Tạp Chí MathVn

Số 03 - Năm 2009

Tạp chí Toán Học dành cho Học sinh - Sinh viên Việt Nam

Mục lục

CÂU CHUYỆN TOÁN HỌC

Toán học và Điện ảnh

Phäng dàch theo Joan Lasenby, Maths goes to the movies, Plus Magazine, Th¡ng 03 - 2007

DƯƠNG TẤN VŨ, HỌC SINH TRƯỜNG THPT QUỐC HỌC - HUẾ

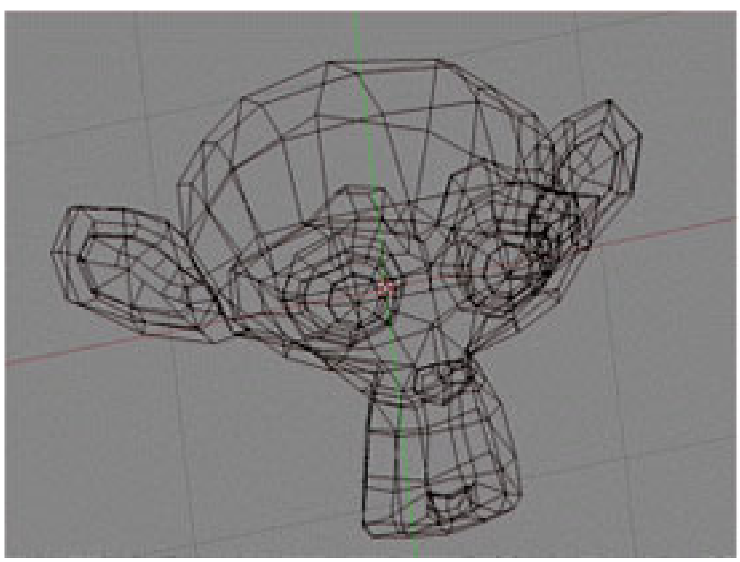
‹n h¸t bäng ngæ ch÷a? Ché ngçi b¤n tèt chù? B¤n ngçi câ tho£i m¡i khæng? H¢y b-t ¦u xem nh²... To¡n håc h¥n h¤nh gi î i thi»u...

Tất cả chúng ta điều ngạc nhiên bởi những hình ảnh vi tính giống thực đến mức không thể tin được trong những bộ phim. Nhưng hầu hết chúng ta không nhận ra rằng những con khủng long trong Công viên kỷ Jura và những kì quan của Chúa tể của những chiếc nhẫn - đặc biệt nhất là nhân vật Gollum - sẽ không thể có được nếu không có Toán học.

Những hình ảnh đáng kinh ngạc này được làm ra như thế nào? Đồ họa vi tính và tầm nhìn máy tính là những vấn đề rất lớn. Trong bài viết này, chúng ta sẽ có một cái nhìn đơn giản vào vài yếu tố toán học cần dùng để đi đến sản phẩm cuối cùng. Đầu tiên, chúng ta xây dựng một thế giới được thấy trong phim, và sau đó mang chúng ra đời thực.

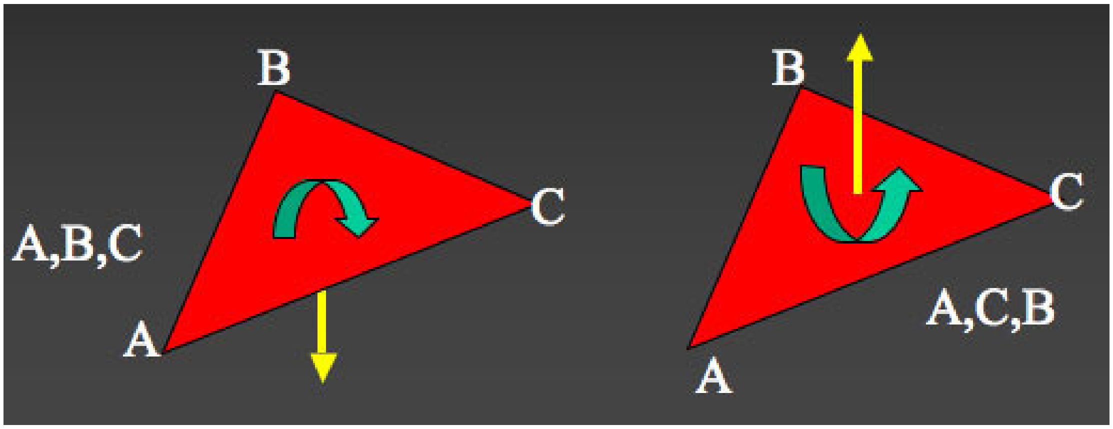
Dựng cảnh

Mæ h¼nh chõ thº ¦u ti¶n nh÷ mët khung d¥y ÷ñc l m tø nhúng a gi¡c ìn gi£n v½ dö nh÷ tam gi¡c.

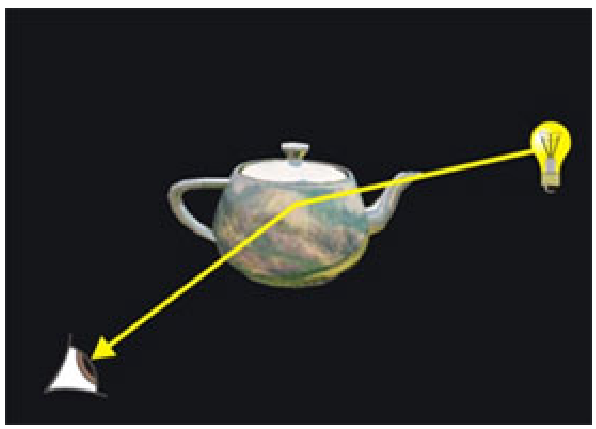


Bước thứ nhất trong việc làm một bộ phim vi tính là tạo ra những nhân vật trong truyện và thế giới chúng sống. Mỗi đối tượng được làm mô hình như một bề mặt phủ bởi các đa giác liên kết với nhau (thường là tam giác). Các đỉnh của mỗi tam giác được lưu trong bộ nhớ máy tính. Biết mặt nào của tam giác nằm ngoài bề mặt vật thể hay nhân vật cũng rất quan trọng. Thông tin này được mã hóa bằng thứ tự các đỉnh được lưu vào, theo quy tắc đinh ốc (quy tắc nắm tay phải): Khum các ngón tay của bàn tay phải vòng quanh tam giác theo chiều được quy định bởi các đỉnh. Chỉ có một cách duy nhất để làm điều này và ngón tay phải sẽ chỉ về một phía của tam giác - phía đó là phía ngoài. Nếu bạn thử với một ví dụ, bạn sẽ thấy chiều hướng ra ngoài (pháp tuyến ngoài) của tam giác (A, B, C) sẽ ngược chiều với của tam giác (A, C, B).

Ph¡p tuy¸n ngo i cõa (A, B, C) ng÷ñc h÷îng vîi (A, C, B) ÷ñc x¡c ành theo quy t-c n-m tay ph£i (quy t-c inh èc)



K´ mët tia tø iºm nh¼n ¸n mët b· m°t. Nâ câ ph£n x¤ v giao vîi nguçn s¡ng khæng?



Bây giờ bề mặt của vật thể là một mạng lưới những tam giác, chúng ta sắp sửa tô những thành phần của nó. Điều quan trọng ở đây là phải bắt giữ ánh sáng thực tế của khung nền chúng ta đang làm mô hình, điều này được thực hiện bằng quy trình gọi là ray tracing. Bắt đầu từ điểm nhìn, chúng ta kẻ những tia trở lại hướng vào vật thể và để chúng phản xạ qua nó. Nếu một tia từ mắt chúng ta phản xạ qua bề mặt (một trong những mắt lưới tam giác) và giao với nguồn sáng, thì chúng ta tô bề mặt nó bởi một màu sáng để khi xuất hiện chúng như bị chiếu sáng bởi nguồn sáng. Nếu tia không giao với nguồn sáng chúng ta tô một màu tối hơn.

Để vẽ một tia trở lại một bề mặt, chúng ta cần mô tả bề mặt một cách toán học bao gồm những đường thẳng và mặt phẳng được mô tả bởi bề mặt đó. Điều này được thực hiện bằng việc sử dụng Vectơ. Chúng ta đặt một hệ tọa độ không gian 3 chiều lên phông nền với điểm gốc $(0, 0, 0)$ - đặt tại điểm nhìn của chúng ta. Một vectơ $v = (a, b, c)$ bây giờ biểu thị một mũi tên từ gốc đến điểm có tọa độ (a, b, c). Chúng ta có thể nhân v với một số, 2 chẳng hạn, theo quy tắc $2v = 2(a, b, c) = (2a, 2b, 2c)$. Vậy $2v$ là một mũi tên được vẽ cùng hướng với v nhưng dài gấp đôi.

Xét biểu thức λv với biến λ là một số thực nào đó. Đây không còn hiển thị một mũi tên với chiều dài xác định nữa, vì chiều dài đã trở thành biến, chỉ có hướng là xác định thôi. Nói cách khác, biểu thức này mô tả một đường thẳng chứa vectơ v. Nó mô tả một đường thẳng - một tia phát ra từ điểm gốc nhìn theo hướng được cho bởi vectơ v.

Mặt phẳng được xác định bởi bề mặt tam giác có thể được miêu tả bởi 3 mẫu thông tin: tọa độ một đỉnh-gọi là đỉnh a_1, hai vectơ thể hiện 2 đường thẳng từ đỉnh a_1 đến đỉnh a_2 và từ đỉnh a_1 đến đỉnh a_3.

Dưới đây cho thấy phương trình của một tia từ mắt chúng ta và phương trình mặt phẳng được cho bởi một bề mặt. Để tìm ra tia có cắt bề mặt không và nếu có thì cắt ở đâu và để lập phương trình của tia phản xạ, chúng ta cần giải những phương trình bao gồm 2 biểu thức này.

Phương trình của một tia, với λ là một số thực và v là một vectơ:

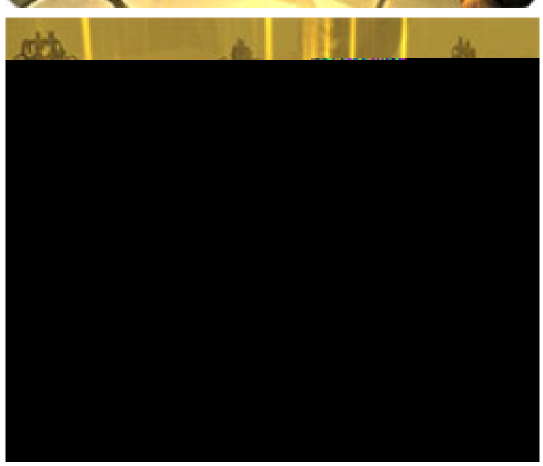
$$r = \lambda v$$

Phương trình của mặt phẳng được xác định bởi bề mặt với các đỉnh a_1, a_2 và a_3:

$$r = a_1 + \mu_1(a_2 - a_1) + \mu_2(a_3 - a_1)$$

Ray tracing có thể tạo ra những khung cảnh thực tế nhưng nó rất chậm. Nó có thể chấp nhận được đối với những bộ phim vi tính, nhưng sẽ trở thành một vấn đề khi bạn cần sự thay đổi ánh sáng trong thời gian thực, ví dụ như trò chơi vi tính. Những hiện tượng phức tạp như bóng, tụ quang, những phản xạ phức tạp rất khó để làm mẫu sống động. Nhiều phương tiện toán học phức tạp, ví dụ như *Precomputed Radiance Transfer*[1] và *Radiosity*[2] sẽ được sử dụng ở đây.

C¡c game nh÷ Doom 3 v Neverwinter nights ái häi ¡nh s¡ng sèng ëng



[1] http : //en.wikipedia.org/wiki/Precomputed_Radiance_Transfer
[2] http://en.wikipedia.org/wiki/Radiosity

Tất cả những gì phải cần là một chút tưởng tượng

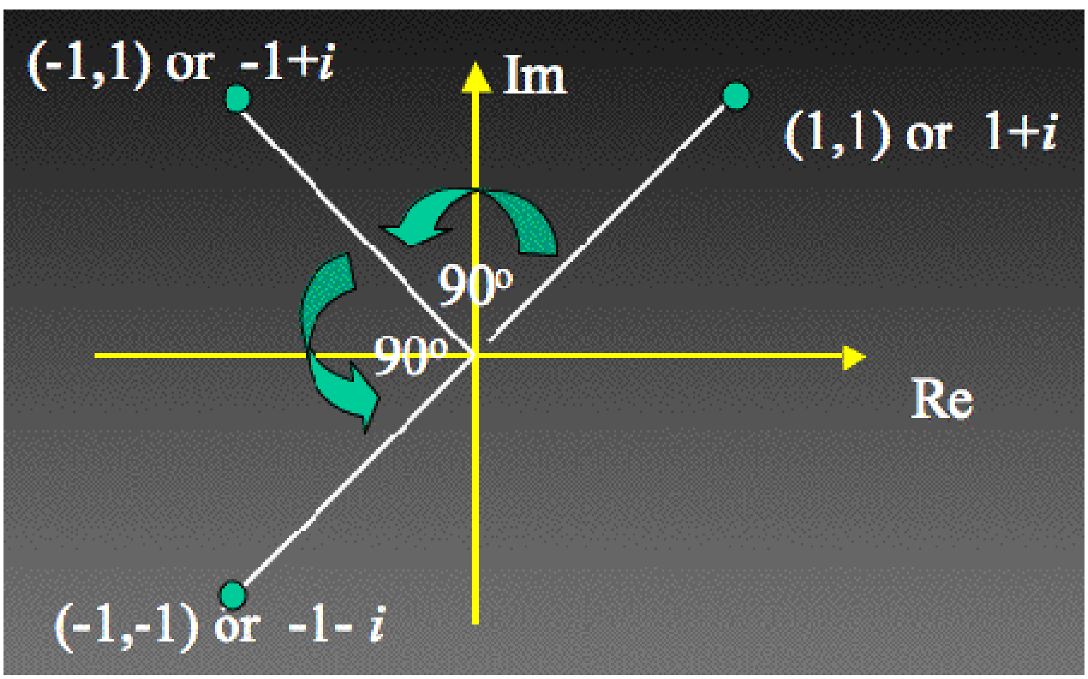
Một khi khung cảnh được thiết lập và chiếu sáng, chúng ta vẫn đang đợi đạo diễn nói "Action" và những nhân vật của chúng ta bắt đầu chuyển động. Bây giờ chúng ta sẽ kiểm tra rằng toán học có thể mang những những hình ảnh của chúng ta đến với cuộc sống không.

Một trong những chuyển động cơ bản mà vât thể trình diễn là sự xoay tròn quanh một trục cho trước và qua một góc cho trước. Hình học tọa độ cho chúng ta những công cụ để tính vị trí của mỗi điểm trên vật thể sau khi chúng được xoay, nhưng điều quan trọng là những công cụ này phải nhanh và hiệu quả.

Để tìm những công cụ này, hày lùi một bước trở lại lớp học môn Toán. Chúng ta biết rằng có hai căn bậc hai của 25 là: 5 và -5 vì $(\pm 5)^2 = 25$. Nhưng căn bậc hai của -25 là bao nhiêu? Để tìm căn bậc hai của một số âm, những nhà toán học đã xây dựng một số mới, gọi là i, với $i^2 = -1$. Vậy vì $(\pm 5i)^2 = 25i^2 = -25$ nên chúng ta tìm ra rằng $\sqrt{-25} = \pm 5i$ Sự đưa vào số i có nghĩa là phương trình như $x^2 = -1$ bây giờ có thể giải được. Và những số có dạng $z = x + iy$, gọi là số phức, trở thành một công cụ quan trọng trong toán học. Nhưng nhiều người đã không vui với số ảo i mới lạ này.

Cuối cùng vào năm 1806 nhà toán học nghiệp dư Jean-Robert Argand đã đưa ra một giải thích hình học về số phức và số i. Argand liên kết những số phức với những điểm trên trên mặt phẳng rằng số thực 1 nằm trên một trục và số ảo i nằm trên trục khác. Ví dụ số $1 + i$ tương ứng với điểm $(1, 1)$. Một cách tổng quát số $a + ib$ tương ứng với điểm (a, b).

Ph²p nh¥n v1i sè phùc câ mët þ ngh¾a h¼nh hắc - ph²p quay



Argand nhận ra rằng phép nhân với số phức mô tả một ý niệm hình học: phép quay. Hãy xem chuyện gì xãy ra nếu ta nhân số $1 + i$, biểu diễn bởi điểm $(1, 1)$, với i

$$i(i + 1) = i - 1 = -1 + i$$

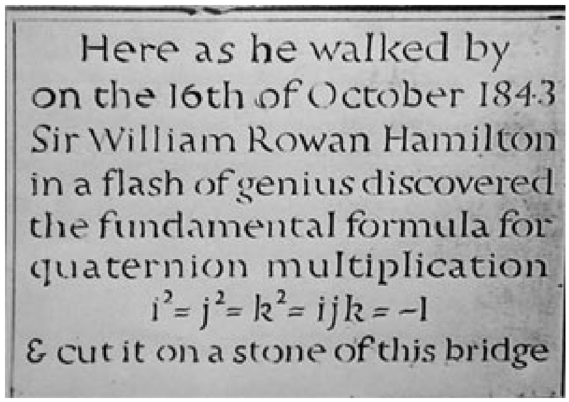
số mà được biểu diễn bởi điểm $(-1, 1)$, một phép quay với góc $90°$. Lại nhân với i ta được:

$$i(-1 + i) = -i - 1 = -1 - i$$

chính là điểm $(-1, -1)$, một phép quay $90°$. Nhân với i là một "lệnh" để quay $90°$! Thực tế, bất cứ sự quay nào, không chỉ $90°$, có thể đạt đạt được bằng phép nhân với một số phức.

Tiến tới 3D

T§m bia t÷ðng ni»m °t tr¶n c¦u Broome (Dublin), Hamilton ¢ ph¡t hi»n ra quaternion khi ang i bë d÷îi chi¸c c¦u n y.



Nhà toán học Sir William Rowan Hamilton đã cống hiến 20 năm cuối đời cho việc tìm kiếm cách biểu diện phép quay ba chiều tương tự như việc số phức có thể biểu diễn phép quay trong không gian 2 chiều.

Đến cuối đời Hamilton đã khám phá ra câu trả lời, trong hình thức của một cái gì đó ông gọi là quaternion - là những số có dạng

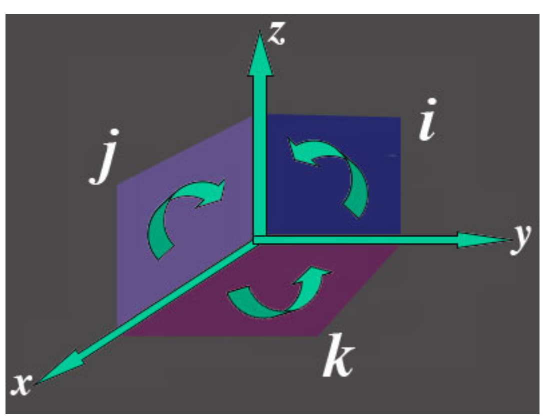
$$q = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k$$

Với $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ và a_0, a_1, a_2, a_3 là các số thực.

Cũng chỉ như chúng ta đã làm với số phức, chúng ta có thể mô tả quaternion một cách hình học và sử dụng chúng để mô tả phép quay. Nhưng lần này là phép quay trong không gian 3 chiều.

Để làm điều này, i, j và k phải mô tả những mặt phẳng cơ bản trong không gian 3 chiều: đó là i mô tả mặt phẳng yz, j cho mặt phẳng xz và k cho mặt phẳng xy với pháp tuyến ngoài lần lượt theo hướng $x, -y$ và z.

i, j v k câ th° ÷ñc th° hi»n nh÷ l nhúng m°t ph¯ng cì b£n cõa khæng gian 3 chi·u



Giả sử chúng ta cần quay điểm $a = (a_1, a_2, a_3)$ một góc β qua trục đi qua gốc tọa độ và cho bởi vectơ (b_1, b_2, b_3). Chúng ta xây dựng 2 quaternion q_1 và q_2 sử dụng vectơ trục b và góc quay β

$$q_1 \cos(\beta/2) + \sin(\beta/2)(b_1 i + b_2 j + b_3 k)$$

và

$$q_2 = \cos(\beta/2) - \sin(\beta/2)(b_1 i + b_2 j + b_3 k)$$

Sau đó chúng ta có thể nhân a (được biểu diễn bằng sự kết hợp các vectơ đơn vị theo hướng x, y và z) với 2 quaternion (tuân theo các quy tắc đặc biệt trong nhân những mặt phẳng i, j và k với các vectơ đơn vị), ta được:

$$a' = q_1 a q_2$$

Thì ra rằng điểm a' cho bởi phép nhân này chính xác là điểm có được khi bạn quay a quay quanh trục cho trước một góc β! Vậy cũng như số phức có thể được dùng để miêu tả sự quay trên mặt phẳng, thì quaternion có thể được sử dụng để mô tả sự quay trong không gian 3 chiều.

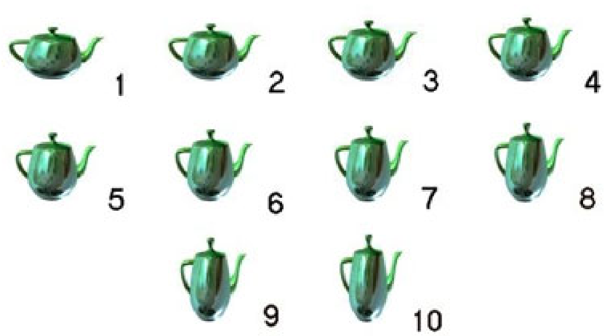
Ánh sáng lóe lên trong Hamilton, khi ông đi bộ dưới cái cầu đó ở Dublin, hóa ra là cách hiệu quả nhất để quay một vật thể trong không gian 3 chiều. Nhưng không phải mọi người đã vui với phương pháp nhân mới mẻ này của ông. Lord Kelvin, nhà vật lí, nói về quaternion: *...tuy l t i t¼nh, nh÷ng dò sao i núa, nâ ho n to n l mët tai håa cho ai ¢ tøng öng ¸n nâ!*

Có điều đặc biệt đáng ngại với một số người là khi bạn nhân 2 quaternion, kết quả phụ thuộc vào thứ tự bạn nhân chúng, một đặc tính gọi là không giao hoán . Ví dụ, từ quy tắc nhân của Hamilton, có thể thấy rằng $ij = k$ và $ji = -k$. Tuy nhiên khi một người xem i, j và k như những mặt phẳng cơ bản, thì những đặc tính, cái gây lo lắng cho Kelvin và những người cùng thời với ông, chỉ là sinh ra trực tiếp từ toán học.

Mang những hình ảnh vào cuốc sống

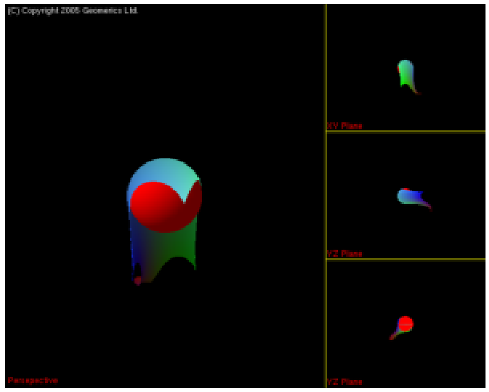
Phát minh của Halminton bây giờ được sử dụng trong nhiều ứng dụng đồ họa để di chuyển vật thể hay tạo sự vận động. Hai công cụ quan trọng nhất trong đồ họa vi tính là sự biến hình và phép nội suy. Phép nội suy và kĩ thuật của keyframing bao gồm xác định hình dạng, vị trí ban đầu và kết thúc của vật thể và máy tính sẽ thực hiện những công việc ở giữa, như thấy trong hình sau.

H¼nh d¤ng cõa §m tr thay êi d¦n d¦n qua mët chuéi £nh.

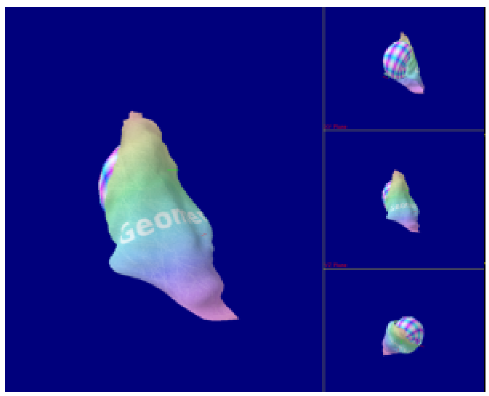


Sự biến hình là cách dựng những vật thể phức tạp từ những cái đơn giản hơn. Một tấm vải rơi vào một quả cầu méo, như hình dưới, có thể nhận được từ sự vận dụng toán học vào vào khung cảnh của quả cầu bình thường. Cả biến hình và nội suy đều yêu cầu những kĩ thuật toán học nhanh chóng và ổn định và những phương pháp liên quan đến quaternion sẽ cung cấp những thứ đó.

Mët t§m v£i rìi xuèng qu£ c¦u trán câ th º üìc l m mæ h¼nh b¬ng vi»c sû döng nh÷ng quy tc vªt l½.



V sau â ÷ñc vªn döng º l m h¼nh £nh tr¶n qu£ c¦u m²o...

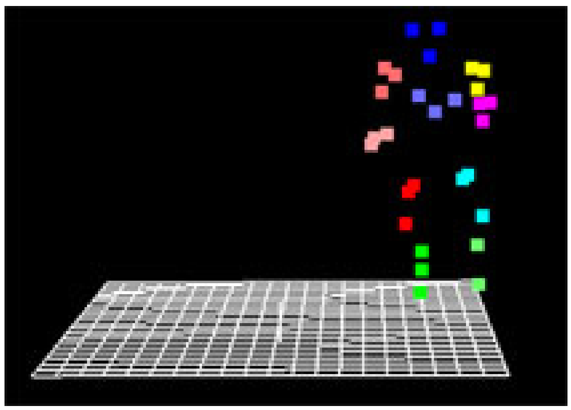


Làm cho Gollum như thật!

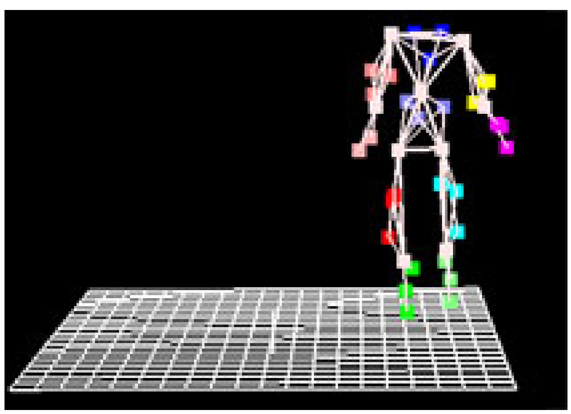
Những kĩ thuật được miêu tả ở trên là những công cụ thiết yếu trong hoạt hình cổ điển, và chúng ta thật sự vui khi tin tưởng những thành quả của chúng trong những nhân vật hoạt hình. Nhưng khi làm con người chúng ta ngay lập tức nhận ra rằng nó không đúng. Để xây dựng những chuyển động thực tế, thường thường phải đòi hỏi kỹ thuật bắt giữ chuyển động.

Nhiều nhân vật, như Gollum trong phim Chúa Tể Của Những Chiếc Nhẫn chẳng hạn, được xây dựng sử dụng cách bắt giữ chuyển động này. Điều này được thực hiện bằng việc gắn những gương phản xạ trên người thật ở những điểm chính trên cơ thể: đầu, vai, khuỷu tay, đầu gối... Những cá thể được quay phim bằng những những máy quay đa chiều và những thay đổi vị trí của gương phản xạ sẽ được lưu trữ trên một máy tính. Một bộ xương sẽ được đặt vào không gian 3 chiều ảo. Cuối cùng, tất cả kĩ thuật được mô tả ở trên được sử dụng để đặt thịt vào xương và tạo một nhân vật sống, thở và chuyển động.

Dú li»u thu ùìc tø chuy°n ëng cõa nhúng g÷ìng ph£n x¤ g-ng v o c¡c ph¦n kh¡c nhau cõa cì th°



... Mët khung x÷ìng s³ ÷ñc l-p mët c¡ch to¡n håc v o dú li»u



Nếu bạn từng ở lại để xem toàn bộ đoạn giới thiệu bạn sẽ nhận ra rằng có rất nhiều tài năng sáng tạo khi làm một bộ phim thành công: tác giả, đạo diễn, diễn viên, thiết kế trang phục, dựng cảnh... danh sách còn tiếp tục. Nhưng một cái tên thường bị bỏ quên - đó là Toán học. Rất nhiều bộ phim ngày nay sẽ không thể có được nếu không có Hình học của việc vẽ tia và quaternion đã quay những vật thể trong không gian. Vậy lần sau bạn vào ghế ngồi ở rạp chiếu phim để thưởng thức một quang cảnh CG, hãy giơ cao bỏng ngô của bạn cho Toán học - ngôi sao lặng lẽ của buổi biểu diễn. Hãy thử nhé!

Bài viết Chuyên đề MathVn

Phép Nghịch đảo - Ứng dụng trong giải và chứng minh Hình học phẳng

Nguyễn Lâm Minh[1] , Học sinh trường THPT chuyên Lê Hồng Phong, Tp. HCM

I - Định nghĩa - Tính chất

1.1. Định nghĩa

Hồi còn học ở THCS, có một bài toán khá quen biết:

"Cho (O). Một điểm A nằm ngoài đường tròn (O). Vẽ tiếp tuyến AK đến (O) $(K \in (O))$. Một cát tuyến bất kỳ từ A đến (O) cắt (O) lần lượt tại 2 điểm M, N. Khi đó, ta luôn có $AK^2 = AM.AN$".

Để ý rằng cứ với một điểm M_0 bất kỳ nằm trên đường tròn (O) thì luôn tồn tại một điểm N_0 khác là giao điểm cuả (O) và KM_0 sao cho $AM_0.AN_0 = AK^2$. Khi cho $M_0 \longrightarrow K$ thì $N_0 \longrightarrow K$.

Phép nghịch đảo được xây dựng dựa bài toán quen thuộc bên trên. Tức là, với một điểm O cố định nằm trên mặt phẳng và một số hằng số $k \neq 0$. Nếu ứng với mỗi điểm P cuả mặt phẳng khác với điểm O, ta tìm được một điểm P' khác nằm trên OP sao cho $\overline{OP}.\overline{OP'} = k$ thì phép biến hình biến $P \mapsto P'$ được gọi là *phép nghịch đảo cực O, phương tích k*. Ta ký hiệu phép biến hình này là $\mathcal{I}(O,k)$ hay $f(O,k)$. Trong bài viết này, tác giả sẽ sử dụng ký hiệu $f(O,k)$ và $f(P) = P'$ sẽ ám chỉ P' là ảnh cuả P qua *phép nghịch đảo cực O, phương tích k*.

