Lời giải đề thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên Toán,

năm học 2023-2024

Phạm Văn Ninh, Nguyễn Việt Dũng

Giáo viên trường THPT Chuyên Hạ Long

Ngày 3 tháng 6 năm 2023

  **I :Đề bài**

**Bài 1:** Cho biểu thức:

 $P=\left(\frac{5+4\sqrt{x}}{2x+5\sqrt{x}-12}-\frac{2}{2\sqrt{x}+3}+\frac{3}{\sqrt{x}+4}\right)$

 **(a)** Rút gọn biểu thức P

 **(b)** Tính GTLN của biểu thức P.

**Bài 2:**

 **1.** Giải phương trình $x^{2}+x-16=3(x-2)\sqrt{x+1}$

 **2.** Giải hệ phương trình:

 $\left\{\begin{matrix}x^{2}-2x-xy+y+1=0 (1)\\x^{2}+3x-\sqrt{y^{2}+5x-1}-2=0 (2)\end{matrix}\right.$

**Bài 3:**

 **(a)** Cho x,y là các số nguyên dương thoả mãn $x^{2}-y và x^{2}+y $đều là các số chính phương. Chứng minh y chẵn.

 **(b)** Tìm tất cả các số nguyên dương a, b thoả mãn

 $a^{3}-2(a+b)^{2}= b^{3}+19$ (4)

**Bài 4:** Cho tam giác ABC (AB < AC) nội tiếp (O). Hai đường cao BD, CE của tam giác ABC cắt nhau tại H. Tia phân giác $\hat{BAC}$ các BD và (O) lần lượt tại M và

I ( I $\ne $ A) , Đường thẳng BD cắt đường tròn (O) tại K ( K $\ne $ B) . Hai đường thẳng AC và I cắt nhau tại Q, hai đường thẳng QH và AB cắt nhau tại P. Chứng minh:

 **(a)** AMQK nội tiếp.

 **(b)** $∆ $APQ cân tại A.

 **(c)** $\frac{1}{BC}+\frac{1}{DE}=\frac{1}{MQ}$

**Bài 5:** Trên bảng gồm 2023 số nguyên phân biệt, mỗi số đều có dạng $a^{2}+b^{2 }$trong đó a,b nguyên. Mỗi lần ta thực hiện 1 phép biến đổi sau: Xoá hai số tuỳ ý rồi viết thêm một số bằng tích của hai số vừa xoá. Hỏi sau một số lần biến đổi trên bảng có số bằng $26.3^{2023}$ được không ? Giải thích tại sao ?

**II: Lời giải :**

**Bài 1:**

 **a)** Ta có:

 $P=\left(\frac{5+4\sqrt{x}}{2x+5\sqrt{x}-12}-\frac{2}{2\sqrt{x}+3}+\frac{3}{\sqrt{x}+4}\right):\left(\sqrt{x}+\frac{5-6\sqrt{x}}{\sqrt{x}+4}\right)$

 $=\left(\frac{5+4\sqrt{x}}{(2\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+4)}-\frac{2}{2\sqrt{x}+3}+\frac{3}{\sqrt{x}+4}\right):\frac{x-2\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}+4}$

 $=\frac{5+4\sqrt{x}-2\left(\sqrt{x}+4\right)+3(2\sqrt{x}-3)}{(2\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+4)}.\frac{\sqrt{x}+4}{x-2\sqrt{x}+5}$

 $=\frac{4}{x-2\sqrt{x}+5}$

 Vậy nên $P =\frac{4}{x-2\sqrt{x}+5}$

 **b)** Ta có:

 $x-2\sqrt{x}+5=\left(\sqrt{x}-1\right)^{2}+4\geq 4$

 $⟹P\leq \frac{4}{4}=1$

 Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=1$

 Vậy nên giá trị lớn nhất của$P là 1$, đạt được tại $x=1$

**Bài 2:**

 **1.** DKXD: $x\geq -1$

 Ta có :

 $x^{2}+x-16=3\left(x-2\right)\sqrt{x+1} $

 $⟺\left(x-2\right)\left(x+3\right)=3(x-2)\sqrt{x+1}$

 $⟺\left(x-2\right)\left(x+3-3\sqrt{x+1}\right)=0$

 $⟺\left[\begin{matrix}x=2\\x+3=3\sqrt{x+1}\end{matrix}\right.$

 Giải phương trình:

 $x+3=3\sqrt{x+1}⟺(x+3)^{2}=9(x+1)$

 $⟺x^{2}-3x=0$

 $⟺x\left(x-3\right)=0$

 $⟺\left[\begin{matrix}x=0\\x=3\end{matrix}\right.$

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là S = {0; 3; 2}

 **2.** DKXD: $y^{2}+5x-1\geq 0$

 Ta có biến đổi ở phương trình (1):

$$x^{2}-2x-xy+y+1=0 $$

 $⟺\left(x-1\right)^{2}-y\left(x-1\right)=0$

 $⟺\left(x-1\right)\left(x-1-y\right)=0$

 Ta có hai trường hợp:

