

Do đó CK là tia phân giác $\angle MCE$ ▷ $\angle MCK = \angle KCE$. Xét đường tròn (T) có $\angle MCK = \angle KCE$ ▷ $\angle MK = \angle KE$ ▷ $\angle KME = \angle MFI$. Vẽ Mx là tiếp tuyến của đường tròn (MIF) có $\angle xME = \angle MFI$. Ta có $\angle KME = \angle xME$ ▷ Hai tia MK, Mx trùng nhau. Vậy KM tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác MIF . $DKMI$: $DKFM$

(g.g) ▷ $\frac{KM}{KF} = \frac{KI}{KM}$, mà $KM = KN$ nên $\frac{KN}{KF} = \frac{KI}{KN}$. Ta có

$NF \parallel FM, KN \perp AC$ ▷ $KN \perp NF$ ▷ $\angle KNF = 90^\circ$, $DKIN$: $DKNF$

($\frac{KI}{KN} = \frac{KN}{KF}$, $\angle IKN$ chung) ▷ $\angle KIN = \angle KNF = 90^\circ$. mà $KF \parallel AD$.

Vậy $\angle IND = 90^\circ$.

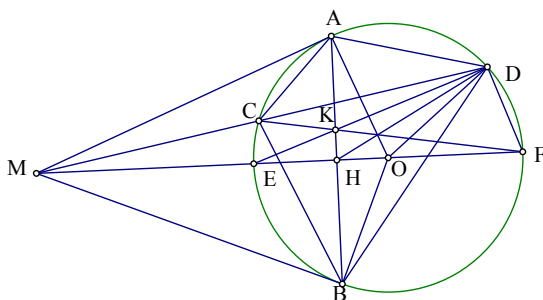
Câu 87. Giải:

a) $\triangle DMAC$: $\triangle DMDA$

b) $\triangle DMHC$: $\triangle DMDO$ (c.g.c)

$\angle MCH = \angle DOH, \angle MHC = \angle DHO$

c) $\angle CAD = \frac{\angle COD}{2} = \frac{\angle CHD}{2} = \angle BHD$.



d) DE cắt CF tại K .

$$\hat{OHD} = \hat{OCD} = \frac{180^\circ - \hat{COD}}{2} = \frac{180^\circ - \widehat{CED}}{2} = \frac{\widehat{CE} - \widehat{DE}}{2} = \hat{DKF}$$

Þ tứ giác $DKHF$, $\hat{KHF} = 180^\circ - \hat{KDF} = 90^\circ$ Þ $KH \perp MO$ tại H .
Mà $AB \perp MO$ tại H . Nên KH, AB trùng nhau.

Câu 88. Giải:

Vẽ $OH \perp MF$ tại H . Tứ giác $OB DH$ nội tiếp, A, B, H, O, C cùng thuộc một đường tròn.

$$\hat{AHB} = \hat{AOB} = \hat{BDS} \text{ Þ}$$

Tứ giác $BDFH$ nội tiếp

$$\text{Þ } \hat{BDH} = \hat{BFH}$$

$$\hat{ABM} = \hat{BDH} (= \hat{BFH})$$

$$\text{Þ } BM \parallel DH, DH \parallel GM$$

(DH là đường trung bình của tam giác MGF).

M, B, G thẳng hàng. Tương tự M, C, L thẳng hàng $BC \parallel GL$.

Trên nửa mặt phẳng bờ BM có chứa F vẽ tia Mx là tia

tiếp tuyến của đường tròn (O) , $\hat{xMB} = \hat{MCD} = \hat{MLG}$

Þ Mx là tia tiếp tuyến của đường tròn (MGL) .

Vậy hai đường tròn (O) và (MGL) tiếp xúc nhau.

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

<https://www.vnteach.com>