1.2. Tính chất

a) *Phép nghịch đảo có tính chất đối hợp.* Vì $\overline{OP}.\overline{OP'} = k = \overline{OP'}.\overline{OP}$. Do đó $P = f(P')$ và ngược lại $P' = f(P)$. Như vậy $f \circ f(P) = P$ hay f^2 là phép một đồng nhất.

b) Nếu $k > 0$ thì hai điểm P, P' nằm cùng phía đối với O. Đường tròn $(O, \sqrt{k})$ lúc này được gọi là *đường tròn nghịch đảo* cuả phép nghịch đảo $f(O,k)$. Khi đó các điểm M mà thoả mãn $f(M) = M$ được gọi là các điểm kép cuả phép nghịch đảo $f(O,k)$. Hơn nữa, tập hợp các điểm này là $(O, \sqrt{k})$.

Nếu $k < 0$ thì hai điểm P, P' nằm về hai phía khác nhau đối với O. Trong trường hợp này sẽ không xuất hiện điểm kép đối với $f(O,k)$ do đó đường tròn nghịch đảo cuả $f(O,k)$ sẽ được gọi là đường tròn *bán thực*, trong đó tâm cuả đường tròn là thực và bán kính cuả đường tròn là ảo.

Khi M càng tiến lại gần O là cực nghịch đảo thì ảnh cuả thì $f(M)$ sẽ càng tiến xa O, tức là nếu $M \longrightarrow O$ thì $f(M) \longrightarrow \infty$.

c) Phép nghịch đảo $f(O,k)$ có phương tích $k > 0$ và P, P' là ảnh của nhau qua phép nghịch đảo $f(O,k)$ thì mọi đường tròn qua 2 điểm P, P' đều *trực giao* với $(O, \sqrt{k})$ (Hai đường tròn (O), (O') được gọi là *trực giao* với nhau nếu 2 tiếp tuyến tại 1 giao điểm cuả (O) và (O') vuông góc với nhau). Hơn nữa, mọi đường tròn $(\mathcal{C})$ qua P, P' đều biến thành chính nó qua $f(O,k)$, với $k > 0$.

[1] Email: lamminh_12kof@yahoo.com

d) Nếu (O_1) và (O_2) lần lượt trực giao với $(O, \sqrt{k})$, $k > 0$ và $(O_1), (O_2)$ lần lượt cắt nhau ta hai điểm thì hai điểm này sẽ là ảnh cuả nhau qua phép nghịch đảo $f(O, k)$.

e) Phép nghịch đảo $f(O, k)$, $k \neq 0$. Thì với hai điểm A, B không thẳng hàng với cực nghịch đảo, ta luôn có $A, B, f(A), f(B)$ là các điểm đồng viên.

f) Đặt $A' = f(A)$ và $B' = f(B)$ khi đó $A'B' = |k|.\dfrac{AB}{OA.OB}$.

Tuy nhiên ta lưu ý rằng khẳng định $f(O, k) : AB \mapsto A'B'$ là sai!.

Tính chất ảnh cuả một đường thẳng hay một đường tròn qua phép nghịch đảo sẽ được phát biểu ngay sau đây:

• Từ định nghiã ban đầu, ta đã biết được rằng một đường thẳng d bất kỳ qua cực nghịch đảo O thì qua $f(O, k)$, d biến thành chính nó.

• Một đường thẳng d bất kỳ không đi qua O- cực nghịch đảo thì qua $f(O, k)$, d sẽ biến thành một đường tròn (C) đi qua cực nghịch đảo.

Thật vậy, ta gọi P là hình chiếu cuả O lên d và P' là ảnh cuả P qua $f(O, k)$. Gọi A là điểm bất kỳ nằm trên d và A' là ảnh cuả A qua $f(O, k)$. Khi ấy, ta được $OP.OP' = OA.OA' = k$, từ đó suy ra $\triangle A'P'O$ đồng dạng $\triangle PAO$. Suy ra $\angle APO = \angle A'P'O = 90°$, điều này nói lên A nằm trên đường tròn đường kính OP'. Hơn nữa, tâm cuả (C) sẽ là ảnh cuả điểm đối xứng với O qua d qua phép nghịch đảo cực O, phương tích k.

• Đảo lại, nếu đường tròn (C) đi qua cực nghịch đảo O. Khi đó, qua $f(O, k)$, (C) biến thành đường thẳng d không qua cực nghịch đảo.

Gọi P là điểm đối xứng cuả O qua tâm đường tròn (C) và P' là ảnh cuả P qua $f(O, k)$. Với A là điểm bất kỳ nằm trên (C) $(A \neq O)$, ta gọi A' là ảnh cuả A qua $f(O, k)$. Cũng như chứng minh cuả tính chất bên trên, khi đó, ta được $\triangle OP'A'$ đồng dạng với $\triangle OAP$. Từ đó suy ra $\angle OP'A' = \angle OAP = 90°$. Do đó mọi điểm A sẽ nằm trên đường thẳng đi qua P' và vuông góc với OP.

• Với mọi đường tròn (C) không qua cực nghịch đảo O thì qua $f(O, k)$, (C) sẽ biến thành (C') cũng không đi qua cực nghịch đảo.

Lấy một điểm M bất kỳ nằm trên (C) và M' là ảnh cuả M qua $f(O, k)$. Khi đó, ta có $OM.OM' = k$. Gọi N là giao điểm thứ hai cuả OM và (C) và p là phương tích cuả O đối với (C), ta có $OM.ON = p$. Từ đó suy ra $OM' = \frac{k}{p}ON$.

Hệ thức này chứng tỏ rằng M' là ảnh cuả N qua phép vị tự tâm O, tỉ số $k_1 = \frac{k}{p}$. Khi M chạy vạch nên (C) thì N cũng chạy và vạch nên đường tròn (C), còn M' sẽ vạch nên (C') là ảnh cuả (C) qua $\mathcal{H}(O, k_1)$. Do đó (C') là ảnh cuả (C) qua $f(O, k)$. Vì (C) không qua cực O, hiển nhiên (C') cũng không qua cực O.

Tuy nhiên tâm cuả (C) sẽ không biến thành tâm cuả (C') qua $f(O, k)$.

g) Phép nghịch đảo bảo tồn góc giữa 2 đường tròn (hay giữa một đường tròn và một đường thẳng, hay giữa hai đường thẳng).

Tính chất g bên trên là một tính chất quan trọng cuả phép nghịch đảo nên tác giải sẽ cố gắng trình bày thật chi tiết và dễ hiểu cho bạn đọc.

Ta định nghĩa thế nào là góc giữa hai đường cong:

Định nghĩa. *Cho hai đường con (C_1) và (C_2) cắt nhau tại một điểm A nào đó và tại đó, ta dựng các tiếp tuyến cuả (C_1) và (C_2). Khi đó, ta định nghĩa góc giữa hai đường cong (C_1) và (C_2) là góc giữa hai tiếp tuyến tại A cuả chúng.*

Chứng minh

Trước tiên, ta xét bổ đề sau:

Bổ đề. *Cho $f(O,k)$ biến đường cong (C) thành đường cong (C'). Nếu A, A' là hai điểm tương ứng trên (C), (C') và tại đó chúng có các tiếp tuyến thì các tiếp tuyến này đối xứng với nhau qua đường trung trực cuả đoạn AA'.*

Thật vậy, ta gọi M là một điểm nằm trên (C) và M' là ảnh cuả M qua $f(O,k)$, suy ra M' nằm trên (C'). Ta lại có $OM.OM' = OA.OA' = k$, suy ra M, M', A', A nội tiếp.Gọi (K) là đường tròn đi qua A, A', M', M. Cho $M \longrightarrow A$, khi ấy $M' \longrightarrow A'$. Do đó $MA, M'A'$ lần lượt suy biến thành tiếp tuyến t và t' tại A, A' cuả các đường cong (C), (C') tương ứng và (K) suy biến thành đường tròn (K') tiếp xúc với đường cong (C) và (C') lần lượt tại A và A'. Rõ ràng lúc này, t và t' sẽ là tiếp tuyến tại A và A' cuả (K') tương ứng. Từ đó suy ra, t và t' đối xứng nhau qua đường trung trực cuả AA'.

Chứng minh tính chất

Giả sử qua phép nghịch đảo f, hai đường cong (C) và (D) cắt nhau tại một điểm A biến thành đường cong (C') và (D') cắt nhau tại $A' = f(A)$.

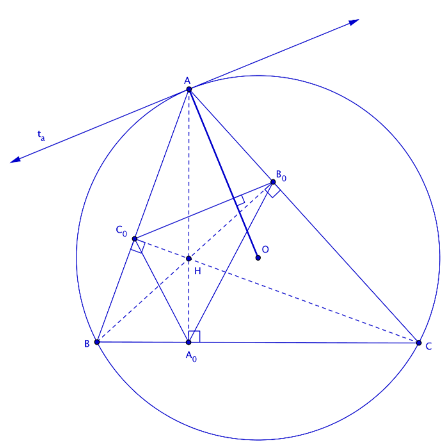
Theo bổ đề các tiếp tuyến At và $A't'$ cuả (C) và (C') tại A và A' đối xứng nhau qua trung trực của AA' và các tiếp tuyến Au và $A'u'$ cuả (D) và (D') tại A và A' cũng đối xứng nhau qua trung trực của AA'. Từ đó suy ra $(A't', A'u') = -(At, Au)$.

II - Vẻ đẹp cuả phép nghịch đảo trong chứng minh các bài toán hình học phẳng

Ta khởi động với bài toán quen thuộc, từng xuất hiện nhiều trong các kỳ thi trong nước, gần đây nhất là kỳ thi tuyển sinh THPT năm học 2009-2010.

Bài toán 1. *Cho $\triangle ABC$ nội tiếp đường tròn tâm (O). Gọi B_0, C_0 lần lượt là hình chiếu cuả B, C trên AC, AB. Chứng minh rằng tiếp tuyến tại A cuả đường tròn (O) song song với B_0C_0, từ đó suy ra $AO \perp B_0C_0$.*

Lời giải



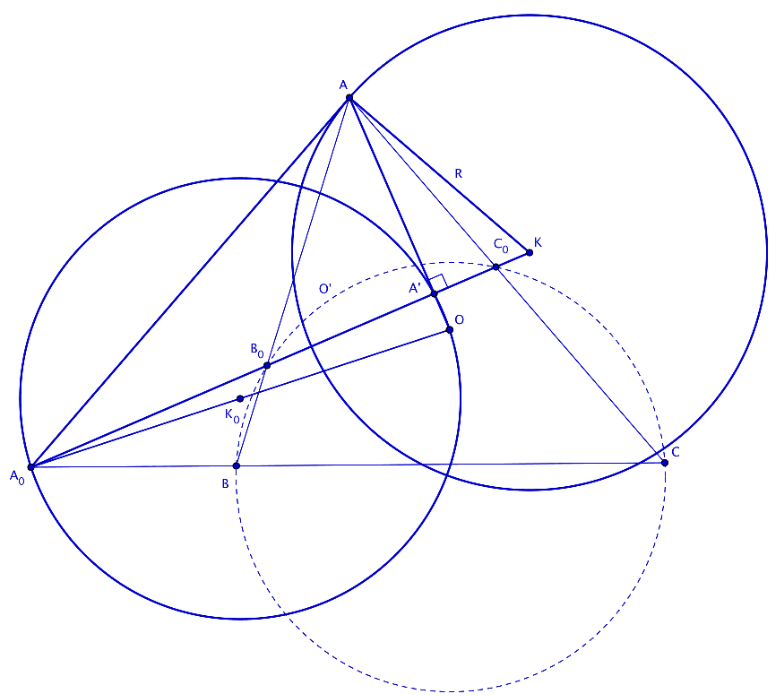
Trước tiên dễ thấy được rằng B, C_0, B_0, C đồng viên. Do đó $\overline{AB}.\overline{AC_0} = \overline{AC}.\overline{AB_0} = k$. Xét phép nghịch đảo cực A, phương tích k, ta được $\mathcal{I}(A, k) : B_0 \mapsto C$, $C_0 \mapsto B$. Vì vậy $\mathcal{I}(O, k) : B_0C_0 \mapsto (O)$. Gọi t_a là tiếp tuyến tại A cuả (O) thì ta có $\mathcal{I}(A, k) : t_a \mapsto d$. Mặt khác t_a tiếp xúc (O) do đó $t_a || B_0C_0$ (phép nghịch đảo bảo tồn góc). Khi ấy, ta có ngay $OA \perp B_0C_0$ (Vì $OA \perp t_a$) □

Bài toán trên là một bài toán thuộc dạng kinh điển và quen thuộc. Nhiều bạn thậm chí là các bạn THCS không gặp khó khăn mấy khi chứng minh bài toán trên. Trên trang website `www.mathlinks.ro` có đến "hàng tá" cách giải cho bài toán này, trong đó có một cách chỉ thuần túy biến đổi góc. Riêng ý sau cuả bài toán trên vẫn có thể chứng minh được mà không cần dùng đến ý đầu. Thật vậy, ta đã biết qua phép nghịch đảo cực A, phương tích k, $\mathcal{I}(A, k) : B_0C_0 \mapsto (O)$. Do đó O sẽ là ảnh cuả điểm đối xứng với A qua B_0C_0. Rõ ràng ta có ngay $AO \perp B_0C_0$. Hơn nữa, từ ý này, ta còn có thể chỉ ra các đường thẳng lần lượt qua A, B, C vuông góc với C_0B_0, A_0C_0, A_0B_0 thì đồng quy với nhau tại O.

Bài toán bên trên có một dạng tổng quát hơn. Chúng ta cùng xét dạng tổng quát cuả bài toán này qua bài toán tiếp theo.

Bài toán 2. *Cho $\triangle ABC$ nội tiếp đường tròn tâm (O). Một đường tròn (O') bất kỳ đi qua B, C thoả mãn nó cắt đoạn AB, AC lần lượt tại B_0, C_0. Gọi A_0 là giao điểm cuả B_0C_0. Một đường tròn (K) có tâm nằm trên B_0C_0 tiếp xúc với AA_0 tại A. Chứng minh rằng A_0 và O là hai điểm liên hợp với nhau qua (K).*

Lời giải

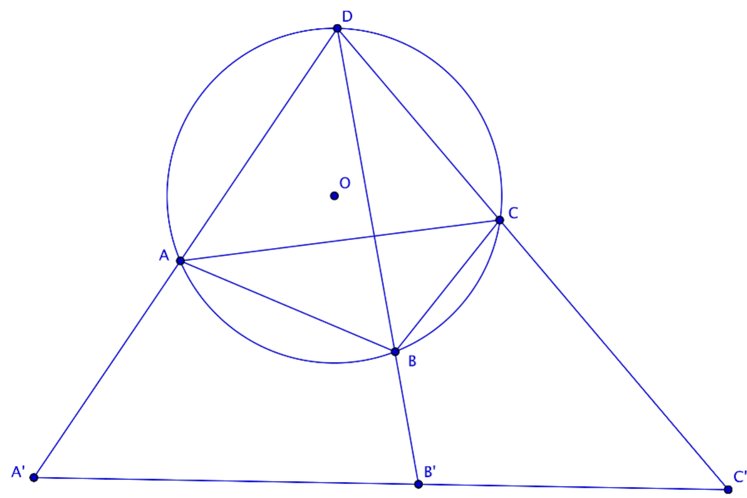


Để chứng minh A_0, O là hai điểm liên hợp với nhau qua (K). Ta sẽ chứng minh rằng đường tròn đường kính A_0O trực giao với (K). Gọi (K_0) là đường tròn đường kính A_0O. Do đó ta sẽ chứng minh phương tích từ K đến (K_0) bằng R^2, trong đó R là bán kính cuả (K). Mặt khác, từ giả thiết, ta suy ra được $\triangle A_0AK$ là tam giác vuông ở A. Do đó nếu gọi A' là hình chiếu cuả A lên B_0C_0; khi ấy ta nhận được $R^2 = AK^2 = KA'.KA_0$. Do vậy ta sẽ chứng minh $A' \in (K_0)$. Điều này tương đương với việc chứng minh A, O, A' thẳng hàng $(*)$. Và đây chính là ý mở rộng cuả **Bài toán 1** mà tác giải muốn nói với bạn đọc. Bây giờ, ta sẽ chứng minh $(*)$.

Thật vậy, qua phép nghịch đảo cực A, phương tích $k = \mathcal{P}_{A/(O')}$, ta có $\mathcal{I}(A,k) : B_0 \mapsto B$, $C_0 \mapsto C$. Do đó $B_0C_0 \mapsto (ABC)$. Từ đó suy ra được $AO \perp B_0C_0$. Điều ày chứng tỏ A, O, A' thẳng hàng. Từ đó suy ra điều phải chứng minh. □.

Bài toán 3. (Định lý Ptolémée) *Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để một tứ giác lồi nội tiếp được là tích hai đường chéo cuả nó bằng tổng cuả tích hai cạnh đối diện.*

Lời giải



Xét tứ giác $ABCD$. Xét phép nghịch đảo cực D, phương tích k bất kỳ. Thì $\mathcal{I}(D,k) : A \mapsto A'$, $B \mapsto B'$, $C \mapsto C'$. Như vậy $ABCD$ là tứ giác nội tiếp khi và chỉ khi A', B', C' thẳng hàng. Điều này xảy ra khi và chỉ khi $A'C' = A'B' + B'C'$ hay nói cách khác là:

$$|k|\frac{AC}{DA.DC} = |k|\frac{AB}{DA.DB} = |k|\frac{BC}{DB.DC}$$

Nhân hai vế cho $DA.DB.DC.|k|$, ta thu được: $AC.BD = AD.BC + AB.DC$ □

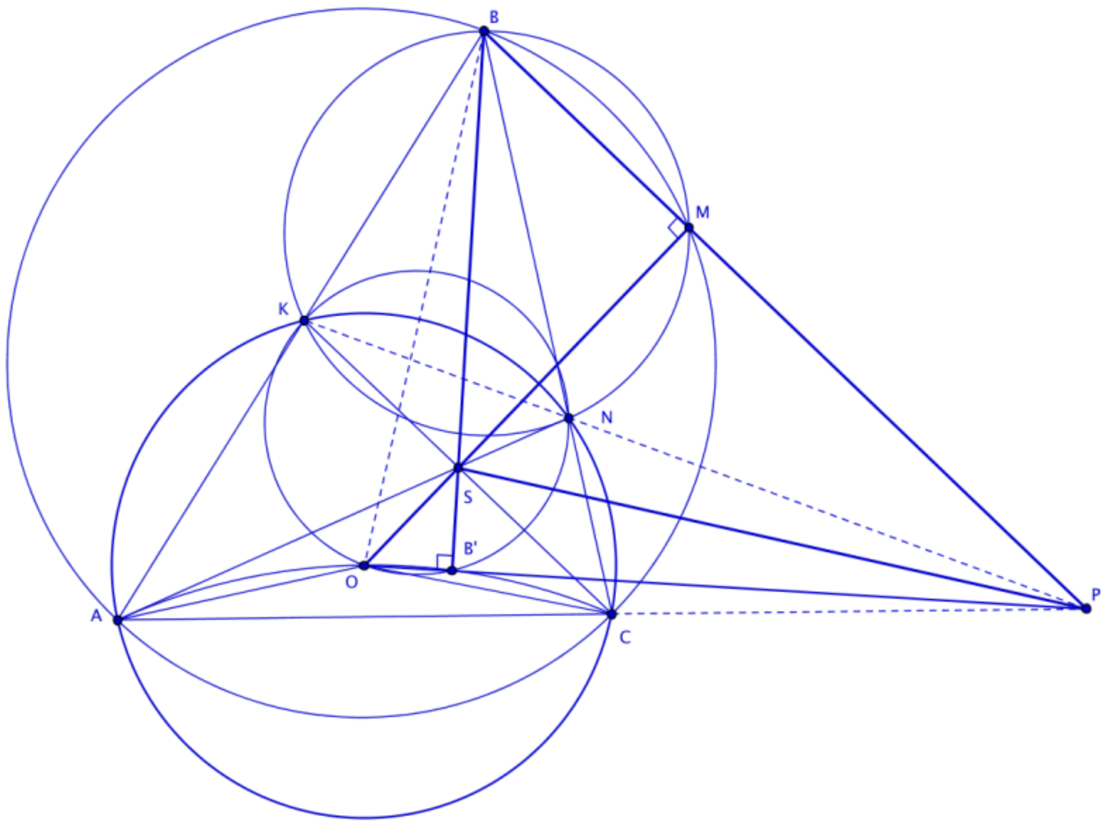
Định lý Ptolémée là một bài toán quen thuộc đối với các em học chuyên sâu về toán ở THCS và cách giải phổ biến cuả định lý này là cách gọi thêm điểm D_0 thoả mãn $\angle D_0DC = \angle BAC$, $\angle D_0CD = \angle BCA$ để tạo cặp tam giác $\triangle CD_0D$ và $\triangle CBA$ đồng dạng nhau và một cặp đồng dạng khác, xuất hiện một khâu biến đổi góc. Rõ ràng dưới quan điểm của phép nghịch đảo, định lý Ptolémée trở nên không hề một chút khó khăn trong việc suy nghĩ gọi thêm yếu tố phụ! Lưu ý rằng bằng phương pháp dùng phép nghịch đảo, tương tự ta cũng chứng minh được định lý mở rộng:

"Điều kiện cần và đủ để một đa giác lồi trên mặt phẳng $A_1A_2...A_n$, $n \geq 4$ nội tiếp đường tròn là: $\sum_{i=2}^{n-1} A_iA_{i+1}(\prod_{k\neq 1} A_1A_k) = A_2A_n.A_1A_3...A_1A_{n-1}$"

Tiếp theo là một ứng dụng khác cuả phép nghịch đảo trong một bài toán cuả Nga (Liên Xô trước đây) đề nghị trong kỳ thi IMO 1985.

Bài toán 4. *Cho tam giác ABC. Một đường tròn tâm O đi qua điểm A, C và cắt lại đoạn AB, BC theo thứ tự tai hai điểm phân biệt K, N. Giả sử các đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và KBN cắt nhau tại đúng hai điểm phân biệt B, M. Chứng minh rằng: $\angle OMB = 90°$.*

Lời giải



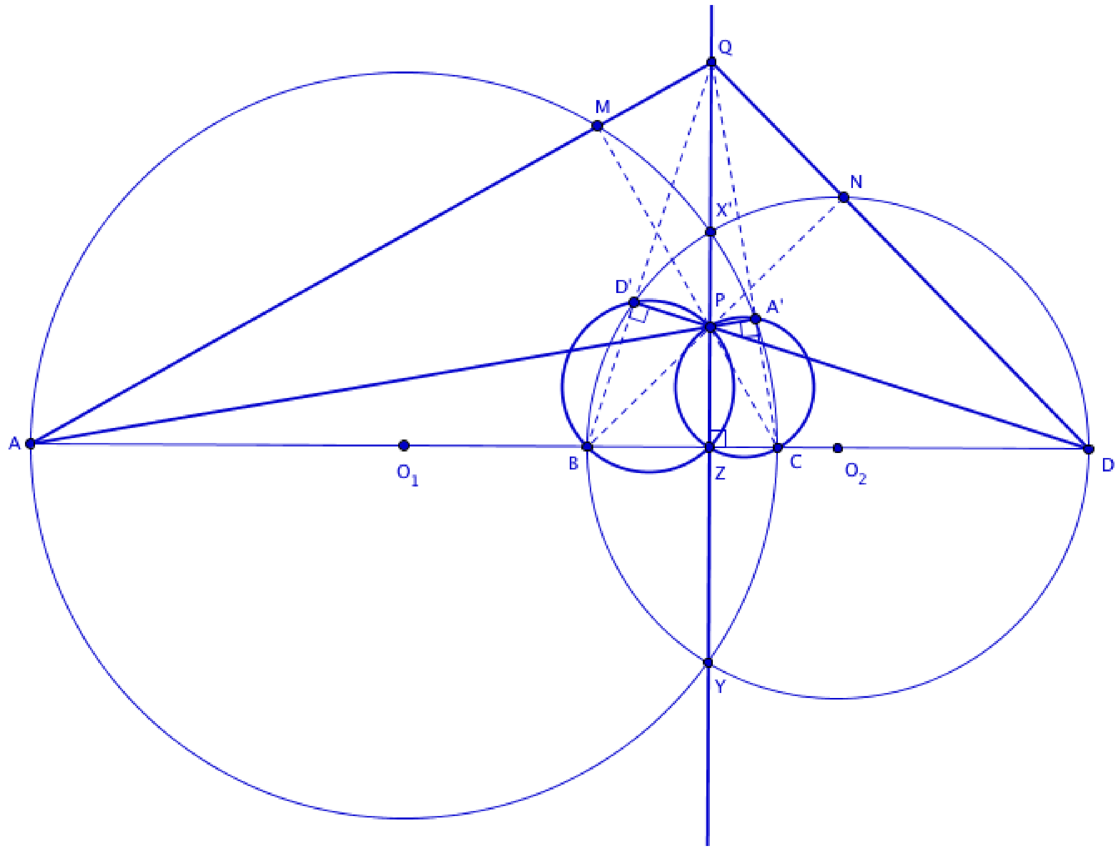
Gọi R là bán kính cuả đường tròn tâm (O) nói trên. Gọi $P \equiv KN \cap AC$, $S \equiv KC \cap AN$. Theo một kết quả quen thuộc thì B sẽ là đố cực cuả PS qua (O) và ngược lại P sẽ là đối cực cuả BS qua (O). Do đó S sẽ là đối cực cuả BP qua (O). Gọi $M' \equiv OS \cap BP$, ta có ngay $OM' \perp BP$. Mặt khác, ta lại có $BS \perp OP$ (Do BS là đường đối cực cuả P qua (O)), tương tự $PS \perp OB$. Ta suy ra được S là trực tâm $\triangle BOP$. Do đó nếu gọi $B' \equiv BS \cap OP$, ta có ngay B' là ảnh cuả P qua $\mathcal{I}(O, R^2)$. Ta lại có $\mathcal{I}(O, R) : A \mapsto A$, $C \mapsto C$. Do vậy $AC \mapsto (OAC)$, $P \in AC \Rightarrow B' \in (OAC) \Rightarrow PO.PB' = PA.PC$. Mặt khác, dễ thấy B, M', B', O đồng viên do đó $PM'.PB = PO.PB' \Rightarrow PM'.PB = PA.PC$ $\Rightarrow M' \in (ABC)$. Để ý rằng $PA.PC = PK.PN = PM'.PB$, do đó $M' \in (BKN)$. Hay nói cách khác $M' \equiv (BKN) \cap (ABC)$ $M \equiv M'$. Ta có ngay điề phải chứng minh $\square$.

Bài toán trên cũng là một dạng bài kinh điển. Có tới những ba cách chứng minh cho bài toán trên trong đó có một cách biến đổi góc và độ dài các cạnh khá cầu kỳ. Một lần nữa, với quan điểm phép nghịch đảo lại cho ta một lời giải đẹp "thuần" tính lý thuyết, không hề một chút tính toán cho bài toán cũ mà đẹp bên trên. Cũng xin nói thêm, điểm M trong bài toán có tên gọi là *điểm Miquel* đối với tứ giác toàn phần (BA, BC, PK, PA) có nhiều tính chất thú vị sẽ được giới thiệu trong bài viết kỳ khác.

Ta tiếp tục xem xét một ứng dụng khác cuả phép nghịch đảo qua bài đề nghị IMO cuả Bulgaria năm 1995.

Bài toán 5. *Cho A, B, C, D là bốn điểm phân biệt nằm trên một đường thẳng và được sắp xếp theo thứ tự đó. Các đường tròn đường kính AC, BD cắt nhau tại các điểm X, Y. Đường thẳng XY cắt BC tại Z. Cho P là một điểm trên đường thẳng XY khác Z. Đường thẳng CP cắt đường tròn đường kính AC tại C và M, đường thẳng BP cắt đường tròn đường kính BD tại B và N. Chứng minh rằng: AM, DN, XY đồng quy.*

Lời giải

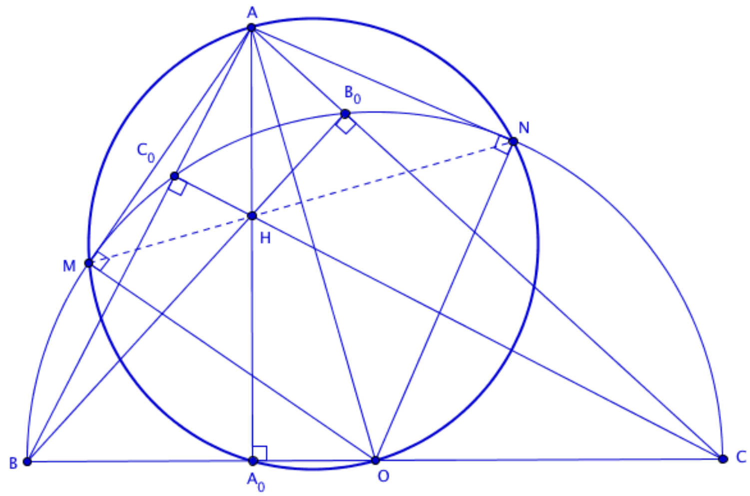


Gọi (C_1) là đường tròn đường kính AC, (C_2) là đường tròn đường kính BD. P nằm trên trên XY là trục đẳng phương của (C_1) và (C_2) do đó $\mathcal{P}_{P/(C_1)} = \mathcal{P}_{P/(C_2)}$. Nói cách khác ta có $\overline{PC}.\overline{PM} = \overline{PB}.\overline{PN} = k$. Xét phép nghịch đảo cực P, phương tích k, ta có $\mathcal{I}(P,k) : M \mapsto C$, $A \mapsto A'$ $\Rightarrow AM \mapsto (PA'C)$. Tương tự ta cũng có được $ND \mapsto (PBD')$, trong đó D' là ảnh của D qua phép nghịch đảo cực $\mathcal{I}(P,k)$. $XY \mapsto XY$. Do đó để chứng minh XY, AM, DN đồng quy, ta sẽ chứng minh XY là trục đẳng phương của $(PA'C)$ và (PBD'). Thật vậy, ta có $\angle PZC = \angle PA'C = 90^\circ \Rightarrow Z \in (PA'C)$. Tương tự ta cũng có được $Z \in (PBD')$. Do đó $PZ \equiv XY$ là trục đẳng phương của $(PA'C)$ và (PBD'). Từ đây ta có được điều phải chứng minh $\square$.