 **(a)** x = 1 .

 Thay vào (2) ta có :

 $2-\sqrt{y^{2}+4}=0⟺y=0 $( hoả mãn DKXD)

 **(b)** $x-1-y=0⟺y=x-1$

 Thay vào (2) ta có:

 $x^{2}+3x-2-\sqrt{x^{2}+3x}=0$

 Đặt $t=\sqrt{x^{2}+3x}⟹t\geq 0$

 Khi đó phương trình (3) trở thành:

 $t^{2}-2-t=0⟺\left[\begin{matrix}t=-1\\t=2\end{matrix}\right.$

 Kết hợp với điều kiện $t\geq 0$ ta có :

 $t=2⟹x^{2}+3x=4⟺\left[\begin{matrix}x=1\\x=-4\end{matrix}\right.$

 Nếu $x=1$ thì $y=x-1$ (thoả mãn DKXD).

 Nếu $x=-4$ thì $y=x-1=-5$ (thoả mãn DKXD )

 Vậy nên tất cả nghiệm của hệ phương trình đã cho là $\left(x;y\right)=\left(1;0\right);(-4;-5)$

**Bài 3:**

 **(a)** Theo điều kiện đề bài, tồn tại các số nguyên A, B sao cho :

 $\left\{\begin{matrix}x^{2}-y=A^{2}\\x^{2}+y=B^{2}\end{matrix}\right.$

 Suy ra $B^{2}-A^{2}=2y $ và ta có A, B cung tính chẵn lẻ.

 Xét hai trường hợp:

 **(a)** A, B cùng chẵn.

 Khi đó $A^{2},B^{2}$ cùng chia hết cho 4 và do đó nên $2y=B^{2}-A^{2} $ chia hết cho 4. Do đó nên y chẵn.

 **(b)** A. B cùng lẻ.

 Khi đó $A^{2}≡B^{2}≡1$ (mod 4) và do đó nên $2y=B^{2}-A^{2}$ chia hết cho 4. Do đó nên ý chẵn.

 Như vậy ta luôn có y chẵn.

  **(b)** Đặt $u=a+b,v=a-b$

 Khi đó $2a=u+v,2b=u-v và $ phương trình (4) trở thành:

 Từ (5) ta có :

 $\left(v^{3}-4.19\right)\left(8-3v\right)\geq 0$

 Nhận thấy rằng nếu v $\geq $ 5 thì $8-3v<0, v^{3}-4.19>0$

 Do đó nên $\left(8-3v\right)\left(v^{3}-4.19\right)<0 $và ta có điều vô lý.

 Còn nếu $v\leq 2 $ thì ta có $8-3v>0, v^{3}-4.19<0$

 Do đó nên $\left(8-3v\right)\left(v^{3}-4.19\right)<0 $ và ta có điều vô lý.

 Suy ra $v\in ${3; 4} .

 Nếu v = 3 thì thay vào (5) ta có :

 $u^{2}=49⟹u=7$

 Khi đó a = 5 b = 2

 Nếu v = 4 thì thay vào (5) ta có :

 $u^{2}=49⟹ $không tồn tại u thoả mãn

 Vậy nên (a, b) = (5, 2) là tất cả các cặp số thoả mãn đề bài.

**Bài 4:**

****

 **(a)** Ta có:

 $\hat{MKQ}=\hat{IKB}=\hat{IAC}=\hat{MAQ}$

 Do đó nên AMOK nội tiếp.

 **(b)** Theo tính chất quen thuộc AC là đường trung trực của HK.

 $⟹ ∆$ HQK căn tại Q và QD là phân giác $\hat{}HQK$

 $⟹ \hat{AQK}=\hat{AQH}$

 Mà $\hat{AQK}=\hat{AMK}$ do AMOK nội tiếp.

 $⟹ \hat{AQH}=\hat{AMK} (1)$

 Ta có $∆$ QHK cận tại Q nên

 $\hat{QHK}=\hat{QKH}=\hat{BKI}=\hat{BAI}$

 Suy ra $\hat{QHK}=\hat{PAM}$ và do đó nên APH M nội tiếp.

 $⟹ \hat{AMK}=\hat{APH} (2)$

 Từ (1) và (2) ta có :

 $\hat{APH}=\hat{AQH}$

 Suy ra tam giác APC cân tại A.