Một lần nữa phép nghịch đảo lại cho ta thấy được sự lợi hại của nó trong việc sự đồng quy. Có thể thấy để ý rằng, phép nghịch đảo đã làm giảm tối thiệu lượng đường tròn xuất hiện trong bài toán mà thay vào đó là các đường thẳng, hay các đường tròn có vẻ "dễ nhìn hơn". Biến cái xa lại gần, biến cái khó kiểm soát, khó nắm bắt thành cái dễ kiểm soát, dễ nắm bắt là một trong những đặc tính vô cùng lợi hại của phép biến hình đặt biệt này. Cũng lưu ý với bạn đọc rằng, bài toán trên có thể giải bằng trục đẳng phương bằng cách gọi Q và Q' lần lượt là giao điểm của AM, DN với XY rồi chứng minh $Q \equiv Q'$. Phần chi tiết xin dành cho bạn đọc. Tiếp theo sẽ lại là một ứng dụng khác của phép nghịch đảo, ta tiếp tục xét bài toán sau.

Bài toán 6. *Cho (O) đường kính BC. Một điểm A nằm ngoài (O). Gọi B_0, C_0 lần lượt là giao điểm của AC, AB với (O). Gọi H là giao điểm của BB_0, CC_0. Gọi M, N lần lượt là tiếp điểm của tiếp tuyến từ A đến (O). Chứng minh rằng H, M, N.*

Lời giải



Gọi A_0 là hình chiếu của A lên BC. Dễ thấy H là trực tâm tam giác ABC. Xét phép nghịch đảo cực A, phương tích $\overline{AB_0}.\overline{AC} = \overline{AC_0}.\overline{AB} = AM^2 = AN^2 = k$, ta có $\mathcal{I}(A,k) : M \mapsto M\ N \mapsto N$, $H \mapsto A_0$. Dễ thấy $\angle OMA = \angle ONA = \angle OA_0A = 90°$. Như vậy ta được $A_0 \in (AMN)$. Từ đó suy ra được M, H, N. $\square$

Phép nghịch đảo tỏ ra hữu hiệu trong việc chứng các bài toán thẳng hàng. Bài toán bên trên có thể được phát biểu một cách tổng quát hơn. Việc chứng minh chi tiết xin dành cho bạn đọc:

"Cho (O), từ điểm K bất kỳ nằm ngoài (O) kẻ các tiếp tuyến KM, KN đến (O) trong đó M, N là các tiếp điểm. Hai đường thẳng bất kỳ qua K cắt (O) tại các điểm lần lượt là (A, D), (B, C). Gọi G là giao điểm của AC và BD. Chứng minh rằng M, N, S thẳng hàng."

Ta tiếp tục xét bài toán sau. Đây là một bài toán tính chất đẹp, khó và thú vị cuả tác giả Hà Duy Hưng - giáo viên ĐHSP Hà Nội đăng trên tạp chí Toán Học Tuổi Trẻ

Bài toán 7. (THTT 360/6-2007) *Cho tứ giác $ABCD$ có cặp cạnh đối diện không song song và và hai đường chéo AC, BD cắt nhau tại O. Các đường tròn ngoại tiếp các tam giác OAB và OCD cắt nhau tại X và O. Các đường tròn ngoại tiếp các tam giác OAD và OCB cắt nhau tại Y và O. Các đường tròn đường kính AC và BD cắt nhau tại Z và T. Chứng minh rằng bốn điểm X, Y, Z, T cùng thuộc một đường thẳng hoặc đồng viên.*

Lời giải

Trước tiên đi việc chứng minh bài toán, ta xét bổ đề sau đây:

Bổ đề. *Cho tứ giác $ABCD$. E là giao điểm cuả AB, CD; F là giao điểm cuả AD, BC. Khi đó các đường tròn đường kính AC, BD, EF có cùng trục đẳng phương.*

Thật vậy, gọi H, K lần lượt là trực tâm cuả các tam giác ECB và FCD. Gọi L, M, N lần lượt là hình chiếu cuả H lên EB, EC, CB và P, Q, R lần lượt là hình chiếu cuả K lên DF, CF, CD. Khi đó ta thu được:

$$\overline{HL}.\overline{HC} = \overline{HM}.\overline{HB} = \overline{HN}.\overline{HE}$$

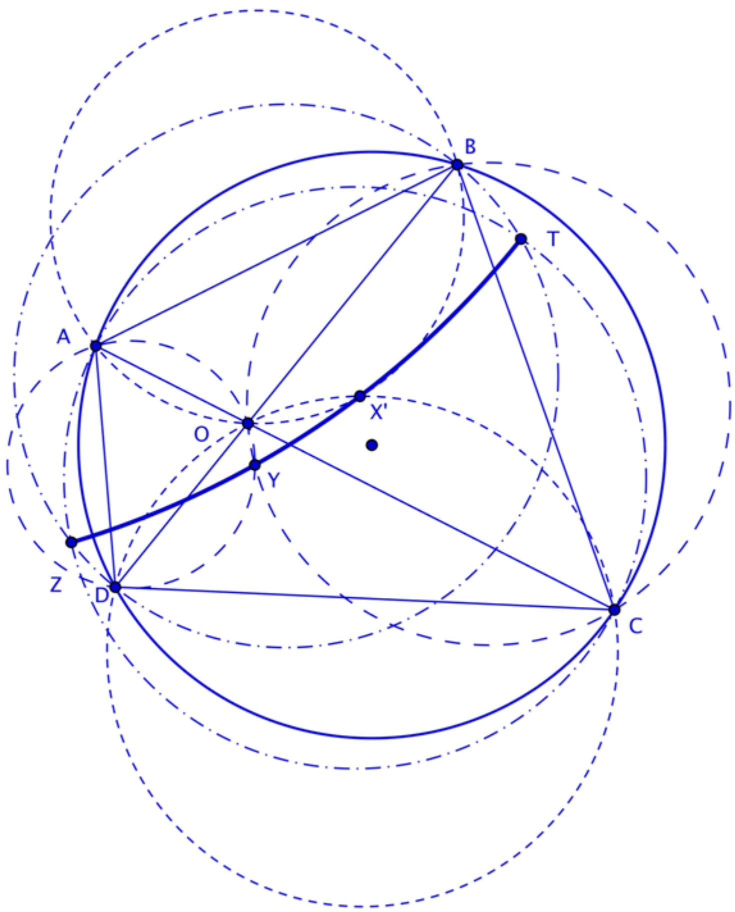
$$\overline{KP}.\overline{KC} = \overline{KQ}.\overline{KD} = \overline{KR}.\overline{KF}$$

Từ đó suy ra:

$$\mathcal{P}_{H/(AC)} = \mathcal{P}_{H/(BD)} = \mathcal{P}_{H/(EF)}$$

$$\mathcal{P}_{K/(AC)} = \mathcal{P}_{K/(BD)} = \mathcal{P}_{K/(EF)}$$

Điều trên chứng tỏ HK là trục đẳng phương chung cuả các đường tròn đường kính AC, BD, EF.

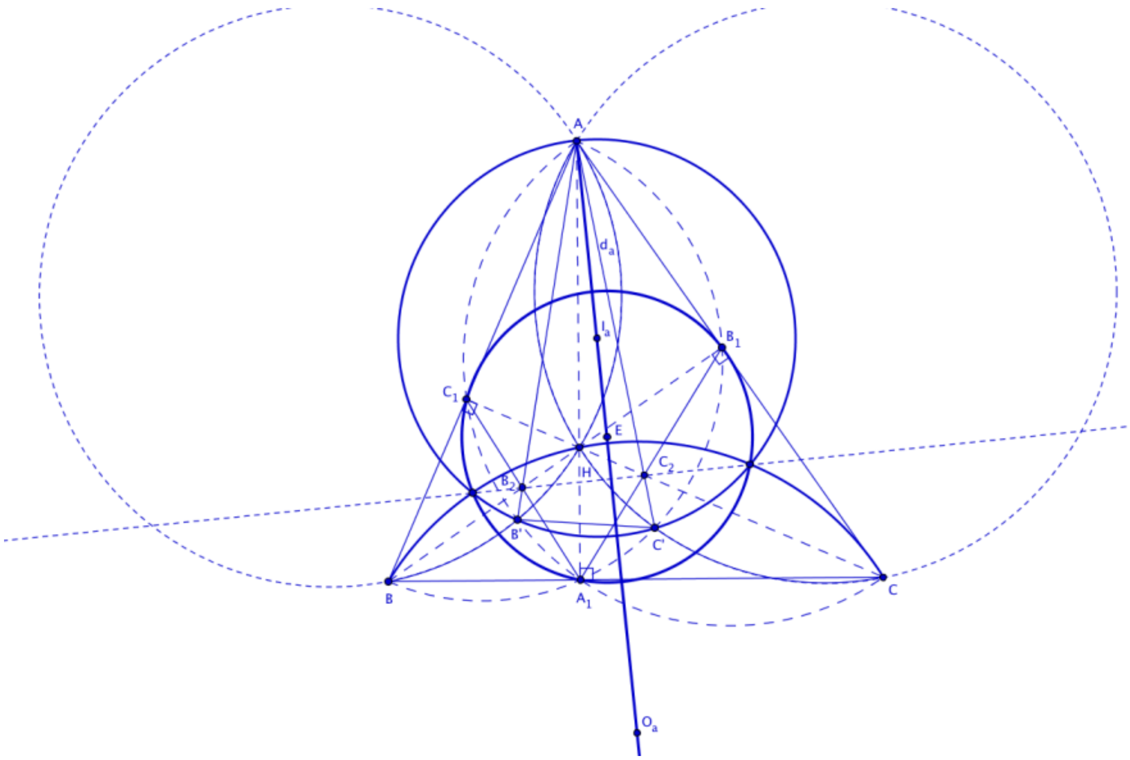


Trở về bài toán. Xét phép nghịch đảo cực O, phương tích k bất kỳ. Ta có $\mathcal{I}(O,k) : A \mapsto A'$, $B \mapsto B'$, $C \mapsto C'$, $D \mapsto D'$, $X \mapsto X'$, $Y \mapsto Y'$, $Z \mapsto Z'$, $T \mapsto T'$. Do đó $(OAB) \mapsto A'B'$, $(OBC) \mapsto B'C'$, $(OAD) \mapsto A'D'$, $(OCB) \mapsto C'B'$. Từ đó suy ra $X' \equiv A'B' \cap C'D'$, $Y' \equiv A'D' \cap B'C'$. Z', T' là giao cuả các đường tròn đường kính $A'C'$ và $B'D'$. Áp dùng bổ đề bên trên ta được X', Y', Z', T' đồng viên. Từ đó dẫn đến X, Y, Z, T đồng viên hay thẳng hàng. $\square$

Các bài toán mà có nội dung yêu cầu chứng minh các điểm đồng viên hay thẳng hàng như bài toán trên thì ý tưởng tự nhiên ban đầu cuả chúng ta khi tiếp cận bài toán là sử dụng phép nghịch đảo. Đây chỉ là chỉ một nhận định chủ quan cuả riêng tác giả dựa trên một số kinh nghiệm giải toán, bạn đọc có thể thấy việc dùng phép nghịch đảo trong các bài toán lại này là không cần thiết; cụ thể là **Bài toán 7** bên trên vẫn có thể giải được mà không dùng đến biến hình (Tham khảo lời giải trong số 366/thánh 12/2007 tạp chí THTT)- biến đổi góc và xét các cặp tam giác đồng dạng - không hề dễ nghĩ!. Song ý cuả tác giải muốn nói rằng qua "lăng kính" cuả phép nghịch đảo đã cho ta một lời giả đẹp, tự nhiên, đậm tính lý thuyết và quan trọng là không biến đổi tính toán phức tạp.

Bài toán 8. *Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp (O). Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là hình chiếu cuả A, B, C lên BC, CA, AB. Gọi H là trực tâm cuả $\triangle ABC$. Giả sử A_2, B_2, C_2 lần lượt là giao điểm cuả HA, HB, HC với B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1. Gọi d_a, d_b, d_c lần lượt là các đường thẳng qua A, B, C vuông* *góc với B_2C_2, C_2A_2, A_2B_2. Chứng minh rằng d_a, d_b, d_c đồng quy tại tâm đường tròn Euler của tam giác ABC.*

Lời giải



Nhận xét trước tiên của chúng ta khi tiếp cận bài toán là tính "đối xứng" của nó. Do vậy ta có thể chỉ tập trung vào việc chứng minh đường thẳng d_a đi qua tâm Euler của tam giác ABC sau đó lập luận tương tự cho d_b, d_c.

Gọi O_a, O_b, O_c lần lượt là tâm các đường tròn ngoại tiếp các tam giác $\triangle BHC$, $\triangle CHA$, $\triangle AHB$. Xét phép nghịch đảo cực A, phương tích $k = \overline{AC_1}.\overline{AB} = \overline{AH}.\overline{AA_1} = \overline{AB_1}.\overline{AC}$, khi ấy ta có $\mathcal{I}(A,k) : B \mapsto C_1$, $B_1 \mapsto C \Rightarrow BB_1 \mapsto (ACC_1)$, $H \mapsto A_1 \Rightarrow C_1A_1 \mapsto (HBA)$. Từ đó suy ra $\mathcal{I}(A,k) : B_2 \mapsto B'$, trong đó B' là giao của 2 đường tròn (ACC_1) và (HBA). Tương tự ta cũng có $C_2 \mapsto C'$ trong đó C' là giao của (ABB_1) và (HAC). Do vậy $B_2C_2 \mapsto (AB'C')$.

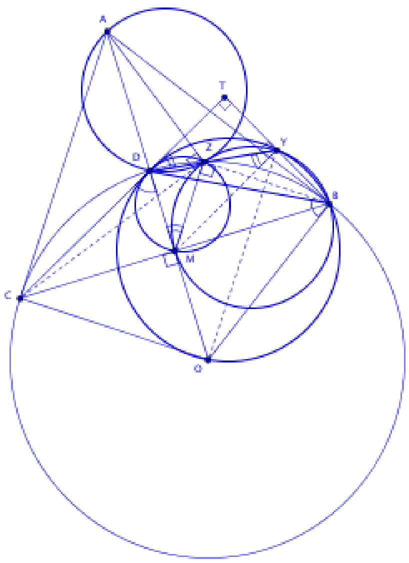
Gọi I_a là tâm của đường tròn ngoại tiếp $\triangle AB'C'$. Khi đó ta có $I_a \in d_a$. Mặt khác $\overline{B_2A_1}.\overline{B_2C_1} = \overline{B_2B'}.\overline{B_2A} = \overline{B_2H}.\overline{B_2B}$; chứng tỏ rằng $\mathcal{P}_{B_2/(I_a)} = \mathcal{P}_{B_2/(BHC)}$. Lập luận tương tự cho C_2. Do vậy, nếu gọi X, Y lần lượt là giao điểm của đường tròn ngoại tiếp các tam giác $AB'C'$ và BHC. Ta có ngay $B_2C_2 \equiv XY$. Khi ấy $\mathcal{I}(A,k) : X \mapsto X$, $Y \mapsto Y$. Mặt khác $H \mapsto A$, $B \mapsto C_1$, $C \mapsto B_1$; suy ra $(HBC) \mapsto (A_1B_1C_1) \Rightarrow X, Y \in (A_1B_1C_1)$. Dẫn đến $(A_1B_1C_1), (I_a), (BHC)$ là một chùm đường tròn. Để ý rằng $(A_1B_1C_1)$ là đường tròn Euler của tam giác ABC. Do vậy nếu gọi $\mathcal{E}$ là tâm của đường tròn Euler của $\triangle ABC$, ta thu được $\mathcal{E}$, I_a, O_a thẳng hàng. Hơn thế nữa, $\overline{I_a\mathcal{E}O_a} \perp XY \equiv B_2C_2$. Nhưng $AI_a \perp B_2C_2$. Suy ra $\mathcal{E} \in d_a$.

Lập luận tương tự cho d_b, d_c. Từ đó ta có được d_a, d_b, d_c đồng quy tại tâm đường tròn Euler của $\triangle ABC$. $\square$

Bài toán tiếp theo sau đây là một bài hình trong tuyển tập BMO 2007 được đề xuất bởi tác giả Cosmin Pohoata

Bài toán 9. (BMO 2007) *Cho (O) là một đường tròn và A là điểm nằm ngoài (O). Gọi AB, AC lần lượt là 2 tiếp tuyến từ A đến BC. Cho D là giao điểm cuả OA và (O). Gọi X là hình chiếu từ B lên CD. Giả sử Y là trung điểm cuả BX và Z là giao điểm thứ hai cuả DZ and (O). Chứng minh rằng: $\angle AZC = 90^\circ$*

Lời giải



Gọi M là trung điểm cuả BC. Xét phép nghịch đảo cực O, phương tích $k = R^2$, trong đó R là bán kính cuả (O). Ta có $\mathcal{I}(O,k) : A \mapsto M$, $D \mapsto D$, $Z \mapsto Z$. Vì vậy $\mathcal{I}(O,k) : (ADZ) \mapsto (MDZ)$. Để ý rằng $BD \mapsto (OBD)$ qua $\mathcal{I}(O,k)$. Ta dự đoán rằng BD là tiếp tuyến tại D cuả (ADZ).

Thật vậy, vì $D \equiv OA \cap (O) \Rightarrow \angle DCO = \angle CDO = \angle DBO$. Do đó CD là tiếp tuyến tại D cuả (OBD), (1).

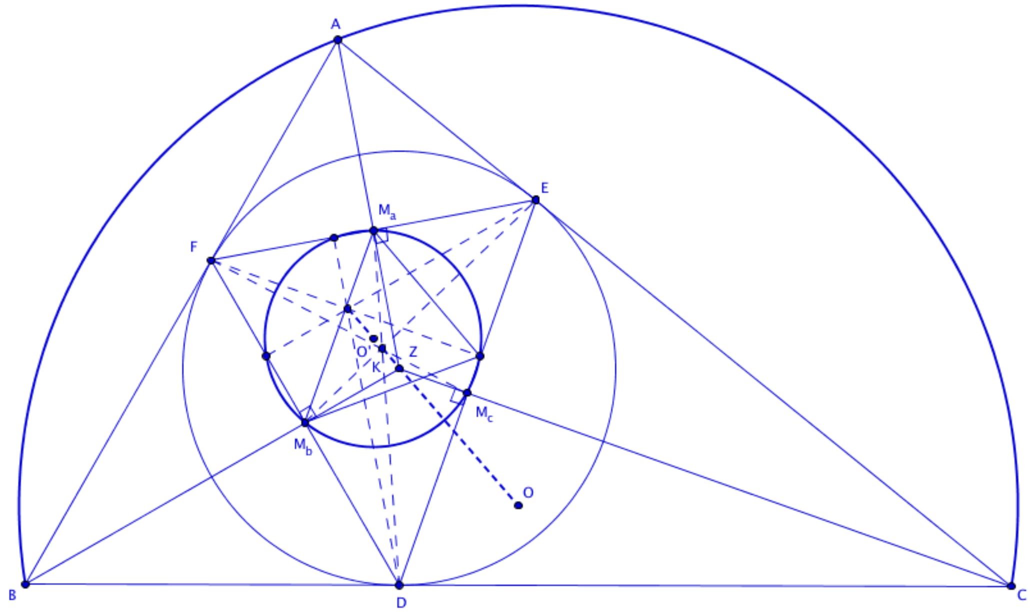
Ta có $ZDCB$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \angle YZB = \angle DCB \equiv \angle XCB$. Nhưng M, Y lần lượt là trung điểm cuả $BC, BX \Rightarrow MY || CX \Rightarrow \angle YMB = \angle XCB$. Vì vậy $\angle YZB = \angle YMB$. Suy ra $ZYBM$ nội tiếp $\Rightarrow \angle ZMB = \angle XYD$. Mặt khác $\angle DMB = \angle MYX = 90^\circ \Rightarrow \angle DMZ = \angle DYM = \angle XDY$ $(CX||MY)$, điều này nói lên DX cũng là tiếp tuyến tại D cuả (DZM), (2).

Từ $(1), (2)$, ta suy ra $\overline{CDX}$ là tiếp tyến chung tại D cuả (DZM) và (OBD). Khi ấy (DZM) và (OBD) tiếp xúc chung nhau tại D. Do đó BD là tiếp tuyến $(ADZ) \Rightarrow \angle BDZ = \angle DAZ \equiv \angle MAZ$. Mặt khác $\angle BDZ = \angle BCZ$. Suy ra $\angle MAZ = \angle BCZ \equiv \angle MCZ$, điều này chứng tỏ $AZMC$ nội tiếp đường tròn. Lại có $\angle AMC = 90^\circ \Rightarrow \angle AZC = 90^\circ$. $\square$

Thật ra, một chứng minh đầy đủ cho bài toán bên trên phải bao gồm những hai trường hợp: Trường hợp D nằm trên cung nhỏ cuả BC và D nằm trên cung lớn cuả BC. Lời giải trên cuả tác giả chỉ xét trong trường D nằm trên cung nhỏ cuả BC. Còn lời giải cho trường hợp còn lại chính là lời giải cuả chính tác giả bài toán bên trên, phần chi tiết cuả chứng minh này xin dành cho bạn đọc.

Bài toán 10. *Gọi O và R lần lượt là tâm và bán kính của đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$. Gọi Z và r lần lượt là tâm và bán kính cuả đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$. Giả sử K là trọng tâm cuả tam giác tạo bở các điểm tiếp xúc cuả (Z) với các cạnh cuả tam giác ABC. Chứng minh rằng $Z \in OK$ và* $\dfrac{OZ}{ZK} = \dfrac{3R}{r}$

Lời giải



Gọi D, E, F lần lượt là điểm tiếp xúc cuả (Z) với lần lượt các cạnh BC, CA, AB. Giải sử M_a, M_b, M_c lần lượt là trung điểm các cạnh EF, FD, DE. Xét phép nghịch đảo cực Z, phương tích $k = r^2$. Ta có $\mathcal{I}(Z, k) : D \mapsto D$, $E \mapsto E$, $F \mapsto F$ và $A \mapsto M_a$, $B \mapsto M_b$, $C \mapsto M_c$. Do đó $\mathcal{I}(Z, k) : (ABC) \mapsto (M_aM_bM_c)$. Để ý rằng $(M_aM_cM_c)$ là đường tròn 9- điểm Euler cuả $\triangle DEF$. Do vậy, nếu gọi O' là tâm cuả đường tròn $(M_aM_bM_c) \Rightarrow O', Z, O$ thẳng hàng. Mặt khác O' nằm trên đường thẳng Euler ZK cuả $\triangle DEF$. Vì vậy O, Z, K thẳng hàng.

Vì $(M_aM_bM_c)$ là ảnh cuả (ABC) qua phép nghịch đảo cực Z, phương tích k, do đó $(M_aM_bM_c)$ cũng là ảnh cuả (ABC) qua phép vị tự tâm Z, tỉ số $k_1 = \dfrac{k}{\mathcal{P}_{Z/(O)}} = \dfrac{r^2}{2Rr} = \dfrac{r}{2R} \Rightarrow \dfrac{ZO'}{ZO} = \dfrac{r}{2R}$. Mặt khác, xét trong $\triangle DEF$, ta có $\triangle DEF$ là ảnh cuả $\triangle M_aM_bM_c$ qua phép vị tự tâm K, tỉ số $k_2 = -2$, vì vậy $\mathcal{H}(K, k_2) : O' \mapsto Z \Rightarrow \dfrac{KZ}{KO'} = 2 \Rightarrow \dfrac{KZ}{ZO'} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow \dfrac{KZ}{ZO} = \dfrac{r}{3R}$. $\square$

Bài toán trên cho ta thấy mối liên hệ giữa phép vị tự và phép nghịch đảo. Bài toán chắc chắn có nhiều cách giải khác, song qua tư tưởng việc vận dụng mối liên hệ giữa phép nghịch đảo và vị tự đã cho ta một cách nhìn sáng suả, tự nhiên khi tiếp cận vấn đề. Bạn đọc sẽ gặp lại ý tưởng lời giải trên qua một câu trong phần bài tập áp dụng.

Ta kết thúc "chuyến đi" cuả chúng ta bằng một bài toán đi qua điểm cố định. Qua bài toán cuối cùng này, bạn đọc sẽ thấy rằng phép nghịch đảo tỏ rất hữu hiệu cho các dạng toán loại này.

Bài toán 11. *Cho (O) đường kính AB. Điểm I trên đoạn AB (khác A và B). Một đường thẳng d thay đổi qua I cắt (O) tại P, Q (d không trùng vớ AB). Đường thẳng AP, AQ cắt tiếp tuyến m tại M, N, trong đó m là tiếp tuyến tại B của (O). Chứng minh rằng (AMN) đi qua điểm cố định thứ hai, từ đó suy ra tâm của (AMN) luôn nằm trên một đường cố định.*

Lời giải

Xét phép nghịch đảo $\mathcal{I}(A, k)$, trong đó $k = AB^2$, khi đó ta có $\mathcal{I}(A, k) : (O) \mapsto m$, do đó $P \mapsto M$, $Q \mapsto N$. Như vậy $d \mapsto (AMN)$. Mặt khác $I \mapsto I'$ là điểm cố định, $I \in d \Rightarrow I' \in (AMN)$ do đó (AMN) luôn đi qua I' cố định. Vì (AMN) đi qua 2 điểm cố định là A, I' do đó tâm của (AMN) chạy trên trung trực của AI'. $\square$

III - Đôi nét về lịch sử

Trong cuốn *Topics in Elementery Geometry* của Bottema đã kết phần phép nghịch đảo bằng các dòng dưới đây, tôi xin được trích nguyên văn như sau:

"Inversion originated in the middle of the nineteenth century and was first researched extensively by Liouville (1847). Its great importance for elementary geometry is clear if we consider that it makes it possible to transform certain exercises in which circles are concerned, and in particular many constructions, into less complicated ones where one or more circles have been replaced by a line. For similar reasons, inversion was soon applied by physicists, for example by Thomson in the theory of electric fields. The transformation is also important from a more theoretical point of view. In analogy with what we have seen for affine and projective geometry, a conformal geometry or inversive geometry was developed, which only studies such notions and properties that are not only invariant for rigid motions and similarities, but also for inversions. This geometry therefore includes the notions of circle and angle, but not that of line, radius, or center. The figure of a triangle, that is, of three points, is not interesting in this geometry. We can in fact prove that it is always possible to choose an inversion in such a way that three given points are mapped into three other given points, so that from the point of view of conformal geometry all triangles are "congruent". This is clearly not the case for quadrilaterals, since four points can either all lie on a circle, or not. It is then no coincidence that we will use inversion to prove certain properties of quadrilaterals: these are in fact theorems from conformal geometry."

IV - Bài tập áp dụng

Bài 1. a) Nếu (O,R), (I,r) thoả mãn hệ thức $IO^2 = R^2 - 2Rr$ thì chúng là đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp tương ứng của một tam giác nào đó.

b) Nếu hai đường tròn (O,R), (I,r) thoả mãn $IO^2 = R^2 + 2Rr$ thì lần lượt , hai đường tròn đó là các đường tròm ngoại tiếp và bàng tiếp của một tam giác nào đó.

Bài 2. (Định lý Feurebach) Chứng minh rằng trong một tam giác thì đường tròn chín điểm Euler của tam giác ABC tiếp xúc với đường tròn nội tiếp tam giác và tiếp xúc lần lượt với các đường tròm bàng tiếp tam giác ABC.

Bài 3. Cho tam giác ABC. M là điểm bất kỳ nằm trong tam giác, H là trực tâm của tam giác. Các đường thẳng qua H vuông góc với AM, BM, CM tại BC, CA, AB lần lượt tại A_1, B_1, C_1. Chứng minh rằng: A_1, B_1, C_1 thẳng hàng.

Bài 4. Cho tam giác ABC với điểm M là điểm bất kỳ nằm trong tam giác. Đường thẳng vuông góc với MA, MB, MC tại M cắt BC, CA, AB tại các điểm A_0, B_0, C_0. Chứng minh rằng: A_0, B_0, C_0 thẳng hàng.

Bài 5. Cho tam giác ABC có (I) là tâm đường tròn nội tiếp tam giác. Gọi A_0, B_0, C_0 lần lượt là các điểm tiếp xúc của (I) với BC, CA, AB. Chứng minh rằng tâm của các đường tròn (AIA_0), (BIB_0), (CIC_0) thẳng hàng.

Bài 6. Cho tam giác ABC cố định nội tiếp đường tròn (O). M, N là hai điểm chạy trên AB, AC sao cho khoảng cách giữa hai hình chiếu của M, N lên BC luôn bằng $\frac{1}{2}$ BC. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác $\triangle AMN$ luôn đi qua một điểm cố định khác A.

Bài 7. Cho $\triangle ABC$ nhọn nội tiếp đường tròn (O). Gọi A_1, B_1, C_1lần lượt là hình chiếu của A, B, C lên BC, CA, AB. Gọi D là giao điểm thứ hai của AO và (O). Đặt M, N, P lần lượt là hình chiếu của D lên BB_1, BC, CC_1. AP cắt đường tròn đường kính AB tại P', AM cắt đường tròn đường kính AC tại M'. AN cắt đường tròn đường kính AH tại N'. Đường đối trung của $\triangle AB_1C_1$

cắt đường tròn đường kính AH tại I_a. Chứng minh rằng: I_a, M', N', P' đồng viên.

Bài 8. (CMO 2007) Cho $\triangle ABC$ nhọn nội tiếp (I) và ngoại tiếp (O). Gọi A_0, B_0, C_0 lần lượt là điểm tiếp xúc của (I) với BC, CA, AB. Gọi $(O_a), (O_b), (O_c)$ là các đường tròn ngoại tiếp tiếp tam giác AB_0C_0, BC_0A_0, CA_0B_0 lần lượt. Giả sử A_1 là giao điểm thứ hai của (O_a) và (O), B_1, C_1 định nghĩa tương tự. Chứng minh rằng: A_0A_1, B_0B_1, C_0C_1 đồng quy. Gọi N là điểm đồng quy này. Chứng minh N nằm trên đường thẳng Euler của tam giác $A_0B_0C_0$.

Bài 9 (China TST 2009) Cho $\triangle ABC$ và một điểm D nằm trên cạnh BC thoả mãn $\angle CAD = \angle CBA$. Một đường tròn (O) đi qua B, C cắt cạnh AB, AD một lần nữa lần lượt tại E, F. Gọi G là giao điểm của BF và DE. Giả sử M là trung điểm của AG. Chứng minh rằng: $CM \perp AG$.

Bài 10. (Serbia TST 2009) Cho k là đường tròn nột tiếp tam giác ABC không cân với tâm là S. k tiếp xúc với BC, CA, AB lần lượt tại P, Q, R. Gọi M là giao điểm của QR và BC. Một đường tròn đi qua B, C tiếp xúc với k tại N. Đường tròn ngoại tiếp tam giác $\triangle MNP$ cắt AP tại điểm thứ hai là L. Chứng minh rằng S, L, M thẳng hàng.

Bài 11. (III AMP Olympiad, pro.2) Cho $\triangle ABC$ với trực tâm H. Gọi D là chân đường cao từ B xuống AC và E là điểm đối xứng của A qua D. Đường tròn ngoại tiếp $\triangle EBC$ cắt đường trung tuyến từ A của $\triangle ABC$ tại F. Chứng minh rằng: A, D, H, F đồng viên.

Bài 12 (Iran Geometry exam 2004) Cho $\triangle ABC$ nội tiếp đường tròn tâm (O). Gọi A_1, B_1, C_1 là giao điểm của các tiếp tuyến từ A, B, C đến (O) lần lượt. Gọi A_3, B_3, C_3 là trung điểm của BC, CA, AB lần lượt. Đường thẳng vuông góc từ A_3 đến AO cắt tiếp tuyến từ A_1 của (O) tại X_a. X_b, X_c định nghĩa tương tự. Chứng minh rằng: X_a, X_b, X_c thẳng hàng.

Bài 13. (Chọn đội tuyển PTNK 2009) Cho đường thẳng d cố định, A là một điểm cố định nằm ngoài d. A' là hình chiếu của A trên d. B, C là hai điểm thuộc d sao cho $\overline{A'B}.\overline{A'C} = const$ $(B, C$ khác phía với $A)$. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu của A' lên AB, AC. Tiếp tuyến tại M, N của đường tròn đường kính AA' cắt nhau ở K. Chứng minh rằng K nằm một trên đường cố định.

Bài 14. (Đề đề nghị Olympic truyền thống 30/4) Cho đường tròn (O, R) tiếp xúc với d tại H cố định. M, N là hai điểm di động trên d sao cho $\overline{HM}.\overline{HN} = -k < 0$, $k = cosnt$. Từ M, N vẽ hai tiếp tuyến MA, NB tới (O). Chứng minh rằng: AB luôn đi qua điểm cố định.

Bài 15. (Đề đề nghị Olympic truyền thống 30/4- 2008) Cho tam giác ABC có đường trung tuyến AM, đường cao BD, CE. Giả sử P là giao điểm của DE và AM. Giả sử $AM = \frac{BC\sqrt{3}}{2}$. Chứng minh rằng P là trung điểm của AM.

Bài 16 Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp (O). Gọi A_0, B_0, C_0 lần lượt là hình chiếu cuả A, B, C trên BC, CA, AB tương ứng. Giải sử A_1, B_1, C_1 lần lượt là giao điểm thứ hai cuả các đường tròn ngoại tiếp các tam giác $\triangle AB_0C_0$, $\triangle BC_0A_0$ và $\triangle CA_0B_0$ với (O). A_2, B_2, C_2 lần lượt là giao điểm thứ hai cuả các trung tuyến kẻ tứ A, B, C đến (O). Chứng minh rằng A_2A_1, B_2B_1, C_2C_1 đồng quy.

Tài liệu tham khảo

[1] *Thi vô địch Toán quốc tế - IMO từ năm 1974- 2006*, Lê Hải Châu, Nhà Xuất Bản Trẻ.

[2] *Bài tập nâng cao và một số chuyên đề hình học 11*, Trần Văn Tấn, Nhà Xuất Bản Giáo Dục.

[3] *Các phép biến hình trong mặt phẳng*, Nguyễn Mộng Hy, Nhà Xuất Bản Giáo dục.

[4] *Trang web diễn đàn toán học MathLinks* - `http://mathlinks.ro`.

[5] *Topics in Elementary Geometry*, Bottema O., Springer 2008.

Applying $R, r, p-$ method in some hard problems

Tran Quang Hung, Hanoi National University[1]

Introduction

In this article we will use R, r, p - method to prove some inequalities in triangle

Given triangle ABC, we denote by a, b, c the sides, semiperimeter p, circumradius R, inradius r, centroid G, incenter I, orthocenter H, we have following famous formulas:

$ab + bc + ca = p^2 + r^2 + 4Rr$

$a^2 + b^2 + c^2 = 2(p^2 - r^2 - 4Rr)$

$OI^2 = R^2 - 2Rr \Rightarrow R \geq 2r$, this formula is well-known as Euler's.

$9IG^2 = p^2 - 16Rr + 5r^2 \Rightarrow p^2 \geq 16Rr - 5r^2$, this inequality is well-known as Gerretsen's

$IH^2 = 4R^2 + 3r^2 + 4Rr - p^2 \Rightarrow p^2 \leq 4R^2 + 4Rr + 3r^2$

$OH^2 = 9OG^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2) \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \leq 9R^2$

I - Garfunkel's lemmas

In this section we introduce the useful lemma which was proposed by Jack Garfunkel in Crux Math.

Lemma 1. *Let ABC be acute triangle prove that*

$$p^2 \geq 2R^2 + 8Rr + 3r^2$$

Proof.

The inequality equivalent to

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \geq (\cos A + \cos B + \cos C)^2$$

Let H be orthocenter of triangle ABC, we have $HA = 2R\cos A, HB = 2R\cos B, HC = 2R\cos C$ and by law of sine $a = 2R\sin A, b = 2R\sin B, c = 2R\sin C$ we need to prove

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq (HA + HB + HC)^2$$

Let $A'B'C'$ be Cevian triangle[2] of H we have

$$AA'.AH + BB'.BH + CC'.CH = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} \text{ and } \frac{HA}{AA'} + \frac{HB}{BB'} + \frac{HC}{CC'} = 2$$

Now apply Cauchy-Schwartz inequality we get

$$a^2 + b^2 + c^2 = (AA'.AH + BB'.BH + CC'.CH)(\frac{HA}{AA'} + \frac{HB}{BB'} + \frac{HC}{CC'}) \geq (HA + HB + HC)^2$$

We are done.

---

[1]Email: `hung100486@yahoo.com`

[2]`http://mathworld.wolfram.com/CevianTriangle.html`

Lemma 2. *Let ABC be acute triangle such that $\frac{\pi}{4} \le \min\{A, B, C\} \le \max\{A, B, C\} \le \frac{\pi}{2}$, prove that*

$$p^2 \le 3R^2 + 7Rr + r^2$$

Proof.

Using the indentities of R, r, p

$$\cos A + \cos B + \cos C = \frac{R + r}{r}$$

$$\cos A \cos B \cos C = \frac{p^2 - 4R^2 - 4Rr - r^2}{4R^2}$$

The inequality is equivalent to

$$3(\cos A + \cos B + \cos C) \ge 4 + 4 \cos A \cos B \cos C$$

Because $\frac{\pi}{4} \le \min\{A, B, C\} \le \max\{A, B, C\} \le \frac{\pi}{2}$ we can assume that $\frac{\pi}{4} \le A \le \frac{\pi}{3}$, therefore

$$(2 \sin^2 \frac{A}{2} + 2 \sin \frac{A}{2} - 1)(2 \sin \frac{A}{2} - 1) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow 3 \cos A + 6 \sin \frac{A}{2} - 4 \cos A \sin^2 \frac{A}{2} \ge 4 \qquad (1)$$

We have $|B - C| < \frac{\pi}{2}$ so

$$4 \cos A(1 + \cos \frac{B - C}{2}) > 2(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}) > 6 > 6 \sin \frac{A}{2}$$

therefore

$$4 \cos A(1 + \cos \frac{B - C}{2}) \ge 2(1 + \frac{1}{\sqrt{2}})(1 - \cos \frac{B - C}{2}) \ge 6 \sin \frac{A}{2}(1 - \cos \frac{B - C}{2})$$

$$\Leftrightarrow 3(\cos B + \cos C) - 6 \sin \frac{A}{2} + 4 \cos A \sin^2 \frac{A}{2} \ge 4 \cos A \cos B \cos C \qquad (2)$$

From (1), (2) we have

$$3(\cos A + \cos B + \cos C) \ge 4 + 4 \cos A \cos B \cos C$$

We are done.

Note that. When we apply Garfunkel's lemma in acute triangle then we obtain the inequality

$$\sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} \ge \frac{4}{3} \left(1 + \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}\right)$$

This inequality was propesed by Jack Garfunkel in Crux Math., vol 10 1984, problem 987, therefore we call it by Garfunkel's lemma.

II - Some problems

In this section, using standar notations in triangle, we will show somes problems solved by R, r, p method.

Problem 1. Let ABC be a triangle with area S, prove that

$$2(ab+bc+ca)-(a^2+b^2+c^2) \geq 4\left(\frac{a^2(p-a)}{b+c}+\frac{b^2(p-b)}{c+a}+\frac{c^2(p-c)}{a+b}\right) \geq 4\sqrt{3}S$$

Proof.

First at all, we will say something about these inequalities,

$$2(ab+bc+ca)-(a^2+b^2+c^2) \geq 4\sqrt{3}S \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2 \geq 4\sqrt{3}S+(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2$$

It is well-known under the name Finsler - Hadwiger inequality, and the inequality

$$\frac{a^2(p-a)}{b+c}+\frac{b^2(p-b)}{c+a}+\frac{c^2(p-c)}{a+b} \geq \sqrt{3}S$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{r_a+h_a}+\frac{b}{r_b+h_b}+\frac{c}{r_c+h_c} \geq \sqrt{3}$$

It makes Finsler-Hadwiger stronger, we now solve the first by the follow indentities of R, r, p

$$2(ab+bc+ca)-(a^2+b^2+c^2) = 16Rr+4r^2$$

$$\frac{a^2(p-a)}{b+c}+\frac{b^2(p-b)}{c+a}+\frac{c^2(p-c)}{a+b} = 2\frac{r((3r+2R)p^2-r^3-6r^2R-8R^2r)}{p^2+r^2+2Rr}$$

The first inequality equivalent to

$$2(ab+bc+ca)-(a^2+b^2+c^2) \geq 4\left(\frac{a^2(p-a)}{b+c}+\frac{b^2(p-b)}{c+a}+\frac{c^2(p-c)}{a+b}\right)$$

$$\Leftrightarrow 16Rr+4r^2 \geq 8\frac{r((3r+2R)p^2-r^3-6r^2R-8R^2r)}{p^2+r^2+2Rr}$$

$$\Leftrightarrow \frac{r(18Rr+24R^2+3r^2-5p^2)}{p^2+r^2+2Rr} \geq 0 \Leftrightarrow 5p^2 \leq 24R^2+18Rr+3r^2$$

Now using $p^2 \leq 4R^2+4Rr+3r^2$ we must to show

$$5(4R^2+4Rr+3r^2) \leq 24R^2+18Rr+3r^2 \Leftrightarrow 2(2R+3r)(R-2r) \geq 0$$

Which is true. Now for the second, we easily seen

$$\left(\frac{a^2(p-a)}{b+c}+\frac{b^2(p-b)}{c+a}+\frac{c^2(p-c)}{a+b}\right)^2 \geq 3\sum \frac{b^2c^2(p-b)(p-c)}{(a+b)(a+c)}$$

We will prove that

$$\sum \frac{b^2c^2(p-b)(p-c)}{(a+b)(a+c)} \geq S^2 = p^2r^2$$

We have

$$\sum \frac{b^2c^2(p-b)(p-c)}{(a+b)(a+c)} - p^2r^2 = \frac{r^3((r-8R)p^2+r^3+10r^2R+32R^2r+32R^3)}{p^2+r^2+2Rr}$$

Therefore, it is sufficient to show that

$$(r-8R)p^2+r^3+10r^2R+32R^2r+32R^3 \geq 0 \Leftrightarrow p^2 \leq \frac{r^3+10r^2R+32R^2r+32R^3}{8R-r}$$

but using inequality $p^2 \leq 4R^2 + 4Rr + 3r^2$, we only must show

$$4R^2 + 4Rr + 3r^2 \leq \frac{r^3 + 10r^2R + 32R^2r + 32R^3}{8R - r} \Leftrightarrow \frac{2r(2R-r)(R-2r)}{8R-r} \geq 0$$

Which is true.

Problem 2. *Let ABC be a triangle and AA', BB', CC' are bisector of ABC prove that*

$$p(A'B'C') \leq \frac{1}{4}p(ABC)$$

here $p(XYZ)$ show perimeter of triangle XYZ.

Proof.

We will prove stronger form of this inequality

$$B'C'^2 + C'A'^2 + A'B'^2 \leq \frac{p^2}{3}$$

When p is semi-perimeter of triangle ABC, indeed, we can use the following indentity of R, r, p, when AA', BB', CC' are bisector of triangle ABC then

$$\frac{p^2}{3} - B'C'^2 + C'A'^2 + A'B'^2 = \frac{p^2}{3} - \frac{8Rr^2((7R+8r)p^2 - 4R^2r - r^2R)}{p^4 + 4R^2r^2 + 4p^2Rr + 4r^3R + r^4 + 2p^2r^2}$$

$$= \frac{(96R^3r^3 + 24R^2r^4) + (-188r^3R - 164R^2r^2 + r^4)p^2 + (2r^2 + 4Rr)p^4 + p^6}{3(p^4 + 4R^2r^2 + 4p^2Rr + 4r^3R + r^4 + 2p^2r^2)}$$

Therefore, it is sufficient to show that

$$(96R^3r^3 + 24R^2r^4) + (-188r^3R - 164R^2r^2 + r^4)p^2 + (2r^2 + 4Rr)p^4 + p^6 \geq 0$$

It is equivalent to

$$4r^3(R-2r)(648R^2 - 237Rr + 10r^2) + 4r^2(183R^2 - 161Rr + 14r^2)(p^2 - 16Rr + 5r^2)$$

$$+13r(4R-r)(p^2 - 16Rr + 5r^2)^2 + (p^2 - 16Rr + 5r^2)^3 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 4r^3(R-2r)(2128r^2+2355r(R-2r)+648(R-2r)^2)+4r^2(424r^2+571r(R-2r)+183(R-2r)^2)13r(4R-r)$$

$$+(p^2 - 16Rr + 5r^2)^2 + (p^2 - 16Rr + 5r^2)^3 \geq 0$$

Which is true. Now from this inequality we easily seen

$$(A'B' + B'C' + C'A')^2 \leq 3(B'C'^2 + C'A'^2 + A'B'^2) \leq p^2$$

$$\Leftrightarrow p(A'B'C') \leq \frac{1}{4}p(ABC)$$

Problem 3. (Proposed by Ji chen) *Let ABC be a triangle, r_a, r_b, r_c are exradius, prove that*

$$\frac{r_a^2}{a^2} + \frac{r_b^2}{b^2} + \frac{r_c^2}{c^2} \geq \frac{9}{4} + \frac{15(b-c)^2(c-a)^2(a-b)^2}{4a^2b^2c^2}$$

Proof.

Use the indentities of R, r, p we have

$$\frac{r_a^2}{a^2} + \frac{r_b^2}{b^2} + \frac{r_c^2}{c^2} - \frac{9}{4} = \frac{(256rR^3 + 16r^3R + 96R^2r^2 + 256R^4 + r^4) + (2r^2 - 68R^2)p^2 + p^4}{16p^2R^2}$$

and

$$\frac{15(b-c)^2(c-a)^2(a-b)^2}{4a^2b^2c^2} = -\frac{15(64rR^3+48R^2r^2+12r^3R+r^4)+(-4R^2-20Rr+2r^2)p^2+p^4}{16p^2R^2}$$

Therefore we need to prove that

$$(256rR^3+16r^3R+96R^2r^2+256R^4+r^4)+(2r^2-68R^2)p^2+p^4$$
$$\geq -15(64rR^3+48R^2r^2+12r^3R+r^4)+(-4R^2-20Rr+2r^2)p^2+p^4$$
$$\Leftrightarrow (304rR^3+49r^3R+204R^2r^2+64R^4+4r^4)+(8r^2-32R^2-75Rr)p^2+4p^4 \geq 0$$

Now using $p^2 \leq 4R^2+4Rr+3r^2$ it is equivalent to

$$4r(4r+R)(R-2r)^2+r(43R-32r)(4R^2+4Rr+3r^2-p^2)+4(p^2-4R^2-4Rr-3r^2)^2 \geq 0$$

Which is true.

Note that. This inequality is form of famous inequality Iran 96 as following

$$\sum \frac{r_a^2}{a^2} = \sum \frac{p^2\tan^2\frac{A}{2}}{16R^2\sin^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{A}{2}} = \frac{1}{16}\left(\sum \sin A\right)^2\left(\sum \frac{1}{\cos^4\frac{A}{2}}\right)$$

$$= \left(\cos^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2}\right)\left(\sum \frac{1}{\cos^4\frac{A}{2}}\right) = \sum \frac{\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2}}{\cos^2\frac{A}{2}}$$

So it is equivalent to

$$\sum \frac{\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2}}{\cos^2\frac{A}{2}} \geq \frac{9}{4}+\frac{15(b-c)^2(c-a)^2(a-b)^2}{4a^2b^2c^2}$$

Using $\cos^2\frac{A}{2} = \frac{p(p-a)}{bc}$, it is equivalent to

$$\sum \frac{p(p-b)(p-c)}{a^2(p-a)} \geq \frac{9}{4}+\frac{15(b-c)^2(c-a)^2(a-b)^2}{4a^2b^2c^2}$$

Now we can replace $a = xy+xz, b = yz+yx, c = zx+zy$, $\forall x,y,z>0$ it is equivalent to

$$(xy+yz+zx)\left(\frac{1}{(x+y)^2}+\frac{1}{(y+z)^2}+\frac{1}{(z+x)^2}\right) \geq \frac{9}{4}+\frac{15(x-y)^2(y-z)^2(z-x)^2}{4(x+y)^2(y+z)^2(z+x)^2}$$

This is stronger than Iran 96 inequality.

Problem 4. (Proposed by Jack Garfunkel, problem 825 Crux Math.) *Let ABC be a triangle, prove that*

$$\tan^2\frac{A}{2}+\tan^2\frac{B}{2}+\tan^2\frac{C}{2}+8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \geq 2$$

Proof.

Using the indentities of R, r, p we have

$$\tan^2\frac{A}{2}+\tan^2\frac{B}{2}+\tan^2\frac{C}{2} = \frac{(4R+r)^2-2p^2}{p^2}$$

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\frac{r}{4R}$$

It is equivalent to

$$\frac{(4R+r)^2-2p^2}{p^2}+\frac{2r}{R}\geq 2\Leftrightarrow p^2\leq\frac{R(4R+r)^2}{2(2R-r)}$$

Using the result of Mittenpunkt[3] (middlespoint) M of triangle ABC, note that $M(a(p-a),b(p-b),c(p-c))$ in [4] , with O is circumcenter and using formula of distance, we can compute

$$MO^2=\frac{2(r-2R)p^2+R(4R+r)^2}{(4R+r)^2}$$

From $MO^2\geq 0$ we easily seen $p^2\leq\dfrac{R(4R+r)^2}{2(2R-r)}$.

Note that. $p^2\leq\dfrac{R(4R+r)^2}{2(2R-r)}\leq 4R^2+4Rr+3r^2$, where the second inequality is equivalent to

$$\frac{3r^2(R-2r)}{2(2R-r)}\geq 0$$

Problem 5. *Let ABC be a triangle prove that*

$$\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\geq\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\right)$$

Proof.

First at all we will prove the following inequality for acute triangle

$$\sin A+\sin B+\sin C\geq\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\cos A+\cos B+\cos C\right)^2$$

Actually, this problem was proposed by Jack Garfunkel in Crux Math 1990 and the solution of author in Curx Math 1991, here is our solution.

The inequality is equivalent to

$$\frac{p}{R}\geq\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{(R+r)^2}{R^2}\Leftrightarrow p^2\geq\frac{4(R+r)^4}{3R^2}$$

Now apply Garfunkel's lemma $p^2\geq 2R^2+8Rr+3r^2$ we must show

$$2R^2+8Rr+3r^2\geq\frac{4(R+r)^4}{3R^2}\Leftrightarrow\frac{(R-2r)(2R^3+12R^2r+9Rr^2+2r^3)}{3R^2}\geq 0$$

which is true, so we are done.

After that we introduce here the solution by Jack Garfunkel himseft,

We note that $\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}\leq\dfrac{1}{8}$ therefore

$$(\cos A+\cos B+\cos C)^2=\left(1+4\prod\sin\frac{A}{2}\right)=1+8\prod\sin\frac{A}{2}+16\prod\sin^2\frac{A}{2}\leq 1+10\prod\sin\frac{A}{2}$$

[3] http://mathworld.wolfram.com/Mittenpunkt.html
[4] http://mathworld.wolfram.com/BarycentricCoordinates.html

So me must prove that

$$\sin A+\sin B+\sin C\geq\frac{2}{\sqrt{3}}\left(1+10\prod\sin\frac{A}{2}\right)$$

It is equivalent to

$$\sqrt{3}p\geq 2R+5r\Leftrightarrow 3p^2\geq 4R^2+20Rr+25r^2$$

But by Garfunkel's lemma $p^2\geq 2R^2+8Rr+3r^2$, we must show

$$3(2R^2+8Rr+3r^2)\geq 4R^2+20Rr+25r^2\Leftrightarrow (R-2r)(4R+r)\geq 0$$

which is true, so we are done.

Now we apply

$$\sin A+\sin B+\sin C\geq\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\cos A+\cos B+\cos C\right)^2$$

in acute triangle with angle $\frac{\pi-A}{2},\frac{\pi-B}{2},\frac{\pi-C}{2}$, we obtain our problem.

Problem 6. (Proposed by Virgil Nicula on Mathlinks.ro) *Let ABC be three side of an acute triangle prove that*

$$\sqrt{\frac{b+c-a}{a}}+\sqrt{\frac{c+a-b}{b}}+\sqrt{\frac{a+b-c}{c}}\geq 3$$

Proof.

Note that $\sin^2\frac{A}{2}=\frac{(p-b)(p-c)}{bc}$, and $r=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$, therefore

$$\frac{a}{b+c-a}=\frac{a}{2(p-a)}=\frac{2R}{r}\sin^2\frac{A}{2}$$

Now we can write the inequality as

$$\sum\sqrt{\frac{r}{2R}}\frac{1}{\sin\frac{A}{2}}\geq 3\Leftrightarrow 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\left(\sum\frac{1}{\sin^2\frac{A}{2}}+2\sum\frac{1}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}\right)\geq 9$$

$$\Leftrightarrow\sum\frac{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}}+2\sum\sin\frac{A}{2}\geq\frac{9}{2}\Leftrightarrow\left(\sum\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)\left(\sum\frac{1}{\sin\frac{A}{2}}\right)\geq\frac{9}{2}$$

Now need to prove the inequality

$$\left(\sum\cos B\cos C\right)\left(\sum\frac{1}{\cos A}\right)\geq\frac{9}{2}$$

for triangle ABC such that $\frac{\pi}{2}\geq\max\{A,B,C\}\geq\min\{A,B,C\}\geq\frac{\pi}{4}$, indeed, write it in R,r,p, note that

$$\sum\cos B\cos C=\frac{p^2-4R^2+r^2}{4R^2},\ \sum\frac{1}{\cos A}=\frac{p^2-4R^2+r^2}{p^2-4R^2-4Rr-r^2}$$

We need to prove that

$$\frac{p^2-4R^2+r^2}{4R^2}.\frac{p^2-4R^2+r^2}{p^2-4R^2-4Rr-r^2}-\frac{9}{2}\geq 0$$

$$\Leftrightarrow 10R^2r^2 + 72R^3r + r^4 + 88R^4 + (-26R^2 + 2r^2)p^2 + p^4 \geq 0$$

Note that in triangle ABC such that $\frac{\pi}{2} \geq \max\{A, B, C\} \geq \min\{A, B, C\} \geq \frac{\pi}{4}$ then we have Garfunkel's Lemma $p^2 \leq 3R^2 + 7Rr + r^2$, the above inequality equivalent to

$$(r^2 + 8Rr + 19R^2)(R - 2r)^2 + (48r^2 + 66r(R - 2r) + 20(R - 2r)^2)(3R^2 + 7Rr + r^2 - p^2)$$

$$+(p^2 - 3R^2 - 7Rr - r^2)^2 \geq 0$$

Which is true, so we are done.

Note that. There are some nice equivalent form of this problem, let I be incenter of ABC.

$$\sqrt{\frac{b+c-a}{a}} + \sqrt{\frac{c+a-b}{b}} + \sqrt{\frac{a+b-c}{c}} \geq 3$$

$$\Leftrightarrow \sum \frac{1}{\sin \frac{A}{2}} \geq 6\sqrt{\frac{R}{2r}} \Leftrightarrow IA + IB + IC \geq 3\sqrt{2Rr}$$

Problem 7. (Proposed by Jack Garfunkel, Crux Math.) *Prove in acute triangle ABC we have*

$$\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2} \geq \frac{4}{\sqrt{3}}\left(1 + \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)$$

Proof.

First at all we will prove the inequality in triangle such ABC that $\frac{\pi}{2} \geq \max\{A, B, C\} \geq \min\{A, B, C\} \geq \frac{\pi}{4}$:

$$\sin A + \sin B + \sin C \geq \frac{4}{\sqrt{3}}(1 + \cos A \cos B \cos C)$$

It is equivalent to

$$\frac{p}{R} \geq \frac{4}{\sqrt{3}} \frac{p^2 - 4Rr - r^2}{4R^2} \Leftrightarrow 3R^2p^2 \leq (p^2 - 4Rr - r^2)^2$$

$$\Leftrightarrow (16R^2r^2 + r^4 + 8r^3R) + (-2r^2 - 8Rr - 3R^2)p^2 + p^4 \geq 0$$

Which is true, so we are done.

References

[1] *Crux Mathematicorum*, vol 10 - 1984, Canadian Mathematical Society.

[2] *Crux Mathematicorum*, vol 12 - 1986, Canadian Mathematical Society.

[3] Dragoslav S. Mitrinovic , J. Pecaric,V. Volenec, *Recent Advances in Geometric Inequalities*, Kluwer Academic Publishers, 1989.

Các phương pháp tính tích phân

Nguyễn Văn Vinh, Đại học Tổng hợp Quốc gia Belarus

Trong số trước chúng ta đã làm quen với một số kĩ thuật tính tích phân suy rộng, tích phân hàm phần nguyên, phần lẻ,... như phép biến đổi Laplace, Fourier hay khai triển tích phân thành chuỗi. Trong bài viết này chúng ta sẽ tìm hiểu thêm một vài phương pháp khác mà chủ yếu là phương pháp tích phân tham số, đây là một trong những phương pháp hết sức cơ bản nhưng hiệu quả khi ta áp dụng giải toán, bên cạnh đó là ứng dụng của hàm Gamma, Beta để tính tích phân.

I - Phương pháp tích phân tham số

Về các tính chất của loại tích phân này hầu hết các giáo trình giải tích điều đã có, nên không xét lại ở đây. Trong số các tính chất thì có hai tính chất khá quen thuộc mà ta hay áp dụng là vi phân và tích phân của tích phân chứa tham số. Chúng ta cũng chủ yếu xoay quanh hai tính chất này và một số các chú ý nhỏ khác để thu được kết quả. Điều kiện để tồn tại tích phân trong từng thí dụ không phức tạp xin bỏ qua, các bạn tự kiểm tra.

Trước tiên ta xem xét ứng dụng tính chất đạo hàm của tích phân chứa tham số. Chúng ta bắt đầu bằng một ví dụ đơn giản.

Ví dụ 1. *Tính*

$$I(m,n) = \int\limits_0^1 x^m (\ln x)^n dx$$

Lời giải. Khi áp dụng tính chất đạo hàm thì ta cần chú ý có hai con đường để áp dụng, chúng ta có thể xuất phát từ một tích phân đơn giản đã biết và sau đó vi phân liên tục theo biến mà ta cần để thu được kết quả, nhưng đôi lúc ta lại làm theo chiều ngược lại là đạo hàm tích phân cần tính theo biến thích hợp để thu được tích phân đơn giản hơn, bài này của chúng ta áp dụng kĩ thuật thứ nhất.

Ta có

$$\int\limits_0^1 x^m dx = \frac{1}{m+1}$$

Đạo hàm hai vế tích phân trên theo m ta thu được

$$\frac{d}{dm}\int\limits_0^1 x^m dx = \int\limits_0^1 x^m \ln x dx = -\frac{1}{(m+1)^2}$$

Lặp lại n lần bước làm trên ta thu được

$$\int\limits_0^1 x^m (\ln x)^n dx = (-1)^n \frac{n!}{(m+1)^{n+1}}$$

Một ví dụ cho phép ứng dụng thứ hai

Ví dụ 2. *Tính*

$$I(\lambda) = \int\limits_0^\lambda \frac{\ln(1+\lambda x)}{1+x^2} dx$$

Lời giải. Ta đạo hàm $I(\lambda)$ theo λ thu được

$$I'(\lambda) = \int_0^\lambda \frac{x}{(1+\lambda x)(1+x^2)}dx + \frac{\ln(1+\lambda^2)}{1+\lambda^2}$$

Bằng kĩ thuật tính tích phân thường ta thu được

$$\int_0^\lambda \frac{x}{(1+\lambda x)(1+x^2)}dx = -\frac{\ln(1+\lambda)^2}{(1+\lambda^2)} + \frac{\ln(1+\lambda^2)}{2(1+\lambda^2)} + \frac{\lambda}{1+\lambda^2}\arctan\lambda$$

Từ đó ta có

$$I'(\lambda) = \frac{\ln(1+\lambda^2)}{2(1+\lambda^2)} + \frac{\lambda}{1+\lambda^2}\arctan\lambda$$

Từ biểu thức cuối cùng ta thu được

$$I(\lambda) = \frac{1}{2}\arctan\lambda\ln(1+\lambda^2)$$

Trong một số trường hợp khi ta áp dụng kĩ thuật thứ hai thì tích phân tham số ta cần tính thoả mãn một phương trình tích phân nào đó

Ví dụ 3. *Tính*

$$I(\lambda) = \int_0^\infty e^{-x^2-\lambda^2/x^2}dx$$

Lời giải. Ta thấy sau khi đạo hàm thì tích phân ta cần tính thoả mãn phương trình tích phân thuần nhất tuyến tính

$$I'(\lambda) + 2I(\lambda) = 0$$

Nghiệm của phương trình trên chính là giá trị tích phân ta cần tính

$$I(\lambda) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2\lambda}$$

Tương tự ta có thể dễ dàng kiểm tra rằng

$$y(x,\mu) = \int_0^\pi e^{\mu x\cos\xi}d\xi$$

là nghiệm của phương trình vi phân

$$xy'' + y' - \mu^2 xy = 0$$

Tuy nhiên khi ta làm toán một số tích phân không chỉ chứa 1 tham số mà có thể có nhiều hơn, đòi hỏi chúng ta phải tiến hành đạo hàm nhiều lần và cũng chọn biến cho thích hợp.