**(c) Cách 1: (Cách của thầy Phạm Văn Ninh)**

 Đẳng thức cầu chứng minh tương đương với:

 $\frac{MQ}{BC}+\frac{MQ}{DE}=1$

 Do AMQK nội tiếp nên

 $\hat{AQM}=\hat{AKM}=\hat{ACB}⟹\hat{AQM}=\hat{ACB}$

 $⟹MQ∕∕DE$

 $⟹\frac{MQ}{BC}=\frac{DM}{DB}=\frac{DQ}{DC}$

 Theo phần (b), tam giác APQ cầu tại A và do AI là phần giác $\hat{PAQ }$nên

AI là trung trực PG.

 $⟹$ MQ = MP

 Ta có :

 $\hat{APM}=\hat{AQM}=\hat{AKM}=\hat{AKB}=\hat{ACB}=\hat{AED}$

 $⟹\hat{APM}=\hat{AED}$

 $⟹$PM ||DE

 Áp dụng định lý Thales cho PM || DE ta có :

 $\frac{MQ}{DE}=\frac{MP}{DE}=\frac{BM}{DB}$

 $⟹\frac{MQ}{BC}+\frac{MQ}{DE}=\frac{DM}{BD}+\frac{BM}{BD}=1$

**Cách 2: (Cách của Nguyễn Việt Dũng)**

 Lập luận tương tự cách 1 ta cũng có được MP = MQ và PM || DE.

 Áp dụng định lý Thales cho PM || DE ta có:

 $\frac{DE}{MQ}=\frac{DE}{PM}=\frac{BD}{AD}$

 Sử dụng tính chất của dương phân giác ta có :

 $\frac{MB}{MD}=\frac{AB}{AD}$

 Ta có: $\hat{BDC}=\hat{BEC}=90°$ nên BEDC nội tiếp và ta có:

 $\hat{ADE}=\hat{ABC}$

 Suy ra $∆ ADE \~ ∆ ABC (G.G)$ và ta có :

 $\frac{AB}{AD}=\frac{BC}{DE}$

 Suy ra :

 $\frac{MB}{MD}=\frac{BC}{DE}$

 Ta có :

 $\frac{DE}{BC}+1-\frac{DE}{MQ}=\frac{MD}{MB}+1-\frac{BD}{BM}=0$

 $⟹\frac{1}{BC}+\frac{1}{DE}=\frac{1}{MQ}$

**Bài 5:**

 Trước hết ta chú ý các bổ đề sau:

 **Bổ đề 1**. Cho a,b nguyên thoả mãn $a^{2}+b^{2}\vdots 3 $. Khi đó $a^{2}+b^{2}\vdots 9$ .

 Chứng minh. Từ $a^{2}+b^{2}\vdots 3 $ và chú ý mọi số chính phương chia 3 dư 0.1 nên ta có $a\vdots 3, b\vdots 3 $ và suy ra

 $a^{2}\vdots 9, b^{2}\vdots 9$

 $⟹ a^{2}+b^{2}\vdots 9 $

 **Bổ đề 2**. Nếu hai số nguyên dương được viết thành tổng chính phương của hai số nguyên thì tích của chúng cũng viết được thành dạng tổng của hai số chính phương.

 Chứng minh. Xét các số A, B là các số nguyên có thể viết được thành tổng chính phương của hai số nguyên.

 Khi đó tồn tại a,b,c,d nguyên thoả mãn $A=a^{2}+b^{2}, B= c^{2}+d^{2}$

 Ta có :

 $A^{2}+B^{2}=\left(a^{2}+b^{2}\right)\left(c^{2}+d^{2}\right)=\left(ac-bd\right)^{2}+\left(ad+bc\right)^{2 }$

 Chú ý thêm ac - bd và ad + bc nguyên nên ta hoàn tất chứng minh bổ đề

 Từ bổ đề 1 ta có mệnh đề sau:

 **Mệnh đề 3**. Mọi số dạng $a^{2}+b^{2}$ với a, nguyên, không cùng bằng 0 thì đều có phân tích tiêu chuẩn là $3^{2k}.c $ với (c, 3) = 1 và c $\in N$\* và k $\in N$ .

 Bên cạnh đó ta chú ý:

 **Mệnh đề 4**. Nếu trên bảng có số 0 và xoá đi số 0 thì số viết thêm vào vẫn là số 0.

 Bởi mệnh đề 4 nên ta có thể giả sử tất cả các số trên bảng khác 0. (nói cách khác là đều dương).

 Từ bổ đề 2 ta thấy được : Ở mỗi bước biển đổi, mỗi số trên bảng đều là tổng của hai số chính phương. Do đó nên theo mệnh đề 3, số mũ của 3 trong phân tích tiêu chuẩn của mỗi số trên bảng đều là số tự nhiên chẵn.

 Mặt khác, số mũ của 3 trong phân tích tiêu chuẩn của $26.3^{2023}$ là 2023 lẽ.

 Do vậy nên sau một số hữu hạn bước, không thể thu được số $26.3^{2023}$ được viết trên bảng.