Ví dụ 4. *Tính*

$$I(a,b) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan ax\,.\,\arctan bx}{x^2}dx,\quad \forall a,b\neq 0$$

Lời giải. Ta thấy tích phân cần tính chứa hai tham số khác nhau nên để tính chúng ta cũng tiến hành đạo hàm theo cả hai tham số và thu được

$$I''_{ab}(a,b) = \frac{\pi}{2\left(a+b\right)}$$

Từ đó ta tìm được

$$I(a,b) = \frac{\pi}{2}\left(a+b\right)\left(\ln(a+b)-1\right)+\phi(a)+\psi(b)$$

Từ tính liên tục của tích phân cần tìm ta thu được

$$\phi(a)+\psi(b) = \frac{\pi}{2}\left(b\left(1-\ln b\right)+a\left(1-\ln a\right)\right)$$

Do đó ta có

$$I(a,b) = \frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}\left(ab\right)\ln\frac{\left(|a|+|b|\right)^{|a|+|b|}}{|a|^{|a|}\,|b|^{|b|}}$$

Áp dụng các kĩ thuật trên ta có thể giải được một số bài toán khá thú vị

Ví dụ 5. *(SIAM-08-001) Tính*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Ci(an)}{n^2}$$

Lời giải. Đây là một công thức khá hay, bằng một số phép biến đổi ta nhanh chóng chuyển bài toán về tính

$$I(a) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(\int\limits_0^n \frac{\text{cosat - 1}}{\text{t}}dt\right)$$

Để tính biểu thức cuối ta đạo hàm hai vế theo

$$a$$

và thu được

$$I'(a) = -\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_0^n \frac{\sin at}{n^2}dt = \left(-\frac{\pi}{2}+\frac{a}{4}\right)$$

Từ đó ta có

$$I(a) = \frac{-\pi a}{2}+\frac{a^2}{8}$$

Cuối cùng ta thu được công thức chuỗi cần tìm khá đẹp

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Ci(an)}{n^2} = \frac{\pi^2\ln a}{6}-\zeta'(2)+\frac{\pi^2\gamma}{6}-\frac{\pi a}{2}+\frac{a^2}{8}$$

Thêm một ví dụ nữa khá hay

Ví dụ 6. *(CMJ-C904) Tính*

$$I = \int\limits_0^1\int\limits_0^1 \ln\Gamma(x+y)dxdy$$

Lời giải. Bằng một số phép đổi biến và chia miền tích phân bội đã cho ta thu được

$$I = \int\limits_1^2 \ln\Gamma(u)du + \int\limits_0^1 u\ln\frac{1}{u}du = \int\limits_1^2 \ln\Gamma(u)du + \frac{1}{4}$$

Ta cần tính tích phân

$$\int\limits_1^2 \ln\Gamma(u)du$$

Để tính tích phân này ta chuyển qua tính tích phân chưa tham số có dạng

$$I(p) = \int\limits_p^{p+1} \ln\Gamma(u)du \quad (p \geq 0)$$

Khi $p = 0$ ta dễ dàng tính được

$$I(0) = \frac{\ln 2\pi}{2}$$

Khi $p \geq 1$ ta có đạo hàm $I(p)$ theo p thì thu được

$$I'(p) = \ln\Gamma(p+1) - \ln\Gamma(p) = \ln p$$

Từ đó ta rút ra được

$$I(p) = \int\limits_0^p \ln x dx + I(0) = p\left(\ln p - 1\right) + \frac{\ln 2\pi}{2}$$

Từ các điều trên ta thu được kết quả cuối cùng

$$I = \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \ln\Gamma(x+y)dxdy = \frac{\ln 2\pi}{2} - \frac{3}{4}$$

Trong một số trường hợp tích phân cần tính khó mà lại không chứa tham số thì ta cần linh hoạt thêm các tham số phù hợp đảm bảo tính hội tụ của tích phân như ví dụ ở trên sẽ giúp ta tính toán khá đơn giản.

Ví dụ 7. *Tính tích phân*

$$I = \int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$$

Lời giải. Ta thấy để tính trực tiếp tích phân trên thì khá khó nên ta chuyển qua tính tích phân sau

$$I(a) = \int\limits_0^\infty e^{-\mathrm{ax}}\frac{\sin x}{x}dx$$

Chú ý rằng tích phân này hội tụ với mọi $a > 0$. Để tính tích phân trên thì đơn giản ta đạo hàm theo tham số a và thu được

$$I'(a) = \frac{-1}{1+a^2}$$

Từ đây ta rút ra được

$$I(a) = \frac{\pi}{2} - \arctan a$$

Và tích phân ta cần tính là

$$I = \frac{\pi}{2}$$

Ở trên chúng ta đã xem xét một số ví dụ ứng dụng phép đạo hàm tích phân tham số. Tiếp theo ta sẽ xem qua một số kĩ thuật của phép tích phân các tích phân tham số.

Ví dụ 8. *Tính tích phân*

$$I(a,b) = \int\limits_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} \sin\ln\frac{1}{x} dx \quad (a > 0, b > 0)$$

Lời giải. Để tính tích phân này ta không áp dụng được phép đạo hàm tích phân chứa tham số như trên mà ta chuyển tích phân cần tính về dạng tích phân kép dạng tham số.

Ta viết lại tích phân cần tính dưới dạng

$$I(a,b) = \int\limits_0^1 dx \int\limits_a^b x^p \sin\ln\frac{1}{x} dp$$

Ta viết lại tích phân trên dưới dạng

$$I(a,b) = \int\limits_a^b dp \int\limits_0^1 x^p \sin\ln\frac{1}{x} dx$$

Đặt

$$I_1(p) = \int\limits_0^1 x^p \sin\ln\frac{1}{x} dx$$

Ta có

$$I_1(p) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-(p+1)t} \sin t dt = \frac{1}{(p+1)^2 + 1}$$

Từ đó tích phân ban đầu cần tìm là

$$I(a,b) = \int\limits_a^b I_1(p) dp = \arctan(b+1) - \arctan(a+1) = \arctan\frac{b-a}{1+(a+1)(b+1)}$$

Một trong những ví dụ ta quen biết trong phép tích phân các tích phân tham số là giải phương trình tích phân Abel

Ví dụ 9. *Giải phương trình tích phân Abel có dạng*

$$\int\limits_0^x \frac{\phi(t)}{(x-t)^\alpha} dt = f(x) \quad (0 < \alpha < 1)$$

Lời giải. Ta thấy tích phân vế trái là tích phân phụ thuộc hai tham số, để giải phương trình tích phân Abel ta cần tác động thêm một tích phân theo tham số nữa của hàm vế trái.

Nhân hai vế của phương trình đã cho với $\frac{ds}{(x-s)^{1-\alpha}}$ và chuyển hai tham số trong tích phân vế trái thành α, s và tích phân cả hai vế theo s từ $0 \to x$ ta thu được

$$\int_0^x \frac{ds}{(x-s)^{1-\alpha}} \int_0^s \frac{\phi(t)}{(s-t)^{\alpha}} dt = \int_0^x \frac{f(s)}{(x-s)^{1-\alpha}} ds$$

Biến đổi vế trái ta thu được

$$\int_0^x \phi(t)dt \int_t^s \frac{ds}{(x-s)^{1-\alpha}(s-t)^{\alpha}} = \int_0^x \frac{f(s)}{(x-s)^{1-\alpha}} ds$$

Từ đó ta dễ dàng thu được

$$\int_0^x \phi(t)dt = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \int_0^x \frac{f(s)}{(x-s)^{1-\alpha}} ds$$

Từ đó ta có nghiệm của phương trình Abel là

$$\phi(x) = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \left[\frac{f(0)}{x^{1-\alpha}} + \int_0^x \frac{f'(s)}{(x-s)^{1-\alpha}} ds \right]$$

Sử dụng kĩ thuật tích phân các tích phân có chứa tham số ta tính được nhiều tích phân quen thuộc như Laplace, Lipchizt, Dirichlet, ...

Bên cạnh một số tích phân thông thường thì có khá nhiều tích phân đặc biệt cũng như hàm đặc biệt có dạng biểu diễn dưới dạng tích phân tham số. Một trong số đó là tích phân Eliptic với khá nhiều dạng biểu diễn khác nhau và cũng có không ít các ứng dụng liên quan đến lớp tích phân này. Vì vấn đề khá lớn nên nếu có dịp sẽ trở lại trong một bài viết riêng về "Tích phân Eliptic".

Bài tập áp dụng

Tính các tích phân sau

Bài 1.

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+\alpha)^{n+1}}, n \in N, \alpha > 0$$

Bài 2.

$$I(a,b) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x} dx, \quad a > 0, \ b > 0$$

Bài 3.

$$I(m,a,b) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} \sin mx dx, \quad \forall m \in R, \ a > 0, \ b > 0$$

Bài 4.

$$I(a) = \int_0^1 \frac{\ln(1-a^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}} dx, \quad |a| \le 1$$

Bài 5.

$$I(a) = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\arctan ax}{x^2\sqrt{x^2-1}}dx, \quad \forall a \in R$$

II - Hàm Gamma, Beta

Như chúng ta đã biết cùng với sự phát triển toán học thì số lượng các hàm toán cũng được mở rộng, nhiều hàm đặc biệt đóng vai trò to lớn trong giải tích cũng như các lĩnh vực khác mà có thể nói hai hàm Gamma, Beta là những hàm cơ bản với những ứng dụng hết sức cơ bản. Mức độ áp dụng của hai hàm này trong vấn đề tính toán vi tích phân hết sức lớn tuy nhiên vì bài viết chỉ có tính giới hạn nên chỉ nêu ra một số ví dụ có thể nói là hay để qua đó chúng ta thấy được cách áp dụng cũng như các phép biến đổi của nó.

Ví dụ 10. *(SSMJ-5073) Tính*

$$\int\limits_0^1 \{\ln x\}\, x^m dx$$

với $m > -1$

Lời giải. Bằng một số biến đổi cơ bản tích phân phần lẻ ta chuyển tích phân cần tính về dạng

$$\int\limits_0^1 \{\ln x\}\, x^m dx = \frac{1}{e^{1+m}-1} - \int\limits_0^{+\infty} te^{-t(m+1)}dt$$

Ta chú ý tích phân thứ hai dễ dàng biểu diễn được qua hàm Gamma và thu được kết quả cuối cùng là

$$\int\limits_0^1 \{\ln x\}\, x^m dx = \frac{1}{(e^{1+m}-1)(1+m)} - \frac{\Gamma(2)}{(m+1)^2} = \frac{1}{(e^{1+m}-1)(1+m)} - \frac{1}{(m+1)^2}$$

Tuy nhiên trong một số bài toán đòi hỏi ta có biến đổi linh hoạt để thu được biểu diễn của hàm Gamma

Ví dụ 11. *(Crux-3386) Tính*

$$\int\limits_0^\infty e^{-x}\left(\int\limits_0^x \frac{e^{-t}-1}{t}dt\right)\ln x dx$$

Lời giải. Bằng kĩ thuật khai triển chuỗi ta dễ dàng thu được

$$\int\limits_0^\infty e^{-x}\left(\int\limits_0^x \frac{e^{-t}-1}{t}dt\right)\ln x dx = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!n}\int\limits_0^\infty e^{-x}x^n \ln x dx$$

Ta thấy rằng tích phân trong tổng chuỗi có thể biểu diễn thong qua đạo hàm của hàm Gamma và từ đó ta dễ dàng tính được tổng trên

$$\int\limits_0^\infty e^{-x}\left(\int\limits_0^x \frac{e^{-t}-1}{t}dt\right)\ln x dx = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\Gamma'(n+1)}{n!n}$$

Vấn đề tính chuỗi trên bạn đọc có thể tự làm để hiểu rõ thêm.

Ứng dụng hai hàm này ta có thể thu được nhiều công thức biểu diễn tích phân và chuỗi khá đẹp ví dụ như là công thức dưới đây

Ví dụ 12. *Chứng minh*

$$\frac{1}{(k-1)!}\int\limits_0^1 (1-t)^{k-1} f(t^a)dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{c_n}{(na+1)(na+2)...(na+k)}$$

Trong đó $a > 0$ *và* $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \forall x \in (-1, 1)$

Lời giải. Thay hàm $f(x)$ biểu diễn dưới dạng chuỗi vào tích phân ở vế trái ta có

$$\frac{1}{(k-1)!}\int\limits_0^1 (1-t)^{k-1} f(t^a)dt = \frac{1}{(k-1)!}\sum_{n=0}^{+\infty} c_n \int\limits_0^1 t^{an}(1-t)^{k-1}dt = \frac{1}{(k-1)!}\sum_{n=0}^{+\infty} c_n B(an+1, k)$$

Sử dụng tính chất của hàm Beta ta thu được điều phải chứng minh.

Nói đến các ứng dụng của hàm Gamma, Beta ta không thể bỏ qua tích phân Dirichlet và các dạng biểu diễn của nó.

Ví dụ 13. *Cho*

$$V^{n,r}_{\|\cdot\|_p} = \left\{ (x_1, .., x_n) \in R^n, x_i \geq 0,\ \ \forall i = \overline{1, n} \middle| \, 0 \leq \|x_1, ..., x_n\|_p \leq r \right\}$$

và $n \in N, p \geq 1, r > 0, \beta \geq 1, \alpha_i > 0$

Tính tích phân sau

$$\int \cdots \int\limits_V x_1^{\alpha_1 - 1} ... x_n^{\alpha_n - 1} \left(1 - \frac{x_1^p + ... + x_n^p}{r^p}\right)^{\beta - 1} dx_1 dx_2 ... dx_n$$

Lời giải. Sử dụng tích phân Dirichlet và chú ý

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, \Gamma(1+x) = x\Gamma(x)$$

Ta thu được công thức tổng quát khá đẹp

$$\int \cdots \int\limits_V x_1^{\alpha_1 - 1} ... x_n^{\alpha_n - 1} \left(1 - \frac{x_1^p + ... + x_n^p}{r^p}\right)^{\beta - 1} dx_1 dx_2 ... dx_n = \frac{\Gamma(\beta) r^{\alpha_1 + ... + \alpha_n} \prod\limits_{i=1}^{n} \Gamma(1 + \alpha_1/p)}{\Gamma(\beta + (\alpha_1 + ... + \alpha_n)/p) \prod\limits_{i=1}^{n} \alpha_i}$$

Các bước biến đổi trung gian bạn đọc có thể xem thêm coi như là bài tập vận dụng.

Hàm Gamma và Beta được sử dụng làm định nghĩa cho một lượng lớn các hàm trong toán học như Bessel, PolyGamma, HyperGeometric,...

Vì các ứng dụng của hai hàm này khá lớn nên sẽ trở lại trong bài viết tiếp với các phương pháp vận dụng cụ thể hơn. Ở trên chủ yếu chỉ nêu ra một vài ví dụ để có cái nhìn về hai hàm này.

Bài tập áp dụng

Tính các tích phân sau

Bài 6.

$$\int_0^{\pi/2} (\sin\phi + cos\phi)^3 \sin^{-1/2}\phi \cos^{-1/2}\phi d\phi$$

Bài 7.

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2(2-x)}}$$

Bài 8.

$$I(p) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}\ln x}{1+x} dx, \;\; \forall p \in (0,1)$$

Bài 9.

$$I(p) = \int_0^{+\infty} x^p e^{-qx} \ln x dx \;\; (q > 0)$$

Bài 10.

$$\int_0^1 \left(\ln\frac{1}{x}\right)^p dx$$

Trong bài viết tiếp đến chúng ta sẽ xem xét ứng dụng của hàm Gamma, Beta và các hàm đặc biệt khác cùng với phép tính thặng dư.

Tài liệu tham khảo

1. Gorbuzov V.N.; *Giải tích Toán học: Tích phân phụ thuộc tham số* (Tiếng Nga), Grodno 2006.

2. *Tuyển tập MathVn - Các kĩ thuật biến đổi vi tích phân*, 2009 (preprint)

3. *SIAM, Problems and Solutions.* Link: `http://www.siam.org/journals/problems.php`

4. *Các tạp chí CMJ, CRUX, SSMJ,...*

5. A.M. Mathai, Hans J. Haubold; *Special Functions for Applied Scientists*; Springer, 2008.

6. Lê Văn Trực, Nguyễn Văn Thoả, *Phương pháp Toán cho Vật lý*; NXB ĐHQG Hà Nội.

Bài toán Kakeya

Mạch Nguyệt Minh[1] - University of Pisa, Italy
Phan Thành Nam[2] - University of Copenhagen, Denmark

I - Nhốt voi vào tủ lạnh!

Có lần chúng tôi gặp một câu đố vui rằng: "Làm thế nào để nhốt một con voi vào tủ lạnh?". Thú thật, đến bây giờ chúng tôi cũng không biết đáp án của câu đố này. Tuy nhiên, chúng ta hãy xem Toán học có thể xem xét vấn đề này như thế nào.

"Nhốt một con voi vào tủ lạnh!" Một cách Toán học, phát biểu này có nghĩa là đặt một vật "lớn" tùy ý vào bên trong một thể tích cho trước? Tất nhiên, bằng 1 phép co, câu hỏi này tương đương với: làm thế nào để đặt một vật cho trước vào trong một thể tích "bé" tùy ý. Điều này thoạt nghe hình như không tưởng, nhưng bạn đừng vội phản đối trước khi chúng ta định nghĩa thế nào là lớn, thế nào là bé, và, tất nhiên, thế nào là thể tích.

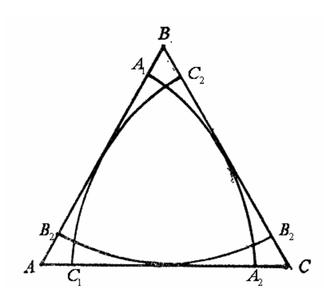
Để đơn giản, chúng ta hãy xét một hình tròn đường kính đơn vị trên mặt phẳng hai chiều. Một trong những đặc trưng cho sự "lớn" của hình tròn này là: nó chứa một đoạn thẳng độ dài đơn vị với phương tùy ý. Một cách hình ảnh, chúng ta có thể tưởng tượng một đoạn thẳng độ dài đơn vị là một cây kim. Vậy thì hình tròn đường kính đơn vị cho phép cây kim này quay đủ một vòng 360^0 mà không đi ra ngoài hình tròn.

Năm 1917, nhà Toán học Nhật Bản Soichi Kakeya đặt câu hỏi sau đây

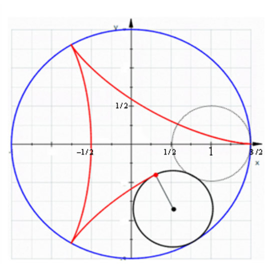
Kakeya needle problem. *Diện tích nào là bé nhất mà cho phép quay một đoạn thẳng độ dài đơn vị một cách liên tục đủ 360^0 (mà không đi ra ngoài diện tích đó)?*

Trong ví dụ đường tròn đường kính đơn vị nói trên cần một diện tích $\pi/4 \approx 0.785$. Một ví dụ khác, không tầm thường, là xét một tam giác đều ABC có chiều cao bằng 1 (xem Hình 1), khi đó từ đoạn thẳng AA_1 (độ dài 1) ta có thể cố định A và quay 60^0 để thành đoạn thẳng AA_2, sau đó tịnh tiến đoạn thẳng này để biến thành CC_1, rồi quay 60^0 để được CC_2 ... Như vậy toàn bộ diện tích đã sử dụng chính là $|ABC| = 1/\sqrt{3} \approx 0.577$ (ta ký hiệu $|S|$ cho diện tích của hình S).

Tuy nhiên, Kakeya nhận ra rằng chúng ta thậm chí có thể tiết kiệm diện tích hơn nếu quay đoạn thẳng trong một hình tam giác cong deltoid (Hình 2): đây là hình hypocycloid vạch bởi 1 điểm cố định trên 1 đường tròn bán kính 1/2 khi ta lăn nó trong 1 đường tròn bán kính 3/2. Diện tích hình này bằng $\pi/8 \approx 0.393$. Chú ý rằng trong hình tam giác cong đó thì khoảng cách từ mỗi đỉnh tới cạnh đối diện là 1. Các bạn hãy thử hình dung chúng ta có thể quay cây kim bên trong diện tích này như thế nào? (có thể xem ở [11]).



Hình 1



Hình 2

[1] Email: `mach@mail.dm.unipi.it` (M.N. Minh)
[2] Email: `ptnam@math.ku.dk` (P.T. Nam)

Kakeya giả thuyết rằng đây là hình có diện tích bé nhất. Năm 1925, G.D. Birkhoff khi viết về các bài toán mở trong một quyển sách của ông, trước hết đề cập tới bài toán bốn màu, sau đó ông thêm vào "Cùng một sự đơn giản lôi cuốn như vậy là câu hỏi được nêu cách đây vài năm của nhà Toán học Nhật Bản Kakeya." [1]

Năm 1928, Abram Samoilovitch Besicovitch, nhà Toán học Nga−Do Thái, đã giải quyết bài toán theo một lối đáng kinh ngạc: ông chứng minh đáp số cho bài toán Kakeya là "zero". Chính xác hơn, ông chỉ ra có thể tìm một hình có diện tích bé tùy ý mà vẫn cho phép quay một đoạn thẳng đơn vị một cách liên tục đủ 1 vòng [2]. Thậm chí nếu bỏ đi yêu cầu "quay liên tục" thì tồn tại một tập hợp có độ đo 0 (độ đo ở đây là độ đo Lebesgue, nếu không có chú thích khác) mà chứa một đoạn thẳng độ dài đơn vị theo mọi hướng. Một tập hợp như vậy ngày nay được gọi là tập Besicovitch.

Thật ra, Besicovitch quan tâm đến bài toán này bởi một căn nguyên độc lập với Kakeya. Trên một bài báo bằng tiếng Nga năm 1920 ông xem xét một câu hỏi trong tích phân Riemann: nếu f là một hàm khả tích Riemann trong mặt phẳng thì liệu có tồn tại một cặp tọa độ vuông góc sao cho với mọi y thì hàm số $x \mapsto f(x,y)$ khả tích Riemann (theo biến x) và hàm số $y \mapsto \int f(x,y)dx$ cũng khả tích Riemann (theo biến y)? Besicovitch phát hiện rằng điều này không đúng nếu ông có thể xây dựng một tập hợp compact có độ đo 0 và chứa một đoạn thẳng độ dài đơn vị theo mọi hướng [1].

Có một chi tiết thú vị là năm 1958, Hội Toán Học Mỹ có làm một series phim 4 tập về Toán ở nhiều bậc giáo dục. Ở tập cuối cùng Giáo sư A.S. Besicovitch được mời giảng về lời giải của ông cho bài toán Kakeya [1]. Có lẽ bài toán này là một ví dụ cho tính đơn giản và đẹp đẽ của Toán học.

Trong bài viết này, chúng ta sẽ tìm hiểu lời giải cho bài toán Kakeya (có lẽ lời giải này đủ đơn giản để một học sinh phổ thông có thể theo dõi được) và cách xây dựng một tập Besicovitch (bạn đọc cần một ít kiến thức cơ bản về giải tích hàm và lý thuyết độ đo). Cuối cùng liên hệ tới Giả thuyết Kakeya. Các bạn đọc muốn tìm hiểu thêm xin xem ở [11, 13].

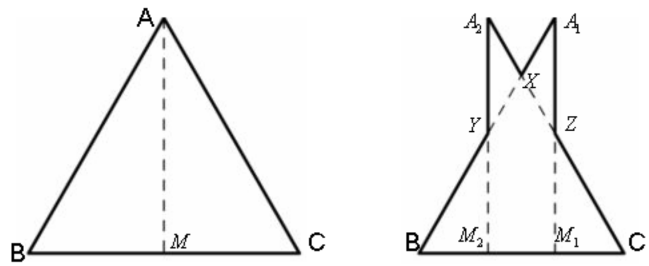
II- Lời giải cho bài toán Kakeya

Thật ra, các kết quả của Besicovitch đã có từ năm 1919, nhưng do tình hình bất ổn của nước Nga lúc bấy giờ nên chúng chỉ được biết đến rộng rãi khi được công bố sau này trên tờ Mathematische Zeitschrift (1928). Năm 1929, ý tưởng của Besicovitch đã được Perron đơn giản hóa. Chứng minh mà chúng ta tìm hiểu sau đây dựa trên trình bày ở [1, 4] và chúng tôi nghĩ rằng nó hoàn toàn thích hợp với một học sinh phổ thông.

Trước hết, để ý rằng thay vì yêu cầu quay cây kim (một cách liên tục) đủ 1 góc 360^0, ta chỉ cần xây dựng 1 tập hợp cho phép quay cây kim đủ 1 góc 90^0, sau đó dùng phép đối xứng ta dễ dàng thu được lời giải cho bài toán ban đầu.

Trở lại với câu hỏi: Làm sao để nhốt 1 con voi vào tủ lạnh? Câu trả lời phổ biến nhất mà chúng tôi tìm được trên Internet là: chặt con voi ra nhiều khúc, đặt từng khúc vào bên trong rồi đóng cửa tủ lạnh. Tất nhiêncâu trả lời này chỉ có nghĩa hài hước, nhưng ý tưởng ở đây hoàn toàn tương tự như vậy cộng với một điểm khác biệt: trong khi các thành phần khác nhau của con voi không thể chiếm cùng 1 vị trí trong không gian, thì các hình của chúng ta có thể chồng lên nhau trong mặt phẳng!

Cụ thể hơn, xét một tam giác ABC (không nhất thiết cân tại A). Tưởng tượng rằng ta cắt tam giác ABC dọc theo trung tuyến AM và được 2 tam giác con A_1BM_1, A_2CM_2 (Hình 3). Tịnh tiến A_1BM_1 bởi $\delta\overrightarrow{BC}$ ($\delta \in (0,1)$) để cho chồng lên A_2CM_2 thì ta được một hình mới có diện tích nhỏ hơn diện tích tam giác ban đầu. Điều quan trọng là mỗi đoạn thẳng AN với N bất kỳ thuộc đoạn BC vẫn thuộc hình mới (sau một phép tịnh tiến). Một phân tích chi tiết hình mới được cho trong Bổ đề 1 dưới đây (xin bạn đọc tự chứng minh xem như một bài tập hình học đơn giản).



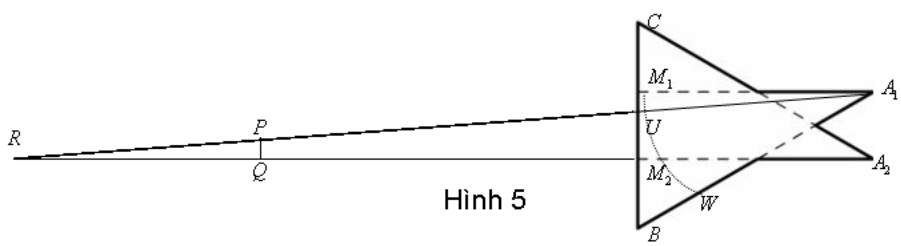
Bước 1 Bước 2

Hình 3

Bổ đề 1. *Hình 3 (Bước 2) tạo bởi 2 bộ phận: tam giác mới XBC đồng dạng với tam giác ban đầu với tỉ lệ $(1-\delta)$; hai "tai" (hai tam giác A_2XY và A_1XZ) có tổng diện tích bằng $2\delta^2$ diện tích tam giác ban đầu.*

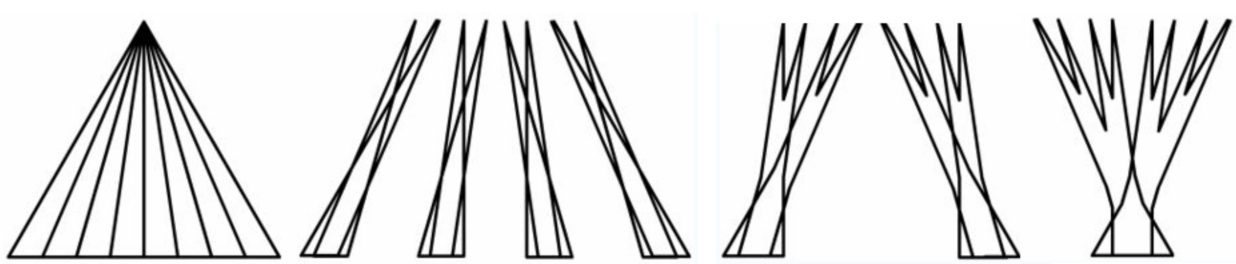
Tuy nhiên nếu bạn là một người "khó tính" (theo nghĩa Toán học) thì vẫn còn một chút không thoải mái. Đó là bằng cách tịnh tiến như vậy ta đã phá vỡ sự liên tục: trong Hình 3 (Bước 2) nếu $XB < 1$ thì ta không thể quay 1 đoạn thẳng độ dài đơn vị trên đoạn A_1B thành có phương A_2C một cách liên tục mà vẫn không đi ra ngoài hình vẽ.

Tuy nhiên khó khăn này có thể xử lý như sau. Để ý rằng $A_1M_1//A_2M_2$, do đó nếu ta lấy 1 điểm U thuộc đoạn M_1M_2 (nhưng khác M_1) thì A_1U và A_2M_2 sẽ cắt nhau tại 1 điểm R nào đó (xem Hình 5). Lúc này sự liên tục được khôi phục như sau: ta xuất phát từ 1 đoạn thẳng đơn vị A_1W với W thuộc A_1B; cố định A_1 và quay A_1W tới tia A_1R (quá trình này không đi ra ngoài diện tích tam giác ABC nếu đường cao từ A của tam giác này ≥ 1); trượt đoạn thẳng này theo tia A_1R cho đến khi một đầu mút là R; cố định R và quay đoạn thẳng tới tia RA_2; trượt đoạn thẳng này theo tia RA_2 cho đến khi một đầu mút là A_2; cuối cùng cố định A_2 và quay đoạn thẳng tới tia A_2C. Trong quá trình này diện tích sử dụng thêm là tam giác cân RPQ với các cạnh $RP = RQ = 1$; tuy nhiên diện tích này nhỏ hơn diện tích tam giác A_1M_1U và có thể làm nhỏ tùy ý bằng cách chọn U đủ gần M_1.



Hình 5

Tổng quát hơn, ta có thể chia tam giác ban đầu thành 2^N tam giác con, sau đó tịnh tiến từng cặp tam giác con để chúng phủ lên nhau (xem Hình 4 với $N = 3$). Bằng trực giác ta thấy rằng khi chọn N lớn lên thì ta có thể làm cho diện tích hình cuối cùng bé đi.



Bước 1 Bước 1 Bước 3 Bước 4

Hình 4

Để diễn đạt ý tưởng này một cách chặt chẽ, ta ký hiệu T là một tam giác ABC có đáy BC nằm trên đường thẳng d và đường cao từ A bằng 1. Với mỗi số nguyên dương N ta chia đoạn thẳng BC thành 2^N đoạn bằng nhau và từ đó thu được 2^N tam giác T_i chung đỉnh A trong đó T_{i-1} và T_i kề nhau. Đầu tiên ta tịnh tiến từng cặp tam giác (T_1, T_2), (T_3, T_4) ... như trường hợp trong Bổ đề 1 với tỉ lệ $\delta \in (0,1)$ và thu được 2^{N-1} hình có dạng như Hình 3 (Bước 2) trong đó mỗi hình gồm một tam giác mới $E_i = (1-\delta)(T_{2i-1} \cup T_{2i})$ và hai "tai" với diện tích $2\delta^2|T_{2i-1} \cup T_{2i}|$ (chú ý rằng $T_{2i-1} \cup T_{2i}$ là một tam giác, và nhắc lại là ta ký hiệu $|S|$ cho diện tích hình S). Để ý là các tam giác E_i sau một số phép tịnh tiến thích hợp có thể ghép lại thành một tam giác bằng với $(1-\delta)T$. Tiếp theo ta xem các tam giác mới E_i như là các tam giác T_i ở bước 1 và lại tịnh tiến chúng theo từng cặp (E_{2i-1}, E_{2i}) với cùng tỉ lệ $\delta > 0$ để được 2^{N-2} hình mới (khi tịnh tiến tam giác E_i thì hai "tai" của nó cũng được tịnh tiến theo)... Bằng cách đó sau N bước ta được một hình cuối cùng, gọi là cây Perron.

Định lý 1 (Perron tree)**.** *Diện tích của cây Perron không vượt quá* $\left((1-\delta)^{2N} + 2\delta\right)|T|$*. Nói riêng, chọn* δ *và* N *thích hợp ta có thể làm cho diện tích này bé tùy ý.*

Chứng minh. Sau bước đầu tiên ta được 2^{N-1} tam giác mới E_i và 2^N "tai" với tổng diện tích không quá $2\delta^2|T|$. Tương tự, sau bước thứ hai ta có 2^{N-2} tam giác mới và các "tai" mới với tổng diện tích không vượt quá $2\delta^2(1-\delta)^2|T|$... Tới bước thứ N ta được 1 tam giác mới bằng $(1-\delta)^N T$ với các "tai" mới với diện tích không quá $2\delta^2(1-\delta)^{2(N-1)}|T|$. Vậy tổng diện tích của cây Perron không vượt quá

$$\begin{aligned}
&\left|(1-\delta)^N(T)\right| + 2\delta^2\left(1 + (1-\delta)^2 + (1-\delta)^4 + ... + (1-\delta)^{2(N-1)}\right)|T| \\
&= (1-\delta)^{2N}|T| + 2\delta^2\frac{1-(1-\delta)^{2N}}{1-(1-\delta)^2}|T| \le \left((1-\delta)^{2N} + 2\delta\right)|T|.
\end{aligned}$$

Rõ ràng chọn δ đủ nhỏ sau đó chọn N đủ lớn ta có thể làm cho $(1-\delta)^{2N} + 2\delta$ bé tùy ý. (Ta cũng có thể chọn $\delta = \log(N)/(2N)$ và sử dụng bất đẳng thức $1 - \delta \le e^{-\delta}$ để suy ra $(1-\delta)^{2N} + 2\delta \le 2\log(N)/N$.) $\square$

Áp dụng định lý trên cho tam giác vuông cân $T = ABC$ với $A = (0,0), B = (1,0), C = (0,1)$ ta xây dựng 1 tập có độ đo nhỏ tùy ý (bao gồm một cây Perron và các phần thêm vào như ở Hình 5) mà vẫn cho phép quay một đoạn thẳng đơn vị một cách liên tục đủ một góc 90^0. Sau đó sử dụng 4 bản copy (qua phép đối xứng) của hình này, ta ghép lại được một hình có diện tích nhỏ tùy ý mà cho phép quay 1 đoạn thẳng đơn vị 1 cách liên tục đủ 360^0. Đó là câu trả lời cho bài toán Kakeya.

III - Tập Besicovitch

Trong mục trước ta thấy rằng với mỗi $\varepsilon > 0$ ta đều có thể xây dựng được một hình có diện tích không quá ε mà trong đó có thể quay 1 đoạn thẳng đơn vị một cách liên tục. Một câu hỏi tự nhiên là liệu ta có thể lấy $\varepsilon = 0$? Đáng tiếc, không quá khó khăn ta có thể thấy câu trả lời là phủ định.

Mệnh đề 1 (Terence Tao [12])**.** *Không tồn tại một tập có độ đo 0 mà trong đó một đoạn thẳng đơn vị có thể quay một cách liên tục trọn một vòng* 360^0.

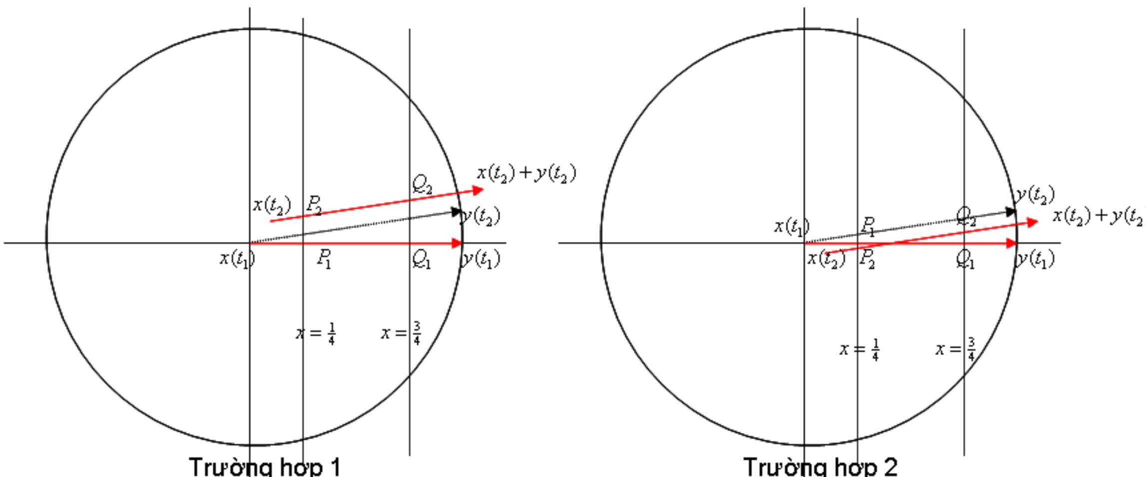
Để cho một chứng minh chặt chẽ kết quả này, chúng ta cần phát biểu bài toán dưới một dạng "giải tích" hơn. Một đoạn thẳng đơn vị có thể tham số hóa bởi $\ell = \{(u + sv | s \in [0,1]\}$ với $u \in \mathbb{R}^2$ và $v \in S^1$, trong đó $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\}$ là đường tròn đơn vị. Như vậy kết quả trên phát biểu rằng nếu

$$\ell(t) := \{u(t) + sv(t) | s \in [0,1]\}$$

với $u : [0,T] \to \mathbb{R}^2$ liên tục, $v : [0,T] \to S^1$ liên tục và toàn ánh, thì tập hợp $\{\ell(t) | t \in [0,T]\}$ không thể có độ đo 0. Thật ra trong chứng minh dưới đây ta thấy rằng chỉ cần yêu cầu ánh xạ v không là hằng số.

Chứng minh. Vì u và v liên tục trên khoảng đóng $[0, T]$ nên chúng liên tục đều. Do đó với $\delta = \frac{1}{8}$ tồn tại $\varepsilon > 0$ sao cho $|u(t_1) - u(t_2)| < \delta$, $|v(t_1) - v(t_2)| < \delta$ nếu $|t_1 - t_2| \le \varepsilon$.

Bởi vì $v : [0, T] \to S^1$ không là hằng số, tồn tại t_1, t_2 sao cho $0 < |t_1 - t_2| \le \varepsilon$ và $v(t_1) \ne v(t_2)$. Để đơn giản, bằng phép tịnh tiến và quay nếu cần, ta có thể giả sử $u(t_1) = (0, 0)$ và $v(t_1) = (1, 0)$. Với mọi $t \in [t_1, t_2]$ ta có $|u(t)| = |u(t) - u(t_1)| < \delta = 1/8$, do đó $u(t)$ nằm ở bên trái đường thẳng $x = \frac{1}{4}$. Tương tự $u(t) + v(t)$ nằm ở bên phải đường thẳng $x = \frac{3}{4}$. Vậy đoạn thẳng $\ell(t) := \{u(t) + sv(t) | s \in [0, 1]\}$ cắt mỗi đường thẳng $x = a$ với $a \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$ tại một điểm, ký hiệu là $(a, w_a(t))$. Bởi vì $w_a(t)$ liên tục và $w_a(t_1) = 0$ nên $[0, u_a(t_2)] \subset w_a([t_1, t_2])$.



Hình 6

Nói riêng, đoạn thẳng $\ell(t_1), \ell(t_2)$ cắt các đường thẳng $x = \frac{1}{4}$, $x = \frac{3}{4}$ lần lượt tại P_1, Q_1 và P_2, Q_2 (xem Hình 6). Theo phân tích ở trên, với mọi điểm (a, b) thuộc đoạn P_2Q_2 thì đoạn thẳng nối (a, b) và $(a, 0)$ hoàn toàn nằm trong tập hợp $\{\ell(t) | t \in [t_1, t_2]\}$. Vậy $\{\ell(t) | t \in [t_1, t_2]\}$ chứa tứ giác $P_1P_2Q_2Q_1$ (đây là tứ giác lồi nếu PQ không cắt trục hoành − Trường hợp 1, và là tứ giác lõm nếu PQ cắt trục hoành − Trường hợp 2). Hiển nhiên diện tích tứ giác $P_1P_2Q_2Q_1$ lớn hơn 0, và ta có điều phải chứng minh. □

Như vậy với yêu cầu "cây kim" phải quay liên tục thì diện tích mà nó chiếm chỗ phải có độ đo dương (mặc dù có thể nhỏ tùy ý). Tuy nhiên trong một số vấn đề thì sự kiện "có độ đo 0" trở nên quan trọng, trong khi yêu cầu "quay liên tục" không còn cần thiết. Chẳng hạn, các tập hợp có độ đo 0 được xem là "không đáng kể" trong lý thuyết tích phân: việc thay đổi giá trị một hàm số trên một tập có độ đo 0, mặc dù có thể phá vỡ một cách nghiêm trọng sự liên tục, lại không hề ảnh hưởng tới tích phân của hàm số đó. Thật ra, như đã nói trong mục đầu tiên, ban đầu Besicovitch quan tâm đến câu hỏi rằng: nếu f là một hàm khả tích Riemann trong mặt phẳng thì liệu có tồn tại một cặp tọa độ vuông góc sao cho với mọi y thì hàm số $x \mapsto f(x, y)$ khả tích Riemann (theo biến x) và hàm số $y \mapsto \int f(x, y)dx$ cũng khả tích Riemann (theo biến y)? Besicovitch thấy rằng để phủ định điều này, ông chỉ cần tìm một tập compact có độ đo 0 và chứa một đoạn thẳng độ dài đơn vị theo mọi hướng.

Định lý 2 (Besicovitch). *Tồn tại một tập compact trong mặt phẳng, có độ đo 0, và chứa một đoạn thẳng độ dài đơn vị với phương tùy ý.*

Tất nhiên, như ở mục trước, bằng cách lấy đối xứng, ta chỉ cần xây dựng một tập hợp chứa một đoạn thẳng đơn vị tạo với trục hoành 1 góc bất kỳ trong $[0, \pi/2]$. Ta sẽ sử dụng các cây Perron ở mục trước, cùng với một phép chuyển qua giới hạn, để xây dựng một tập hợp như vậy.

Chứng minh. Ý tưởng chính là ta dùng các cây Perron làm "khung" để xây dựng một dãy các tập mở bị chặn $\{V_k\}_{k=1}^{\infty}$ thỏa mãn:

(i) $\overline{V_{k+1}} \subset V_k$ với mọi $k = 1, 2, ...$ và $\lim_{k\to\infty} |V_k| = 0$ ($|V_k|$ là độ đo của tập V_k).

(ii) V_k chứa một đoạn thẳng đơn vị tạo với trục hoành 1 góc bất kỳ trong $[0, \pi/2]$.

Khi đó $E = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \overline{V_k}$ là tập cần tìm. Thật vậy, vì mỗi$\overline{V_k}$ là một tập compact nên E compact. Hơn nữa điều kiện (i) đảm bảo E có độ đo 0. Bây giờ xét $\ell := \{u + sv, s \in [0, 1]\}$ ($u \in \mathbb{R}^2$, $v \in S^1$) là một vector đơn vị tạo với trục hoành 1 góc bất kỳ trong $[0, \pi/2]$, ta sẽ chứng tỏ tồn tại 1 phép tịnh tiến $t \in \mathbb{R}^2$ sao cho $\ell + t := \{(u + t) + s(v + t), s \in [0, 1]\} \subset E$. Thật vậy, do điều kiện (ii) với mỗi $k \in \mathbb{N}$ tồn tại $t_k \in \mathbb{R}^2$ saocho $\ell + t_k \subset V_k$. Bởi vì $V_k \subset V_1$ bị chặn nên dãy $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$ bị chặn. Do đó tồn tại một dãy con $\{t_{k_r}\}_{r=1}^{\infty}$ hội tụ về một vector t trong $\mathbb{R}^2$. Với mỗi $m \in \mathbb{N}$ thì $\ell + t_{k_r} \subset V_{k_r} \subset V_m$ với r đủ lớn, do đó cho $r \to \infty$ ta được $\ell + t \subset \overline{V_m}$. Vì điều này đúng với mọi m nên $\ell + t \subset E$.

Trong phần còn lại của chứng minh ta sẽ sử dụng các cây Perron để xây dựng một dãy tập hợp $\{V_k\}$ như thế. Ta thống nhất rằng các cây Perron đề cập tới bên dưới được hiểu là các tập đóng.

Bước 1 ($k = 1$)**.** Lấy T_0 là một tam giác (đóng) ABC với đáy BC nằm trên đường thẳng d và đường cao từ A bằng 1, và lấy V_0 là một tập mở bị chặn chứa T_0. Ta sẽ xây dựng một cây Perron T_1 từ T_0 như ở Định lý 1 sao cho $|T_1| \le 2^{-2}$, hơn nữa ta muốn cây Perron này nằm trong V_0.

Trước hết, ta chọn $\varepsilon > 0$ đủ nhỏ sao cho lân cận mở $B(T_0, \varepsilon) := \{a + b | a \in T_0, |b| < \varepsilon\}$ thỏa mãn $\overline{B(T_0, \varepsilon)} \subset V_0$ (bạn đọc hãy giải thích tại sao ta có thể chọn ε như vậy?). Lấy $\delta > 0$ đủ nhỏ và $N \in \mathbb{N}$ đủ lớn, ta xây dựng được một cây Perron T_1 theo Định lý 1 (là hợp của 2^N tam giác con có đáy trên đường thẳng d và chiều cao bằng 1, các tam giác này có thể chồng lên nhau) sao cho $|T_1| \le 2^{-2}$.

Ta chứng minh rằng nếu N đủ lớn sao cho $2^{-N} < \varepsilon$ thì $T_1 \subset B(T_0, \varepsilon)$. Thật vậy, trở lại với cách xây dựng cây Perron ở Định lý 1, ta thấy rằng ở bước đầu tiên ta tịnh tiến mỗi tam giác con một đoạn không quá $\delta 2^{-N}$ (2^{-N} là cạnh đáy của mỗi tam giác con), ở bước thứ 2 ta tịnh tiến mỗi tam giác con mới một đoạn không quá $\delta(1-\delta)2^{-N}$ ($(1-\delta)2^{-N}$ là cạnh đáy của mỗi tam giác con mới)... và tổng cộng trong cả quá trình ta tịnh tiến mỗi tam giác con một đoạn không quá

$$\delta 2^{-N}(1 + (1-\delta) + ... + (1-\delta)^{N-1}) = \delta 2^{-N} \frac{1 - (1-\delta)^N}{1 - (1-\delta)} \le 2^{-N} < \varepsilon.$$

Vậy mỗi điểm trong T_0 sau quá trình này được tịnh tiến một đoạn nhỏ hơn ε, do đó không thể đi ra ngoài lân cận $B(T_0, \varepsilon)$. Vậy $T_1 \subset B(T_0, \varepsilon)$.

Cuối cùng, ta chọn V_1 là tập mở chứa T_1 và nằm trong $B(T_0, \varepsilon)$ sao cho $|V_1| \le |T_1| + 2^{-2} \le 2^{-1}$ (bạn đọc hãy giải thích tại sao ta có thể chọn V_1 như vậy? Gợi ý: sử dụng tính chất outer regularity của độ đo).

Tóm lại kết thúc bước 1 ta được một cây Perron T_1 (đóng), một tập mở V_1 với $|V_1| \le 2^{-1}$, và $T_1 \subset V_1 \subset \overline{V_1} \subset V_0$.

Bước 2. Giả sử ta đang ở bước thứ $k \ge 1$, trong đó ta đã có một cây Perron T_k (đóng), một tập mở V_k với $|V_k| \le 2^{-k}$, và $T_k \subset V_k \subset \overline{V_k} \subset V_{k-1}$.

Nhắc lại rằng T_k là hợp của 2^m ($m \in \mathbb{N}$ nào đó) tam giác con T_{ki}, trong đó mỗi tam giác con có đáy trên đường thẳng d với chiều cao bằng 1. Bởi vì mỗi tam giác con T_{ki} chứa trong V_k, ta có thể sử dụng lý luận ở Bước 1 (với $T = T_{ki}$, $V_0 = V_k$) để xây dựng một cây Perron $\widetilde{T_{ki}}$ sao cho

$|\widetilde{T_{ki}}| \le \varepsilon := 2^{-(m+k+2)}$ và $\widetilde{T_{ki}} \subset V_k$. Lấy $T_{k+1} := \bigcup_i \widetilde{T_{ki}}$, ta có $T_{k+1} \subset V_k$ và $|T_{k+1}| \le \varepsilon 2^m = 2^{-(k+2)}$.

Từ đó ta có thể chọn V_{k+1} là một tập mở sao cho $T_{k+1} \subset V_{k+1} \subset \overline{V_{k+1}} \subset V_k$ và $|V_{k+1}| \le |T_{k+1}| + 2^{-(k+2)} \le 2^{-(k+1)}$.

Bằng quy nạp ta xây dựng được dãy $\{V_k\}_{k=1}^{\infty}$ như mong muốn. Điều này kết thúc chứng minh. □

IV - Một cách xây dựng khác

Trong mục này chúng tôi giới thiệu một cách xây dựng khác cho tập Besicovitch. Cách xây dựng này cũng rất độc đáo và mới được đưa ra gần đây (2003) bởi Tom Korner (Cambridge, U.K) [9], trong đó điểm mấu chốt là sử dụng Định lý Baire cho không gian Banach, và qua đó chỉ ra rằng có "rất nhiều" tập Besicovitch. Ở đây chúng ta dựa theo một chứng minh được trình bày lại bởi Terence Tao [13].

Một khái niệm quan trọng trong xây dựng này là *essential range* (miền ảnh chính).

Định nghĩa 1 (essential range)**.** *Cho một hàm số $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ đo được, khi đó ta định nghĩa $R(f)$, essential range của f, là tập hợp các điểm $y \in \mathbb{R}$ sao cho tập hợp $f^{-1}((y-\epsilon, y+\epsilon))$ có độ đo dương với mọi $\epsilon > 0$.*

Để ý rằng bởi vì f đo được nên $f^{-1}((y-\epsilon, y+\epsilon))$ là đo được. Hơn nữa nếu ta thay đổi f trên một tập có độ đo 0 thì độ đo của $f^{-1}((y-\epsilon, y+\epsilon))$ không đổi. Do đó $R(f)$ được định nghĩa tốt và chỉ phụ thuộc vào lớp tương đương của f (gồm các hàm sai khác trên một tập có độ đo 0). Các tính chất căn bản khác của essential range được nêu ra trong Bổ đề dưới đây.

Bổ đề 2. *Cho $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ đo được. Khi đó*

(i) $f(x) \in R(f)$ với hầu hết $x \in [0,1]$.

(ii) $R(f)$ là một tập đóng.

(iii) Nếu $g \in L^\infty([0,1])$ thì

$$R(f+g) \subset R(f) + [-||g||_\infty, ||g||_\infty].$$

Nói riêng, nếu $f \in L^\infty([0,1])$ thì $R(f) \subset [-||f||_\infty, ||f||_\infty]$ bị chặn.

Để chứng minh (i) chúng ta cần dùng Bổ đề phủ Vitali. Xin nhắc lại một phiên bản đơn giản của bổ đề hữu ích này và bỏ qua chứng minh (xin google nếu các bạn mới biết kết quả này lần đầu)

Bổ đề 3 (Vitali Covering Lemma)**.** *Cho $\{B_i\}_{i\in U}$ là một họ các quả cầu mở trong không gian $\mathbb{R}^N$. Thì tồn tại một tập con đếm được $J \subset U$ sao cho $\{B_i\}_{i\in J}$ là các quả cầu mở rời nhau, và*

$$\bigcup_{i\in U} B_i \subset \bigcup_{i\in J} 5B_i$$

trong đó $5B_i$ là một quả cầu mở cùng tâm với B_i và có bán kính gấp 5 lần.

Phần sau đây gồm có chứng minh cho (i) và (iii), còn khẳng định (ii) xin dành lại như một bài tập đơn giản cho bạn đọc.

Chứng minh Bổ đề 2. (i) Đặt $B = \{x \in [0,1] : f(x) \notin R(f)\}$, ta sẽ chứng minh $|B| = 0$. Theo định nghĩa, với mỗi $x \in B$ thì tồn tại $\epsilon_x > 0$ sao cho tập hợp $f^{-1}((f(x)-\epsilon_x, f(x)+\epsilon_x))$ có độ đo 0.

Xét họ các khoảng mở $\{A_x := (f(x) - \epsilon_x/5, f(x) + \epsilon_x/5)\}_{x\in B}$. Theo Bổ đề phủ Vitali thì tồn tại một tập con quá lắm đếm được $J \subset B$ sao cho $\{A_x\}_{x\in J}$ là các khoảng mở rời nhau, hơn nữa

$$\bigcup_{x\in B} A_x \subset \bigcup_{x\in J} 5A_x$$

trong đó $5A_x = (f(x) - \epsilon_x, f(x) + \epsilon_x)$.

Sử dụng tính chất trên, cùng với $x \in f^{-1}(A_x)$ $(\forall x \in B)$, ta có

$$B \subset \bigcup_{x\in B} f^{-1}(A_x) \subset \bigcup_{x\in J} f^{-1}(5A_x).$$

Nhắc lại rằng $f^{-1}(5A_x)$ có độ đo 0. Vậy B chứa trong hợp của một họ quá lắm đếm được các tập có độ đo 0, do đó $|B| = 0$.

(iii) Bằng cách thay đổi f và g trên một tập có độ đo 0 nếu cần (điều này không làm thay đổi $R(f)$ và $R(f+g)$), ta có thể giả sử $f(x) \in R(f)$ và $g(x) \in [-||g||_\infty, ||g||_\infty]$ với mọi $x \in [0,1]$.

Bây giờ xét $y \in R(f+g)$. Do định nghĩa, với mỗi $n \in \mathbb{N}$ thì tập hợp $(f+g)^{-1}((y-1/n, y+1/n))$ có độ đo dương (nói riêng khác rỗng), đo đó ta có thể chọn ra một phần tử $x_n \in [0,1]$. Vậy $f(x_n) + g(x_n) \to y$.

Do dãy $g(x_n)$ chứa trong tập compact $[-||g||_\infty, ||g||_\infty]$ nên chuyển qua một dãy con nếu cần ta có thể giả sử $g(x_n) \to z \in [-||g||_\infty, ||g||_\infty]$. Khi đó $f(x_n) = y - g(x_n) \to y - z$. Vì dãy $f(x_n)$ chứa trong tập đóng $R(f)$ nên $y - z \in R(f)$. Vậy

$$y = (y - z) + z \in R(f) + [-||g||_\infty, ||g||_\infty].$$

Điều này đúng với mọi $y \in R(f+g)$ nên suy ra

$$R(f+g) \subset R(f) + [-||g||_\infty, ||g||_\infty].$$

Nói riêng chọn $f = 0$ ta thu được $R(g) \subset [-||g||_\infty, ||g||_\infty]$ với mọi $g \in L^\infty([0,1])$. □

Ta sẽ quan tâm đến độ đo của essential range $R(f)$. Tổng quát hơn, ta có khái niệm *Favard length*.

Định nghĩa 2 (Favard length)**.** *Cho $f \in L^\infty([0,1])$ và $\alpha \in \mathbb{R}$. Ta đặt*

$$L_\alpha(f) = |R(f + \alpha\,\mathrm{Id})|$$

trong đó Id là ánh xạ đồng nhất $Id(x) = x$.

Lưu ý rằng $f + \alpha\,\mathrm{Id} \in L^\infty([0,1])$ nên $R(f + \alpha Id)$ là một tập compact, đo đó $L_\alpha(f)$ là một số thực không âm.

Kết quả sau đây liên kết khái niệm essential range và Favard length ở trên với tập Besicovitch mà chúng ta đang cần xây dựng. Tất nhiên, tương tự như mục trước, bằng phép đối xứng ta chỉ cần chứng tỏ tồn tại một tập compact trong mặt phẳng, có độ đo 0 và chứa một đoạn thẳng đơn vị tạo với trục hoành một góc tùy ý trong $[0, \pi/4]$. Một tập hợp như vậy gọi là một tập *quarter-Besicovitch.*

Định lý 3. *Giả sử $f \in L^\infty([0,1])$ thỏa mãn $L_\alpha(f) = 0$ với mọi $\alpha \in [0,1]$. Khi đó tập hợp*

$$E := \{(x,y) \in \mathbb{R} \times [0,1] : x \in R(f + yId) \text{ với mọi } y \in [0,1]\}$$

là một tập quarter-Besicovitch.

Chứng minh. Dễ thấy rằng E bị chặn. Để chứng minh E đóng, giả sử $(x_n, y_n) \in E$ và $(x_n, y_n) \to (x, y)$ trong $\mathbb{R}^2$, ta sẽ chứng tỏ $(x, y) \in E$, tức là $x \in R(f + y\,\mathrm{Id})$. Sử dụng Bổ đề 2 (iii) ta có

$$x_n \in R(f + y_n\,\mathrm{Id}) \subset R(f + y\,\mathrm{Id}) + [-|y_n - y|, |y_n - y|].$$

Do $R(f + y\,\mathrm{Id})$ là tập compact nên $x \in R(f + y\,\mathrm{Id})$. Vậy E đóng. Hơn nữa để ý rằng phần giao của E với mỗi đường thẳng $y = a$ luôn có độ đo 0 (do $L_\alpha(f) = 0$ với mọi $\alpha \in [0, 1]$). Từ đó dùng định lý Fubini suy ra $|E| = 0$.

Cuối cùng ta chứng tỏ E chứa một đoạn thẳng đơn vị với hệ số góc tùy ý trong $[0, 1]$. Thật vậy, ta sẽ chỉ ra với mỗi $x \in [0, 1]$, tồn tại $\lambda(x) \in \mathbb{R}$ sao cho

$$(\lambda(x) + xy, y) \in E \text{ với mọi } y \in [0, 1]. \tag{1}$$

Khi đó $\{(\lambda(x) + xy, y)|y \in [0, 1]\} \subset E$ là đoạn thẳng có hệ số góc bằng $x \in [0, 1]$ tùy ý, và đây chính là điều phải chứng minh.

Để chứng minh (1), trước hết do Bổ đề 2 (i) nên với mỗi $y \in [0, 1]$, $f(x) + xy \in R(f + y\,\mathrm{Id})$, tức là $(f(x) + xy, y) \in E$, với hầu hết $x \in [0, 1]$. Xét riêng với các y hữu tỉ suy ra tồn tại một tập $A \in [0, 1]$ với $A^c := [0, 1]\backslash A$ có độ đo 0 sao cho

$$(f(x) + xy, y) \in E \text{ với mọi } x \in A, y \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}.$$

Bởi vì E đóng nên chuyển qua giới hạn ta có

$$(f(x) + xy, y) \in E \text{ với mọi } x \in A, y \in [0, 1].$$

Vậy nếu $x \in A$ thì ta chỉ cần chọn $\lambda(x) = f(x)$. Nếu $x \in A^c$ thì do A trù mật (bởi vì $|A^c| = 0$) nên có 1 dãy x_n trong A hội tụ về x. Ta có

$$(f(x_n) + x_n y, y) \in E \text{ với mọi } y \in [0, 1].$$

Vì E bị chặn nên $f(x_n)$ bị chặn. Do đó chuyển qua một dãy con nếu cần ta có thể giả sử $f(x_n)$ hội tụ về một số thực, ký hiệu là $\lambda(x)$. Với mỗi $y \in [0, 1]$ cố định, do $(f(x_n) + x_n y, y) \in E$ đóng và $(f(x_n) + x_n y, y) \to (\lambda(x) + xy, xy)$ nên suy ra $(\lambda(x) + xy, xy) \in E$. Vậy ta thu được (1) và điều này hoàn tất chứng minh. □

Trong phần còn lại ta chứng tỏ rằng tồn tại $f \in L^\infty([0, 1])$ thỏa mãn $L_\alpha(f) = 0$ với mọi $\alpha \in [0, 1]$. Ta cần hai kết quả chuẩn bị.

Bổ đề 4. *Với mỗi $\alpha \in \mathbb{R}$ thì hàm số $L_\alpha : L^\infty([0, 1]) \to [0, \infty)$ là nửa liên tục trên (upper semicontinuous).*

Nhắc lại rằng tính nửa liên tục trên có nghĩa là nếu $f_n \to f$ trong $L^\infty([0, 1])$ thì $\limsup L_\alpha(f_n) \le L_\alpha(f)$. Một cách tương đương, với mọi $\epsilon > 0$ thì tồn tại $\delta = \delta(f, \epsilon)$ sao cho $L_\alpha(f + g) \le L_\alpha(f)$ nếu $||g||_\infty \le \delta$.

Chứng minh. Do $L_\alpha(f) = L_0(f + \alpha\,\mathrm{Id})$ nên bằng cách thay $f + \alpha\,\mathrm{Id}$ thay cho f, ta chỉ cần chứng minh cho L_0. Do $R(f)$ compact nên

$$R(f) = \bigcap_{n=1}^{\infty} R_n \text{ với } R_n = R(f) + [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}].$$

Suy ra $|R_n| \to |R(f)|$. Do đó với mọi $\epsilon > 0$ thì $|R_n| \le |R(f)| + \epsilon$ với n đủ lớn.

Mặt khác, theo Bổ đề 2 (iii) ta có $R(f + g) \subset R_n$ với mọi $||g||_\infty \le 1/n$. Từ đó ta có điều phải chứng minh. □

Bây giờ chúng ta xem thử khi nào thì có $L_\alpha(f) = 0$? Ta bắt đầu bằng một ví dụ đơn giản. Ký hiệu PC là tập các hàm hằng từng khúc (piecewise constant), tức là $f \in PC$ nếu tồn tại một phân hoạch hữu hạn $0 = t_0 < t_1 < ... < t_N = 1$ sao cho f là hằng số trên mỗi khoảng (t_{i-1}, t_i)). Dễ dàng thấy rằng nếu $f \in PC$ thì f chỉ nhận có hữu hạn giá trị, do đó $L_0(f) = 0$. Tuy nhiên điều đó không đảm bảo $L_\alpha(f) = 0$ với $\alpha \neq 0$. Dù sao, kết quả sau đây chỉ ra rằng ta có thể kiểm soát $L_\alpha(f) = 0$ nếu chọn $|\alpha|$ nhỏ. Chứng minh kết quả này đơn thuần dùng định nghĩa và chúng tôi dành lại cho bạn đọc như một bài tập.

Bổ đề 5. *Nếu f thuộc PC thì $L_\alpha(f) \leq |\alpha|$ với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$.*

Bây giờ chúng ta đã sẵn sàng để chứng minh định lý chính: tồn tại $f \in L^\infty([0,1])$ sao cho $L\alpha(f) = 0$ với mọi $\alpha \in [0,1]$. Thực ra, ta sẽ thu hẹp xuống không gian con đóng $\overline{PC} \subset L^\infty([0,1])$. Không gian này chứa hầu hết các hàm số "tốt", chẳng hạn Id, nhưng nó thực sự nhỏ hơn $L^\infty([0,1])$, chẳng hạn nó không chứa $\sin(\frac{1}{x})$ (bạn đọc hãy kiểm tra các khẳng định này). Ta có

Định lý 4. *Tập hợp $F = \{f \in \overline{PC} | L_\alpha(f) = 0$ với mọi $\alpha \in [0,1]\}$ trù mật trong $\overline{PC}$.*

Nói riêng $F \neq \emptyset$ như mong muốn. Để chứng minh Định lý 4 ta sẽ sử dụng Định lý Baire cho không gian đầy đủ $\overline{PC}$ (xin google nếu các bạn gặp định lý này lần đầu).

Baire Category Theorem. *Cho X là một không gian Banach và $\{F_n\}_{n=1}^\infty$ là các tập mở, trù mật trong X. Khi đó $\bigcap_{n=1}^\infty F_n$ trù mật trong X.*

Chứng minh Định lý 4. Ta có

$$\begin{aligned} F &= \bigcap_{n=1}^\infty \{f \in \overline{PC} | L_\alpha(f) \leq \frac{2}{n} \text{ với mọi } \alpha \in [0,1]\} \\ &= \bigcap_{n=1}^\infty \bigcap_{m=1}^n \{f \in \overline{PC} | L_\alpha(f) \leq \frac{2}{n} \text{ với mọi } \alpha \in [\frac{m-1}{n}, \frac{m}{n}]\}. \end{aligned}$$

Do Định lý Baire, ta chỉ cần chứng tỏ mỗi tập hợp có dạng

$$B_{y,\varepsilon} := \{f \in \overline{PC} | L_\alpha(f) \leq 2\varepsilon \text{ với mọi } \alpha \in [y, y+\varepsilon]\}$$

mở và trù mật trong $\overline{PC}$. Thật vậy, vì $B_{y,\varepsilon}$ chứa $PC + y\,\mathrm{Id}$ (do Bổ đề 5) suy ra tính trù mật. Phần còn lại xin bạn đọc tự kiểm chứng rằng phần bù

$$\overline{PC} \backslash B_{y,\varepsilon} = \{f \in \overline{PC} | \exists \alpha \in [y, y+\varepsilon] : L_\alpha(f) > 2\varepsilon\}$$

đóng (sử dụng tính compact của $[y, y+\varepsilon]$ và tính nửa liên tục trên ở Bổ đề 2).

□

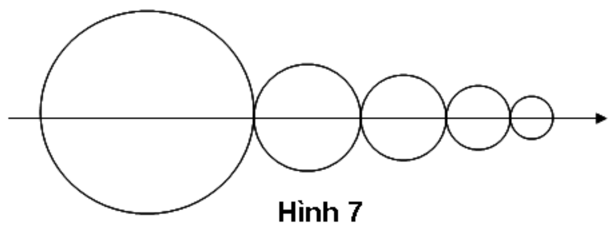
V - Giả thuyết Kakeya

Một tập Besicovitch trong $\mathbb{R}^N$ là một tập hợp có độ đo 0 (trong $\mathbb{R}^N$) và chứa một đoạn thẳng đơn vị với phương tùy ý. Từ tập Besicovitch trong mặt phẳng, ta có thể xây dựng các tập Besicovitch với số chiều lớn hơn (bạn đọc hãy giải thích vì sao?).

Các tập hợp Besicovitch nhiều chiều đã đặt ra một họ các giả thuyết, gọi là Kakeya conjectures, và các bài toán này mở màn cho một lĩnh vực Toán học mang tên "Lý thuyết độ đo hình học" (Geometric measure theory). Trong lý thuyết này, người ta không thỏa mãn với thông tin "có độ đo 0", và người ta cố gắng đo đạc chính xác hơn là chúng "nhỏ bao nhiêu". Để thảo luận vấn đề này một cách chính xác, chúng ta cần biết một số khái niệm về số chiều Hausdorff (Hausdorff dimension) và số chiều Minkowski (Minkowski dimension). Đây là các khái niệm cơ bản trong hình học fractal.

Trước hết chúng ta làm quen với số chiều Hausdorff. Nói nôm na, nếu ta xem độ đo là một "ước lượng chính xác" về độ lớn thì số chiều là một"ước lượng thô". Hãy tưởng tượng một con kiến cả đời chỉ bò trong đường thẳng $\mathbb{R}$. Đối với con kiến thì $\mathbb{R}$ là một không gian vô cùng rộng lớn, không thể nào đi được tới biên giới. Nhưng một ngày nọ, con kiến bỗng leo lên được mặt phẳng 2 chiều. Đối với nó lúc này không gian $\mathbb{R}$ lại trở nên nhỏ bé. Nhưng nó băn khoăn không biết làm sao có thể giải thích cái cảm giác rằng $\mathbb{R}$ "nhỏ", bởi vì dù sao $\mathbb{R}$ vẫn là một tập vô hạn.

Với kiến thức về độ đo Lebesgue, bạn có thể trả lời con kiến kia rằng: đơn giản lắm thôi, trong không gian 2 chiều thì $\mathbb{R}$ có độ đo 0. Tuy nhiên, đừng quên là con kiến chưa học về lý thuyết độ đo, nên cần giải thích thêm cho nó: ta có thể phủ $\mathbb{R}$ bởi một họ đếm được các hình tròn trong $\mathbb{R}^2$ mà tổng diện tích có thể làm cho bé tùy ý. Chẳng hạn ta có thể phủ $[0,\infty)$ bởi một dãy các hình tròn liền nhau (Hình 7) với bán kính $\frac{1}{m}, \frac{1}{m+1}, \frac{1}{m+1}, ...$ trong đó m có thể chọn lớn tùy ý (chú ý là $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$ nhưng $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$).



Hình 7

Tuy nhiên sự thực thì trong mặt phẳng 2 chiều, $\mathbb{R}$ còn bé hơn thế. Thật vậy, khẳng định phía trên có thể phát biểu cụ thể hơn là: ta có thể phủ $\mathbb{R}$ bởi một họ đếm được các hình tròn $B(x_n, r_n)$ trong $\mathbb{R}^2$ mà $\sum_{n=1}^{\infty} r_n^2$ có thể làm cho bé tùy ý. Thật ra, sử dụng ví dụ phía trên ta có thể làm mạnh phát biểu trên thành: nếu $d > 1$ thì có thể làm cho $\sum_{n=1}^{\infty} r_n^d$ bé tùy ý. Mặt khác, hiển nhiên không thể chọn $d = 1$. Như vậy sẽ hợp lý nếu ta tuyên bố: "số chiều" của $\mathbb{R}$ là 1. Chú ý rằng nếu ta thay $\mathbb{R}^2$ bởi $\mathbb{R}^n$ bất kỳ thì "số chiều" của $\mathbb{R}$ vẫn luôn là 1. Như vậy đây là một khái niệm thuộc bản chất của $\mathbb{R}$ hơn là không gian mà nó được nhúng vào.

Tổng quát quan sát trên, ta có thể định nghĩa số chiều Hausdorff của một tập U trong không gian metric X như sau. Ta nói U không quá d chiều nếu U có thể phủ bởi một họ đếm được các quả cầu $\{B(x_n, r_n)\}$ trong X sao cho $\sum_{n=1}^{\infty} r_n^d$ có thể chọn bé tùy ý. Chặn dưới của các số d này gọi là số chiều Hausdorff của U, ký hiệu là $\dim_H(U)$ (một số tác giả cũng gọi là Hausdorff−Besicovitch dimension). Một cách hình thức, với mỗi $d \geq 0$ ta có thể đặt dung lượng Hausdorff (Hausdorff content) của U là

$$C_H^d(U) := \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} r_n^d | U \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B(x_n, r_n) \right\}$$

và định nghĩa $\dim_H(U) := \inf\{d \geq 0 | C_H^d(U) = 0\}$.

Số chiều Hausdorff là một tổng quát của số chiều thông thường ($\dim_H(\mathbb{R}^N) = N$) và được xem là định nghĩa cơ bản cho số chiều. Tuy nhiên tính số chiều Hausdorff của một đối tượng cho trước nói chung là không dễ. Do đó có một số định nghĩa khác về số chiều cũng được sử dụng rộng rãi. Một trong chúng là số chiều Minkowski (Minkowski dimensions, đôi khi còn được gọi là Minkowski−Bouligand dimension hay box−counting dimension).

Cho U là một tập bị chặn trong $\mathbb{R}^n$. Với mọi $\delta > 0$ ta gọi $N_\delta(U)$ là số lượng nhỏ nhất các quả cầu (n chiều) bán kính δ chúng ta cần dùng để phủ U (chú ý rằng do $\mathbb{N}$ được sắp tốt, tức là mỗi tập con khác rỗng đều có phần tử bé nhất, nên $N_\delta(U)$ là một số nguyên dương hoàn toàn xác định). Ta có thể hi vọng rằng nếu U có d chiều thì với $\delta > 0$ nhỏ

$$N_\delta(U) \approx const(U)\delta^{-d}.$$

(Để dễ hình dung, hãy thay các quả cầu bởi các hình lập phương (n chiều)! Thật ra sử dụng các hình lập phương không ảnh hưởng đến định nghĩa nhưng ta dùng các quả cầu bởi vì nó là bản chất của không gian metric − trong khi các hình lập phương là điểm đặc biệt của riêng $\mathbb{R}^n$.)

Từ công thức phía trên, lấy log hai vế ta được

$$\log(N_\delta(U)) \approx d\log(1/\delta) + const(U).$$

Do đó với $\delta \to 0$ ta hi vọng

$$d \approx \frac{\log(N_\delta(U))}{\log(1/\delta)}.$$

Từ đó ta định nghĩa lower và upper box-counting dimensions bởi

$$\begin{aligned}\dim_{\text{lowerbox}}(U) &= \liminf_{\delta\to 0}\frac{\log(N_\delta(U))}{\log(1/\delta)},\\ \dim_{\text{upperbox}}(U) &= \limsup_{\delta\to 0}\frac{\log(N_\delta(U))}{\log(1/\delta)}.\end{aligned}$$

Nếu hai giới hạn này bằng nhau thì ta gọi nó box−counting dimension của U và ký hiệu bởi $\dim_{\text{box}}(U)$. Đây là định nghĩa của số chiều Minkowski (vậy nói chung ta sẽ có 2 số chiều lower và upper).

Điểm tiện lợi của số chiều Minkowski là nó dễ dàng để tính một cách xấp xỉ (sau khi ta chọn $\delta > 0$ nhỏ thì $N_\delta(U)$ hoàn toàn xác định). Số chiều Minkowski bằng với số chiều Hausdorff trên một lớp các tập hợp "đẹp" (chẳng hạn các số chiều này trên tập Cantor là như nhau và bằng $\log(2)/\log(3)$), tuy nhiên nói chung chúng không bằng nhau (chẳng hạn $\dim_H(\mathbb{Q}) = 0$ nhưng $\text{box}_H(\mathbb{Q}) = 1$, bạn đọc hãy giải thích tại sao?). Một cách tổng quát, ta có (xem [5], trang 46)

$$\dim_H \le \dim_{\text{lowerbox}} \le \dim_{\text{upperbox}}. \tag{2}$$

Trở lại với các tập Besicovitch, giả thuyết Kakeya [11] phát biểu rằng

Kakeya set conjecture. *Mọi tập Besicovitch trong $\mathbb{R}^n$ đều có số chiều Hausdorff và số chiều Minkowski bằng n.*

Điều này có nghĩa là mặc dù có độ đo 0, một tập Besicovitch không "thực sự nhỏ" (về số chiều thì nó bằng cả không gian). Chú ý rằng do bất đẳng thức (2), nếu chứng minh được giả thuyết Kakeya cho số chiều Hausdorff thì nó hiển nhiên đúng cho số chiều Minkowski. Tuy nhiên phát biểu phía trên nhấn mạnh rằng ngay với số chiều Minkowski thì giả thuyết vẫn chưa được chứng minh, và ngay với số chiều Hausdorff thì giả thuyết vẫn chưa bị bác bỏ.

Trường hợp $n = 1$ thì giả thuyết đúng một cách tầm thường. Năm 1971 Roy Davies chứng minh khẳng định với $n = 2$ (xem [3] hoặc [5], trang 178). Với trường hợp $n \ge 3$ thì hiện tại mọi người đang cố gắng nâng dần chặn dưới của số chiều Hausdorff (nếu chứng minh được chặn dưới là n thì giả thuyết giải quyết xong). Năm 1995 Thomas Wolff chứng minh một chặn dưới là $n/2 + 1$, nói riêng một tập Besicovitch trong $\mathbb{R}^3$ có ít nhất $5/2$ chiều và một tập Besicovitch trong $\mathbb{R}^4$ có ít nhất 3 chiều (số chiều Hausdorff). Năm 2002, Nets Hawk Katz và Terence Tao cải thiện đánh giá này thành $(2-\sqrt{2})(n-4)+3$ cho trường hợp $n \ge 5$. Riêng với số chiều Minkowski upper ($\dim_{\text{upperbox}}$) thì năm 2000 Katz−Laba−Tao [7] chứng minh chặn dưới $5/2 + 10^{-10}$ cho $n = 3$, và năm 2001 Laba−Tao [8] chứng minh được điều tương tự, tức là chặn dưới $3 + 10^{-10}$, cho $n = 4$.

Tài liệu

[1] A.S. Besicovitch, The Kakeya problem, *The American Mathematical Monthly*, Vol. 70, No. 7 (Aug. - Sep., 1963), pp. 697-706

[2] A.S. Besicovitch, On Kakeya's problem and a similar one, *Mathematische Zeitschrift* (1928) 27, 312-320.

[3] R. Davies, Some remarks on the Kakeya problem, *Proc. Cambridge Philos. Soc.* (69) 417–421, 1971. doi:10.1017/S0305004100046867.

[4] K. J. Falconer, *The Geometry of Fractal Sets*, Cambridge Tracts in Mathematics, 85. Cambridge University Press, Cambridge, (1986).

[5] K. Falconer, *Fractal geometry- Mathematical foundations and applications*, Second Editor, John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, NJ, (2003).

[6] N. Katz, T. Tao, New bounds for Kakeya problems. Dedicated to the memory of Thomas H. Wolff. *J. Anal. Math.* 87(2002), 231-263.

[7] N. Katz, I. Laba, T. Tao, An improved bound for the Minkowski dimension of Besicovitch sets in R^3, *Annals of Math.* 152 (2000), 383-446.

[8] I. Laba, T. Tao, An improved bound for the Minkowski dimension of Besicovitch sets in medium dimension, *Geom. Funct. Anal.* 11 (2001), no. 4, 773-806.

[9] T. W. Korner, Besicovitch via Baire, *Studia Mathematica* 158 (1) (2003), 65-78

[10] T. Wolff, An improved bound for Kakeya type maximal functions, *Rev. Mat. Iberoamericana* (11) 651–674, (1995).

[11] `http://en.wikipedia.org/wiki/Kakeya_set`

[12] `http://terrytao.wordpress.com/2008/12/31/a-remark-on-the-kakeya-needle-problem/`

[13] `http://www.math.ucla.edu/ tao/preprints/kakeya.html` - Korner's construction of a Besicovitch set

Bài viết Chuyên đề Dịch thuật

Phương trình và Bất phương trình hàm số

Phỏng dịch theo G.Falin, A.Falin, Tạp chí Kvant số 05, 06 năm 2006

Đinh Ngọc Vương , Sinh viên Đại học Vật lý Kỹ thuật Moskva

Trong những năm gần đây đề thi vào trường Đại học Tổng hợp Quốc gia Matxcơva mang tên M.V. Lomonosov thường xuất hiện những bài toán về giải phương trình, bất phương trình và hệ phương trình mà trong đó giá trị chưa biết cần tìm không phải là một số mà là một hàm số. Các bài toán này khác các bài toán thường cả về dạng lẫn phương pháp giải. Vì vậy, trong bài báo này tác giả xin giới thiệu những dạng và những phương pháp giải cơ bản dựa vào ví dụ là những bài toán của đề thi. Những bài toán về giải phương trình hay bất phương trình hàm rất có ích trong việc phân loại học sinh vào các lớp chuyên toán.

I - Phương trình tham số hóa

Phương trình hàm dạng đơn giản nhất là phương trình mà hàm chưa biết được mô tả bởi một hay nhiều tham số (ví dụ đơn giản nhất là hàm số là các đa thức). Trong trường hợp này bài toán tìm hàm số được đưa về dạng xác định các giá trị tham số, nghĩa là đưa về các bài toán phổ thông thông thường. Chúng ta cùng khảo sát bài toán sau:

Ví dụ 1 (Khoa Toán học tính toán và Điều khiển, 2001) *Tồn tại không một hàm tuyến tính $y = f(x)$ thỏa mãn phương trình sau với mọi x:*

$$2f(x+2) + f(4-x) = 2x + 7 \tag{1}$$

Lời giải

Theo định nghĩa, hàm số tuyến tính là hàm số có dạng: $f(x) = kx + b$. Các tham số k và b biểu diễn một hàm số duy nhất, nghĩa là $k_1x + b_1 = k_2x + b_2$ đúng với mọi x, do đó $k_1 = k_2$, $b_1 = b_2$. Đây là trường hợp riêng của khẳng định quan trọng sau mà chúng ta sẽ áp dụng nhiều lần:

Hai đa thức đồng nhất khi và chỉ khi các hệ số ứng với bậc của biến số tương ứng bằng nhau.

Vì vậy bài toán ban đầu có thể viết dưới dạng sau:

Tồn tại hay không các số k, b sao cho với mọi x thì đẳng thức sau đúng:

$$2(k(x+2) + b) + (k(4-x) + b) = 2x + 7 \tag{2}$$

Biến đổi tương đương ta được: $kx + 8k + 3b = 2x + 7$, với mọi x.

Vậy các số k, b thỏa mãn hệ:

$$\begin{cases} k = 2 \\ 8k + 3b = 7 \end{cases} \tag{3}$$

Dễ thấy rằng hệ trên có nghiệm duy nhất là $k = 2, b = -3$. Như vậy, tồn tại duy nhất hàm số tuyến tính $f(x) = 2x - 3$ thỏa mãn điều kiện bài ra.

Mặc dù tất cả các phép biến đổi đều tương đương và việc kiểm tra lại là không cần thiết, chúng tôi sẽ giới thiệu cho bạn đọc cách kiểm tra trực tiếp rằng có tìm được hàm số thực sự thỏa mãn phương trình (1) hay không. Nhận xét này sẽ nói trong những bài toán tiếp theo.

Giống như đối với những phương trình bình thường, khi mà đại lượng chưa biết là các số, các phương trình hàm nói chung có thể không có nghiệm hoặc vô số nghiệm. Chúng ta minh họa bằng 2 ví dụ tiếp theo:

Ví dụ 2 (Khoa Toán học tính toán và Điều khiển, 1997/2001/2005) *Tồn tại hay không hàm số tuyến tính $y = f(x)$ thỏa mãn điều kiện sau với mọi x*

$$f(x+3) - f(2-x) = 3x + 1 \tag{4}$$

Lời giải

Giống như phương pháp giải phương trình (1), bài toán đã cho có thể đưa về dạng sau:

Tồn tại hay không các số k, b để hệ sau đúng:

$$\begin{cases} 2k = 3 \\ k = 1 \end{cases}$$

Hệ này vô nghiệm. Do đó phương trình (4) không có nghiệm dưới dạng tuyến tính.

Ví dụ 3 (Khoa Toán học tính toán và Điều khiển, 1997) *Tìm hàm bậc hai $y = f(x)$ thỏa mãn điều kiện sau với mọi x*

$$f(1-x) - f(2-x) = -2x + 7 \tag{5}$$

Lời giải

Theo định nghĩa, hàm bậc hai là hàm số có dạng

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$$

Đưa bài toán của chúng ta về dạng:

Tìm số $a \neq 0, b, c$ thỏa mãn hệ:

$$\begin{cases} 2a = -2 \\ -3a - b = 7 \end{cases} \tag{6}$$

Hệ (6) có nghiệm $(a, b, c) = (-1, -4, c)$, trong đó $c \in \mathbb{R}$ - hệ số tự do. Vậy phương trình đã cho có vô số nghiệm thuộc lớp hàm số bậc 2. Tất cả các nghiệm đều có thể viết dưới dạng: $f(x) = -x^2 - 4x + c$, trong đó c - hệ số tự do.

Bài toán tiếp theo cũng yêu cầu giải phương trình hàm thuộc lớp xác định (đa thức bậc n), nhưng phương trình phức tạp hơn những phương trình đã cho ở trên.

Ví dụ 4 (Khoa Toán học tính toán và Điều khiển 2002/Olympic Romania 1980) *Tìm tất cả các đa thức bậc n:*

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

nghĩa là hệ số $a_n \neq 0$, thỏa mãn đồng nhất thức

$$P(x^2) = (P(x))^2, \quad x \in (-\infty, +\infty) \tag{7}$$

Lời giải

Để giải bài toán trên chúng ta viết $P(x)$ dưới dạng $Q(x) + a_n x^n$, trong đó:

$$Q(x) = a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

Bậc của $Q(x)$ chúng ta chưa biết nên không thể loại trừ khả năng rằng một số hệ số (hay thậm chí là tất cả) bằng 0. Khi đó (7) có dạng:

$$Q(x^2) + a_n x^{2n} = (Q(x))^2 + 2a_n x^n Q(x) + a_n^2 x^{2n},\ x \in (-\infty; +\infty) \tag{8}$$

Hai đa thức đồng nhất với nhau khi và chỉ khi các hệ số của các hạng tử cùng bậc phải bằng nhau. Bậc của đa thức $Q(x^2)$, $(Q(x))^2$ bằng $2k$, bậc của đa thức $2a_n x^n Q(x)$ bằng $n + k$. Các số hạng là đơn thức bậc $2n$ chỉ có $a_n x^{2n}$ và $a_n^2 x^{2n}$, do vậy: $a_n = a_n^2$. Nhưng vì $a_n \neq 0$ nên $a_n = 1$. Điều này cho phép viết (8) dưới dạng: $Q(x^2) = (Q(x))^2 + 2x^n Q(x)$, $x \in (-\infty; +\infty)$

Vì $k < n$, nên bậc của đa thức vế phải lớn hơn bậc của đa thức vế trái, điều đó chỉ xảy ra khi tất cả các các hệ số của đa thức $Q(x)$ bằng 0, tức là $Q(x) \equiv 0$. Khi đó đồng nhất thức (8) có dạng: $a_n x^{2n} = a_n^2 x^{2n}$, $x \in (-\infty; +\infty)$ tương đương với $a_n = 1$

Vậy nghiệm duy nhất của phương trình hàm (7) thuộc lớp đa thức bậc n là $P(x) = x^n$.

II - Phương trình hàm tổng quát

Từ ví dụ 1 xuất hiện một câu hỏi rất tự nhiên là: "Tồn tại hay không một hàm số dạng tổng quát (không nhất thiết phải là hàm tuyến tinh) thỏa mãn phương trình hàm ban đầu?". Để trả lời câu hỏi trên chúng ta sẽ giải (1) với hàm cho ở dạng tổng quát.

Đầu tiên, thay x bởi $x - 2$, (1) có dạng:

$$2f(x) + f(6 - x) = 2x + 3, \forall x \tag{9}$$

Coi (9) như một phương trình bình thường với 2 biến $A = f(x)$, $B = f(6 - x)$, x trong trường hợp này đóng vai trò như một tham số: $2A + B = 2x + 3$

Ta thấy, chỉ một phương trình mà chứa tới hai ẩn chưa biết, ta cần một phương trình nữa. Từ (9) thay x bởi $6 - x$ (vì đẳng thức đúng với mọi x nên có thể thay x bằng bất kỳ giá trị nào): $2f(6 - x) + f(x) = -2x + 15$, với mọi x hay $2B + A = -2x + 15$

Ta có hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} 2A + B = 2x + 3 \\ 2B + A = -2x + 15 \end{cases}$$

Dễ dàng giải ra được: $A \equiv f(x) = 2x - 3$

Nếu đặt $\phi_0(x) = x$ và $\phi_1(x) = 6 - x$. Dễ dàng kiểm tra

$$\phi_0(\phi_0(x)) = \phi_0(x);\ \phi_0(\phi_1(x)) = \phi_1(x);\ \phi_1(\phi_0(x)) = \phi_1(x);\ \phi_1(\phi_1(x)) = \phi_0(x)$$

Nói theo ngôn ngữ của đại số hiện đại, hàm số ϕ_0 và ϕ_1 cùng với phép hợp hàm tạo thành một nhóm. Khái niệm nhóm là một trong những khái niệm quan trọng nhất của toán học hiện đại và được ứng dụng rộng rãi trong nhiều lĩnh vực.

Cũng lập luận tương tự, phương trình (4) vô nghiệm khi xét hàm cần tìm thuộc lớp bất kỳ. Chúng ta có kết quả mạnh hơn sau:

Không tồn tại hàm $f(x)$ nào có thể thỏa mãn đồng thời (4) tại hai điểm x_1 và x_2 đối xứng nhau qua điểm $-\frac{1}{2}$

Thật vậy, ta có hệ:

$$\begin{cases} f(x_1+3) - f(2-x_1) = 3x_1 + 1 \\ f(x_2+3) - f(2-x_2) = 3x_2 + 1 \end{cases}$$

Vì x_1 và x_2 đối xứng nhau qua điểm $-\dfrac{1}{2}$ nên $x_1 + x_2 = -1$ hệ trên chuyển về dạng:

$$\begin{cases} f(x_1+3) - f(2-x_1) = 3x_1 + 1 \\ f(2-x_1) - f(x_1+3) = -3x_1 - 2 \end{cases}$$

Cộng theo từng vế hai phương trình thì: $0 = -1$.

Giải phương trình (5) sẽ khó hơn nhưng cũng thú vị hơn nếu không cần điều kiện $f(x)$ là tam thức bậc hai. Giải bài toán này cần sử dụng những phương pháp mới, chúng thuận lợi cho việc giải cả những phương trình khác, vì vậy chúng ta sẽ nói kỹ hơn về vấn đề này. Giống như việc giải (1) khi hàm thuộc lớp tổng quát, trước tiên chúng ta thay $1-x$ bởi x khi đó (5) có dạng:

$$f(x) - f(x+1) = 2x + 5, \ \forall x \in \mathbb{R} \tag{10}$$

Phương trình (10) không thuần nhất, để phù hợp với tư tưởng chung khi giải phương trình hàm thì ta cần đưa nó về dạng thuần nhất. Để giải quyết vấn đề này thì chúng ta tìm một nghiệm riêng. Thực tế chúng ta đã làm được điều này, nghiệm riêng là $f_0(x) = -x^2 - 4x$.

Bây giờ đặt $g(x) = f(x) - f_0(x)$ ta suy ra $g(x) = g(x+1)$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Điều đó chỉ ra rằng hàm $g(x)$ là hàm số tuần hoàn với chu kỳ $T = 1$. Vì vậy, nghiệm chung của (5) có dạng sau: $f(x) = -x^2 - 4x + g(x)$, trong đó $g(x)$ - hàm tuần hoàn với chu kỳ 1, xác định trên toàn trục số.

Tổng quát hóa ví dụ 4 (bỏ qua điều kiện $P(x)$ là một đa thức) thì nói chung không có câu trả lời cụ thể. Phương trình hàm đã cho được thỏa mãn với nhiều hàm khác nhau, ví dụ như: $|x|$, $\sqrt[3]{x}$, $y = \operatorname{sgn}(x)$ - hàm số dấu ($\operatorname{sgn}(x)$ bằng 1, 0 hay -1 phụ thuộc vào x lớn hơn, bằng hay nhỏ hơn 0)...

Các lập luận đưa ra yêu cầu cao hơn khi giải những phương trình mà thiếu các thông tin liên quan đến dạng của hàm cần tìm. Mặc dù phương pháp giải không thay đổi nhưng xuất hiện những khả năng đặc biệt, chúng ta cùng xem xét điều này thông qua ví dụ sau:

Ví dụ 5 (Khoa Hóa học, 7/2000). *Hàm $f(x)$ xác định trên đoạn $\left[\dfrac{1}{6}, 6\right]$ thỏa mãn hệ:*

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\cos^2 f(x) - \frac{1}{2}} - 12\cos\left(2f\left(\dfrac{1}{x}\right)\right) = \dfrac{10}{x} \\ 0 \le f(x) \le \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

Giải bất phương trình: $f(x) \le \dfrac{\pi}{8}$

Lời giải

Đơn giản hóa phương trình đầu:

$$\frac{1}{\cos(2f(x))} - 6\cos\left(2f\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{5}{x}, \ x \in \left[\frac{1}{6}, 6\right] \tag{11}$$

Nếu $x \in \left[\dfrac{1}{6}, 6\right]$ thì $\dfrac{1}{x} \in \left[\dfrac{1}{6}, 6\right]$. Trong (11) ta thay x bởi $\dfrac{1}{x}$

$$\frac{1}{\cos\left(2f\left(\frac{1}{x}\right)\right)} - 6\cos\left(2f(x)\right) = 5x, \ x \in \left[\frac{1}{6}, 6\right] \tag{12}$$

Coi hệ gồm hai phương trình (11) và (12) là hệ hai ẩn số: $A = \cos(2f(x))$ và $B = \cos\left(2f\left(\frac{1}{x}\right)\right)$, x trong trường hợp này đóng vai trò như một tham số.

$$\begin{cases} \frac{1}{A} - 6B = \frac{5}{x} \\ \frac{1}{B} - 6A = 5x \end{cases}$$

Bằng phép biến đổi sơ cấp, ta đưa hệ trên về dạng:

$$\begin{cases} B = \frac{x-5A}{6Ax} \\ (A+x)(6A-x) = 0 \end{cases}$$

Với mỗi $x \in \left[\frac{1}{6}, 6\right]$ thì $A = A(x)$ nhận một và chỉ một trong hai giá trị: $-x$ hay $\frac{x}{6}$. Điều kiện $0 \le f(x) \le \frac{\pi}{4}$ bảo đảm cho $A = \cos\left(2f\left(x\right)\right) \ge 0$. Vì thế nên $A + x \ge 0$ và dễ dàng có $A = A(x) = \frac{x}{6}$, $B = B(x) = \frac{1}{6x}$

Hệ phương trình đầu tương đương với hệ sau:

$$\begin{cases} \cos\left(2f\left(x\right)\right) = \frac{x}{6}; \forall x \in \left[\frac{1}{6}, 6\right] \\ 0 \le 2f\left(x\right) \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Khi $x \in \left[\frac{1}{6}, 6\right]$ thì $\frac{1}{x} \in \left[\frac{1}{36}, 1\right]$, chú ý rằng $\left[\frac{1}{36}, 1\right] \subseteq [-1, 1]$. Sử dụng định nghĩa hàm số cosin chúng ta thu được kết quả: $f\left(x\right) = \frac{1}{2}\arccos\frac{x}{6}$. Yêu cầu của bài toán ban đầu đưa về việc giải bất phương trình: $\arccos\frac{x}{6} \le \frac{\pi}{4}$, với $x \in \left[\frac{1}{6}, 6\right]$. Dễ dàng giải ra được: $3\sqrt{2} \le x \le 6$

Ví dụ 6 (Khoa Hóa học, 2000). *Tìm x để hàm $f\left(x\right)$ có cực trị và thỏa mãn điều kiện sau với mọi $x \ne 0, 1$*

$$f\left(x\right) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = x \tag{13}$$

Tìm hàm số đó.

Lời giải

Giống như cách giải của các ví dụ trước, chúng ta coi phương trình hàm đã cho như một phương trình bình thường với ẩn chưa biết là $A = f\left(x\right)$ và $B = f\left(\frac{1}{1-x}\right)$, x coi như là một tham số: $A + B = x$. Để nhận thêm một phương trình nữa, trong (13) thay x bởi $\frac{1}{1-x}$:

$$f\left(\frac{1}{1-x}\right) + f\left(\frac{x-1}{x}\right) = \frac{1}{1-x} \Leftrightarrow B + C = \frac{1}{1-x}$$

trong đó $C = f\left(\frac{x-1}{x}\right)$.

Vì xuất hiện thêm một ẩn nữa nên ta cần thêm một phương trình nữa. Trong (13) thay x bởi $\frac{x-1}{x}$:

$$f\left(\frac{x-1}{x}\right) + f\left(x\right) = \frac{x-1}{x} \Leftrightarrow C + A = \frac{x-1}{x}$$

Như vậy chúng ta không làm xuất hiện thêm phương trình mới, có hệ sau:

$$\begin{cases} A+B=x \\ B+C=\dfrac{1}{1-x} \\ C+A=\dfrac{x-1}{x} \end{cases}$$

Dễ dàng giải được hệ này và thu được kết quả:

$$A \equiv f(x)=\frac{x^3-x+1}{2x(x-1)},\ x\neq 0,1 \tag{14}$$

Ba hàm A, B, C phù hợp với nhận xét của chúng ta khi giải phương trình (9): các hàm tạo thành một nhóm bậc ba. Bây giờ có thể tìm được điểm cực trị của hàm (14). Đạo hàm:

$$f'(x)=\frac{x^4-2x^3+x^2-2x+1}{2x^2(x-1)^2}=\frac{\left(x^2-\left(1+\sqrt{2}\right)x+1\right)\left(x^2-\left(1-\sqrt{2}\right)x+1\right)}{2x^2(x-1)^2}$$

Biến đổi nhờ xét dấu đạo hàm ta thu được kết quả là hàm số $f(x)$ có 2 điểm cực trị:

$x_1=\dfrac{1+\sqrt{2}-\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2}\in(0;1)$ (điểm cực đại)

$x_2=\dfrac{1+\sqrt{2}+\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2}\in(1;+\infty)$ (điểm cực tiểu)

III - Sử dụng các khái niệm và kết quả của giải tích

Ví dụ 7 (Khoa Toán Cơ, 2001/Olympic lớp 10) *Hàm số $f(x)$ thỏa mãn điều kiện sau*

$$x+f(x)=f(f(x)),\ \forall x\in\mathbb{R} \tag{15}$$

Giải phương trình $f(f(x))=0$

Lời giải

Hàm số cần tìm là một song ánh, thật vậy: nếu $f(x_1)=f(x_2)$ thì:

$$x_1=f(f(x_1))-f(x_1)=f(f(x_2))-f(x_2)=x_2$$

Nếu x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $f(f(x))=0$ thì $f(f(x_1))=f(f(x_2))$. Vì là hàm song ánh nên ta suy ra được: $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$. Như vậy phương trình $f(f(x))=0$ không thể có hơn một nghiệm số.

Thay $x=0$ vào phương trình (15) thì dễ dàng thấy được nó là một nghiệm phù hợp. Vậy hàm đã cho có nghiệm duy nhất: $x=0$.

Sau đây dựa theo ví dụ 7 chúng ta hay tìm hàm $f(x)$ thỏa mãn (15). Nếu $f(x)$ có dạng tổng quát thì việc giải sẽ khó thành công, nhưng nếu $f(x)$ có dạng là một đa thức thì có thể chứng minh được (15) có 2 nghiệm:

$$f_1(x)=\frac{1+\sqrt{5}}{2}x,\ f_2(x)=\frac{1-\sqrt{5}}{2}x$$

Thật vậy, nếu $f(x)$ là đa thức có bậc $n\geq 1$ thì vế trái của (15) có bậc n còn vế phải của (15) có bậc n^2. Điều đó phù hợp chỉ khi $n=1$. Đặt $f(x)=kx+b$. Khi đó (15) có dạng:

$$x+(kx+b)=k(kx+b)+b,\ \forall x$$

Hay

$$(k+1)\,x+b=k^2x+(kb+b)\,,\ \forall x$$

Tương đương với hệ:

$$\begin{cases} k+1=k^2 \\ b=kb+b \end{cases}$$

Hệ này có 2 nghiệm: $(k,b)=\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2},0\right)$, $(k,b)=\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2},0\right)$

Chúng tương đương với 2 hàm số thỏa mãn điều kiện (15):

$$f_1\,(x)=\frac{1+\sqrt{5}}{2}x,\ \ f_2\,(x)=\frac{1-\sqrt{5}}{2}x \tag{16}$$

Hai hàm này chưa đủ để lập thành tập nghiệm của (15). Chẳng hạn, hàm số

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}x,\ \text{khi } x\in A=\{a+b\sqrt{5}\mid a,b\in\mathbb{Q}\} \\ \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}x,\ \text{khi } x\in\mathbb{R}\setminus A \end{cases} \tag{17}$$

cũng là nghiệm của phương trình này.

Ví dụ 8 (MK-MGU, 2005, vòng 1) *Tồn tại hay không hai hàm f và g xác định trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện sau:*

$$f\left(g\left(x\right)\right)=x^2,\ \ g\left(f\left(x\right)\right)=x^3 \tag{18}$$

Lời giải

Giả sử tồn tại những hàm thỏa mãn điều kiện bài toán. Giống như cách giải ví dụ 7, trước hết ta chứng minh hàm $f\left(x\right)$ là song ánh. Giả sử với 2 số $x_1,\ x_2$ sao cho $f\left(x_1\right)=f\left(x_2\right)$, từ (18) ta có: $g\left(f\left(x_1\right)\right)=g\left(f\left(x_2\right)\right)$. Do đó $x_1=x_2$.

Xét hàm số: $f\left(g\left(f\left(x\right)\right)\right)$. Vì $g\left(f\left(x\right)\right)=x^3$ nên $f\left(g\left(f\left(x\right)\right)\right)=f\left(x^3\right)$

Mặt khác: $f\left(g\left(f\left(x\right)\right)\right)=\left(f\left(x\right)\right)^2$. Ta có đẳng thức đúng: $f\left(x^3\right)=\left(f\left(x\right)\right)^2$ với mọi $x\in\mathbb{R}$

Thay các giá trị $x=0,\ 1,\ -1$ vào đẳng thức trên, đặt $a=f\left(0\right),\ b=f\left(1\right),\ c=f\left(-1\right)$ thu được các đẳng thức sau: $a=a^2,\ b=b^2,\ c=c^2$.

Vì hàm f là song ánh nên các số a, b, c phải khác nhau, nghĩa là phương trình bậc 2: $t^2=t$ có 3 nghiệm phân biệt. Điều này không thể xảy ra nên điều giả sử các hàm f, g tồn tại là không chính xác. Vậy không tồn tại các hàm f, g thỏa mãn điều kiện bài ra.

Ví dụ 9 (Khoa Toán Cơ, 2003). *Tìm tất cả các hàm $f\left(x\right)$ xác định trên toàn trục số thỏa mãn bất đẳng thức sau*

$$f\left(y\right).\cos\left(x-y\right)\le f\left(x\right) \tag{19}$$

trong đó x, y là 2 số bất kỳ.

Lời giải

Trong (19) thay y bởi $x-\dfrac{\pi}{2}$:

$$f\left(x-\frac{\pi}{2}\right).\cos\frac{\pi}{2}\le f\left(x\right)\Leftrightarrow f\left(x\right)\ge 0.$$

Trong (19) thay tiếp y bởi $x+t$:

$$f(x+t).\cos t \le f(x)$$

Vì $\cos t \ge 1 - \dfrac{t^2}{2}$ và hàm f không âm nên bất đẳng thức sau đúng:

$$f(x+t).\left(1-\frac{t^2}{2}\right) \le f(x) \tag{20}$$

Xét $t \in \left(-\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$, khi đó $1-\dfrac{t^2}{2} > 0$, chia cả 2 vế của (20) cho $1-\dfrac{t^2}{2}$

$$f(x+t) \le \frac{f(x)}{1-\dfrac{t^2}{2}} \tag{21}$$

Trong (20) thay x bởi $x-t$, sau đó thay t bởi $-t$ thì thu được:

$$f(x).\left(1-\frac{t^2}{2}\right) \le f(x+t) \tag{22}$$

Từ (21) và (22) ta có:

$$-\frac{t^2}{2}f(x) \le f(x+t)-f(x) \le f(x)\,\frac{t^2}{2-t^2},\ t \in \left(-\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$$

Bất đẳng thức sau đúng:

$$|f(x+t)-f(x)| \le f(x)\,\frac{t^2}{2-t^2},\ t \in \left(-\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$$

Giả sử $t \ne 0$ thì

$$\left|\frac{f(x+t)-f(x)}{t}\right| \le f(x)\,\frac{|t|}{2-t^2},\ t \in \left(-\sqrt{2};\sqrt{2}\right),\ t \ne 0 \tag{23}$$

Bây giờ cố định x và cho t tiến dần đến 0, hàm số ở vế trái tiến dần đến 0. Theo nguyên lý kẹp thì sẽ có:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x+t)-f(x)}{t} = 0$$

Theo định nghĩa thì giới hạn đó là $f'(x)$. Như vậy chúng ta đã chứng minh được đạo hàm của hàm cần tìm bằng 0 với mọi giá trị của x, tức là $f(x)$ là hàm hằng và giá trị đó phải không âm vì $f(x) \ge 0$ (đã chứng minh ở trên):

$$f(x) \equiv c,\ c \ge 0 \tag{24}$$

Kiểm tra dễ dàng rằng hàm số $f(x) \equiv c$, $c \ge 0$ thỏa mãn điều kiện (19) vì hiển nhiên $\cos(x-y) \le 1$.

IV - Phương trình hàm số cổ điển

Mỗi hàm số trong toán học đều có những tính chất xác định được mô tả bởi đẳng thức hay bất đẳng thức, thậm chí là những khẳng định phức tạp. Ví dụ hàm số $f(x) = a^x,\ a > 0, a \ne 1$ thỏa mãn một số tính chất sau (với mọi x và y): $a^{x+y} = a^x a^y,\ a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y},\ a^x > 0,\ a^0 = 1...$

Một vài tính chất của hàm số trên được mô tả bởi một số khái niệm phức tạp hơn:

$f(x) = a^x$ tăng nếu $a > 1$ và giảm nếu $0 < a < 1$;

$f(x) = a^x$ liên tục với mọi x;

$f(x) = a^x$ khả vi với mọi x, khi đó $f'(x) = a^x \ln a$.

Nếu từ những quan hệ trên chúng ta chưa biết rõ hàm $f(x)$ như vậy các tính chất trên có thể viết lại như sau:

$f(x+y) = f(x)f(y)\,,\ f(x-y) = \dfrac{f(x)}{f(y)},\ f(x) > 0,\ f(0) = 1;$

$f(x)$ tăng nếu $a > 1$ và giảm nếu $0 < a < 1$;

$f(x)$ liên tục với mọi x;

$f(x)$ khả vi với mọi x, khi đó $f'(x) = f(x)\ln a$.

Một số phương trình (ví dụ: $f(x+y) = f(x)f(y)$, $f'(x) = f(x)\ln a$) có thể xem như một phương trình hàm số và xuất hiện một câu hỏi rất tự nhiên về tập hợp nghiệm của chúng. Điều thú vị hơn là khi phương trình đã cho không có một nghiệm hàm nào khác ngoài hàm mà tính chất của nó đã dẫn đến phương trình. Trong trường hợp này phương trình hàm cho kết quả là một hàm có tính chất đặc trưng. Nếu trong phương trình có chứa các phép toán vi phân thì phương trình đó được gọi là phương trình vi phân. Lý thuyết phương trình vi phân là một lĩnh vực lớn của toán học hiện đại với rất nhiều các bài toán của tự nhiên.

1. Tính chất hàm tỉ lệ thuận

Hàm tỉ lệ thuận có dạng: $y = kx$. Dễ thấy rằng tất cả các hàm có dạng như vậy đều là nghiệm của phương trình:

$$f(x+y) = f(x) + f(y)\,,\ \forall x, y \in \mathbb{R} \tag{25}$$

Dưới đây chúng tôi sẽ chứng minh: Nếu $f(x)$ liên tục thì phương trình trên chỉ thỏa mãn khi nghiệm có dạng $f(x) = kx$. Nếu bỏ đi điều kiện liên tục thì nghiệm sẽ chỉ đúng với mọi x hữu tỷ. Chúng tôi sẽ trình bày lý thuyết của Cauchy để giải quyết một số bài toán sau:

Ví dụ 10 (Khoa Sinh học, 7/2005) *Cho hàm số f thỏa mãn: $f(x+y) = f(x) + f(y)$ với mọi x hữu tỷ. Biết rằng $f(10) = -\pi$. Tính $f\left(-\dfrac{2}{7}\right)$?*

Lời giải

Chúng ta cùng giải phương trình hàm đã cho:

$$f(x+y) = f(x) + f(y)\,,\ \forall x \in \mathbb{Q} \tag{26}$$

Trước hết nhận thấy rằng hàm có dạng $f(x) = kx$ thỏa mãn phương trình. Ta sẽ chứng minh phương trình không còn nghiệm nào khác.

Thay $y = 0$ vào phương trình đã cho: $f(x) = f(x) + f(0)$, suy ra $f(0) = 0$.

Thay $y = -x$ thì (26) có dạng: $f(0) = f(x) + f(-x)$, suy ra $f(-x) = -f(x)$

Như vậy tất cả các nghiệm của (26) đều là hàm lẻ.

Thay $y = x$ thì (26) có dạng: $f(2x) = 2f(x), \ \forall x \in \mathbb{Q}$. Sử dụng phương trình này và từ (26) thay $y = 2x$ ta có: $f(3x) = 3f(x), \forall x \in \mathbb{Q}$.

Tương tự khi $y = 3x$ thì ta có: $f(4x) = 4f(x), \forall x \in \mathbb{Q}$. Lặp lại quá trình trên chúng ta nhận được: Với mọi số nguyên dương n thì đẳng thức sau đúng

$$f(nx) = nf(x), \forall x \in \mathbb{Q} \tag{27}$$

Chứng minh điều đó dễ dàng nhờ phương pháp quy nạp. Hàm ta cần tìm là hàm lẻ (như đã nhận xét ở trên), như vậy (27) đúng với mọi số nguyên n.

Ta sẽ chứng minh:

$$f(rx) = rf(x), \ \forall x \in \mathbb{Q} \tag{28}$$

Trong (27) thay $x = \dfrac{t}{n}$, thế thì: $f(t) = nf\left(\dfrac{t}{n}\right)$. Suy ra: $f\left(\dfrac{t}{n}\right) = \dfrac{1}{n}f(t)$.

Như vậy (28) đúng với $r = \dfrac{1}{n}$, dễ dàng suy ra: $f\left(\dfrac{m}{n}x\right) = \dfrac{1}{n}f(mx) = \dfrac{1}{n}mf(x) = \dfrac{m}{n}f(x)$. Vậy (28) đúng với mọi số hữu tỉ r

Nếu thay $x = 1$ thì: $f(r) = rf(1)$

Nếu thay $k = f(1)$ thì:

$$f(x) = kx \tag{29}$$

Vậy nếu hàm số $f(x)$ là nghiệm của (26) thì sẽ có dạng cho bởi công thức (29).

Trở lại bài toán ban đầu dễ dàng tính được: $f\left(-\dfrac{2}{7}\right) = \dfrac{\pi}{35}$

Nếu ta bổ sung thêm điều kiện hàm $f(x)$ liên tục trên toàn $\mathbb{R}$ thì $f(x) = kx$ luôn đúng. Để chứng minh điều này ta xét dãy số hữu tỷ (x_n) hội tụ về x. Khi đó: $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim\limits_{n\to\infty} x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} kx_n$ hay $f(x) = kx$.

Ví dụ 11 (Khoa Toán Cơ, 2003) *Hàm số xác định với mọi số thực x, y thỏa mãn:*

$$f(x + y) = f(x) + f(y) + 80xy$$

Tính $f\left(\dfrac{4}{5}\right)$ *nếu biết* $f\left(\dfrac{1}{4}\right) = 2$.

Lời giải

Phương trình hàm đã cho không thuần nhất vì vế phải chứa hạng tử $80xy$. Cách thông thường là đưa nó về dạng thuần nhất bằng cách tìm nghiệm riêng. Có một dạng tương tự như phương trình của chúng ta là: $(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$. Không khó để có thể chứng minh rằng $f_0(x) = 40x^2$ là nghiệm. Đặt $g(x) = f(x) - f_0(x)$. Phương trình ban đầu trở thành:

$$g(x + y) = g(x) + g(y), \ \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Theo ví dụ 10 thì $g(x) = kx$ với mọi $x \in \mathbb{Q}$. Vậy có thể khẳng định rằng $f(x) = 40x^2 + kx$. Từ điều kiện $f\left(\dfrac{1}{4}\right) = 2$ suy ra $k = -2$, $f(x) = 40x^2 - 2x$. Như vậy: $f\left(\dfrac{4}{5}\right) = 40\left(\dfrac{4}{5}\right)^2 - 2.\dfrac{4}{5} = 24$.

2. Tính chất hàm tuyến tính

Ví dụ 12 (Khoa Hóa học, 1999) *Hàm số $f(x)$ thỏa mãn điều kiện sau với mọi số thực a, b:*

$$f\left(\frac{a+2b}{3}\right) = \frac{f(a)+2f(b)}{3}$$

Tìm giá trị của $f(1999)$ nếu biết $f(1)=1,\ f(4)=7$.

Lời giải

Đặt $g(x) = f(x) - f(0)$. Ta có:

$$g\left(\frac{a+2b}{3}\right) = \frac{g(a)+2g(b)}{3},\ g(0)=0 \tag{30}$$

Thay $b=0$ vào (30):

$$g\left(\frac{a}{3}\right) = \frac{1}{3}g(a),\ a\in\mathbb{R}$$

Thay $a=0$ vào (30):

$$g\left(\frac{2b}{3}\right) = \frac{2}{3}g(b),\ b\in\mathbb{R}$$

Khi đó:

$$g(2b) = 3.\frac{1}{3}g(2b) = 3g\left(\frac{2b}{3}\right) = 3.\frac{2}{3}.g(b) = 2g(b).$$

Nhờ tính chất trên của hàm g, phương trình (30) tương đương với:

$$\frac{1}{3}g(a+2b) = \frac{g(a)+2g(b)}{3} \Leftrightarrow g(a+2b) = g(a)+2g(b) \Leftrightarrow g(a+2b) = g(a)+g(2b)$$

Thay $2b$ bởi c thì:

$$g(a+c) = g(a)+g(c);\ a,c\in\mathbb{R}$$

Như đã chứng minh ở ví dụ 11 thì $g(x)=kx$. Do đó $f(x) = f(0)+kx,\ x\in\mathbb{R}$. Dựa vào điều kiện $f(1)=1,\ f(4)=7$ dễ dàng xác định được $f(0)=-1,\ k=2$. Vậy hàm cần tìm có dạng: $f(x)=2x-1,\ x\in\mathbb{R}$ và $f(1999)=3997$.

3. Tính chất hàm mũ

Chúng ta đã biết tính chất sau của hàm mũ: $a^{x+y}=a^xa^y$. Ở ví dụ tiếp theo sẽ là một phương trình hàm số có tính chất tương tự:

$$f(x+y) = f(x)f(y) \tag{31}$$

Để giải phương trình (31) chúng tôi sẽ giới thiệu cho bạn đọc lý thuyết Cauchy.

Ví dụ 13 (Khoa Sinh học, 6/2005) *Cho hàm số f thỏa mãn $f(x+y) = f(x).f(y)$ với mọi x, $y\in\mathbb{Q}$. Biết rằng $f(4)=16$. Tính $f\left(-\frac{3}{2}\right)$?*

Lời giải

Ý tưởng chung để giải phương trình (31) là dựa vào phép lấy logarit. Đặt $g(x) = \ln f(x)$ thì $g(x+y) = g(x) + g(y)$. Theo ví dụ 10 thì $g(x) = kx$, $\forall x \in \mathbb{Q}$ tương đương với $f(x) = e^{kx} \equiv a^x$, $\forall x \in \mathbb{Q}$ (ở đây $a = e^k$). Từ điều kiện $f(4) = 16$ rút ra $a = 2$. Do đó $f\left(-\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$

Nhưng để lập luận trên được chặt chẽ thì yêu cầu phải chứng minh $f(x) > 0,\ \forall \in \mathbb{Q}$. Trong (31) thay $y = 4 - x$:

$$f(x) f(4-x) = f(4) = 16$$

Điều này chứng tỏ $f(x) \neq 0,\ \forall x \in \mathbb{Q}$. Mặt khác $f(x) = f\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{x}{2}\right) = \left(f\left(\dfrac{x}{2}\right)\right)^2$. Vậy chúng ta đã chứng minh xong $f(x) > 0,\ \forall \in \mathbb{Q}$

Bài toán trên không chỉ đúng trong trường hợp x là số hữu tỷ mà còn đúng khi x là số thực.

4. Tính chất hàm logarit

Hàm số logarit $y = \log_a x$ có tính chất: $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$. Chúng ta có khẳng định sau:

Nếu hàm số $f(x)$ xác định với mọi số thực dương x, liên tục trên tập này và thỏa mãn: $f(1) \neq 0;\ f(xy) = f(x) + f(y),\ x, y \in \mathbb{R}_+$ thì sẽ tồn tại một số dương $a \neq 1$ sao cho $f(x) = \log_a x$.

Để chứng minh khẳng định trên chúng ta xét hàm: $g(x) = f(e^x)$ xác định và liên tục với mọi $x \in \mathbb{R}$. Ta có: $g(x+y) = f(e^{x+y}) = f(e^x.e^y) = f(e^x) + f(e^y) = g(x) + g(y)$, suy ra $g(x) = kx$.

Với $x > 0$ thì $f(x) = f\left(e^{\ln x}\right) = g(\ln x) = k \ln x$.

Theo đề bài: $x_0 \neq 1$ thì $f(x_0) \neq 0$ cho ta $k \neq 0$. Khi đó $a = e^{\frac{1}{k}}$ là số dương khác 1. Vậy hàm $f(x)$ có thể viết dưới dạng sau: $f(x) = k \ln x = \dfrac{\ln x}{\ln a} = \log_a x$.

5. Tính chất hàm lượng giác

Xét hàm $y = \cos x$. Ta có tính chất: $\cos(x+y) = \cos(x-y) = 2\cos x.\cos y$. Phương trình hàm tương ứng:

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) f(y), \quad x, y \in \mathbb{R} \tag{32}$$

Trên thực tế không chỉ có hàm cosin mà còn nhiều hàm khác nữa cũng có tính chất như vậy, đầu tiên phải kể đến là $f(x) \equiv 0$, nhưng đây là một nghiệm tầm thường. Để loại bỏ những nghiệm tầm thường chúng ta bổ sung thêm một điều kiện: tại một số điểm x_0 thì $f(x) \neq 0$.

Một hàm thú vị hơn cả và thật không dễ thấy là hàm cosin hypebolic: $\cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.

Thật vậy:

$$\begin{aligned}&\cosh(x+y) + \cosh(x-y) = \frac{e^{x+y} + e^{x-y}}{2} + \frac{e^{x+y} + e^{-x+y}}{2}\\ &= \frac{e^x\left(e^y + e^{-y}\right) + e^{-x}\left(e^y + e^{-y}\right)}{2} = 2.\frac{e^x + e^{-x}}{2}.\frac{e^y + e^{-y}}{2} = 2\cosh(x).\cosh(y)\end{aligned}$$

Ta có bất đẳng thức: $\dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \geq 1$ (dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = 0$). Dựa vào đây ta có thể loại bỏ nghiệm là hàm cosin hypebolic bằng cách thêm vào điều kiện $f(x) \leq 1$ với mọi x. Giống như các phương trình Cô-si khác chúng ta giả thiết $f(x)$ liên tục với mọi x. Nhận thấy, nếu $f(x)$ là nghiêm của (32) thì $g(x) = f(ax)$ cũng là nghiệm, hay hàm $y = \cos(ax)$ cũng là nghiệm (a là tham số).

Chúng ta sẽ chứng minh phương trình (32) không còn có nghiệm nào khác.

1) Thay $x = x_0$, $y = 0$ vào (32): $2f(x_0) = 2f(x_0)f(0)$. Vì $f(x_0) \neq 0$ nên

$$f(0) = 1 \tag{33}$$

2) Thay $x = 0$ vào (32): $f(y) + f(-y) = 2f(0).f(y)$. Áp dụng (33) nhận được $f(y) = f(-y), \ \forall y \in \mathbb{R}$. Nói cách khác $f(x)$ là hàm chẵn.

3) Trong (32) thay x bởi nx và sau đó thay $y = x$:

$$f((n+1)x) = 2f(nx).f(x) - f((n-1)x)$$

Đây là một công thức truy hồi. Có thể xác định được $f((n+1)x)$ nếu biết $f(nx), f((n-1)x), f(x)$. Vì vậy nếu chúng ta biết $f(x)$ (vì đã biết $f(0) = 1$) thì có thể tính được $f(2x), f(3x), ...$, và $f(-2x), f(-3x), ...$

Kết luận: Nếu 2 nghiệm $f(x)$ và $g(x)$ bằng nhau tại điểm t thì chúng sẽ bằng nhau tại mọi điểm có dạng $nt, \ n \in \mathbb{Z}$. (Để chặt chẽ ta phải chứng minh bằng phương pháp quy nạp toán học)

4) Trong (32) ta thay $y = x$:

$$f(2x) + 1 = 2f^2(x) \tag{34}$$

Đẳng thức này giống với: $\cos(2x) + 1 = 2\cos^2 x$

Từ đây dễ thấy với mọi x thì $f(x) \geq -1$. Trong (34) thay x bởi $\dfrac{x}{2^n}$, trong đó $n \in \mathbb{Z}$:

$$\left|f\left(\frac{x}{2^n}\right)\right| = \sqrt{\frac{1 + f\left(\dfrac{x}{2^{n-1}}\right)}{2}} \tag{35}$$

Nếu bổ sung giả thiết $f\left(\dfrac{x}{2^n}\right) \geq 0$ và giá trị $f(x)$ đã biết thì phương trình (34) giúp ta tính được tất cả các giá trị $f\left(\frac{x}{2^n}\right), \ n \in \mathbb{Z}$.

Kết luận: Nếu 2 nghiệm $f(x)$ và $g(x)$ trùng nhau tại một số điểm t và khi đó giá trị của chúng không âm tại các điểm $\dfrac{t}{2^n}, \ n \in \mathbb{Z}$ thì chúng trùng nhau tại tất cả các điểm đó (dùng quy nạp để chứng minh).

5) Vì $f(0) = 1$ và $f(x)$ liên tục tại $x = 0$ nên có thể giới hạn trên đoạn $[-\varepsilon; +\varepsilon]$, $(\varepsilon > 0)$ hàm $f(x)$ dương. Thật vậy trong trường hợp ngược lại tồn tại dãy số x_k hội tụ về 0 sao cho $f(x_k) \leq 0$. Khi đó tính liên tục của $f(x)$ tại điểm 0 cho ta:

$$f(0) = \lim_{k \to \infty} f(x_k) \leq 0$$

trái với điều kiện $f(0) = 1$.

6) Bất đẳng thức $0 < f(\varepsilon) \leq 1$ cho thấy tồn tại số $\alpha = \arccos f(\varepsilon)$ và $\alpha \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right)$. Điều này tương đương với $f(\varepsilon) = \cos\alpha = \cos a\varepsilon$, trong đó $a = \frac{\alpha}{\varepsilon}$.

Theo mục 4 đã chứng minh chúng trùng nhau tại các điểm có dạng $\frac{\varepsilon}{2^n}, \ n \in \mathbb{N}$, và theo mục 3 chúng trùng nhau tại các điểm có dạng $\dfrac{m\varepsilon}{2^n}, \ m, n \in \mathbb{Z}$

Ví dụ 14 (Khoa Toán Cơ, 2005) *Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số f xác định trên tập số tự nhiên và thỏa mãn 2 điều kiện sau:*

$$f(1) = \cos 2 \tag{36}$$

và

$$f(n+1) = f(n) \,.\cos 1 - \sqrt{1 - (f(n))^2}.\sin 1, \quad n \in \mathbb{N} \tag{37}$$

Lời giải

Phương trình (37) cho phép tìm được giá trị của $f(n+1)$ nếu như đã biết giá trị của $f(n)$. Vì đã biết $f(1) = \cos 2$ nên có thể tính được $f(2)\,,\ f(3)\,, ...$

Chúng ta hãy tính vài giá trị đầu với hy vọng tìm được quy luật. Ta có:

$$f(2) = \cos 2.\cos 1 - |\sin 2|\,.\sin 1 = \cos 2.\cos 1 - \sin 2.\sin 1 = \cos 3$$

$$f(3) = \cos 3.\cos 1 - |\sin 3|\,.\sin 1 = \cos 3.\cos 1 - \sin 3.\sin 1 = \cos 4$$

$$f(4) = \cos 4.\cos 1 - |\sin 4|\,.\sin 1 = \cos 4.\cos 1 + \sin 4.\sin 1 = \cos 3$$

$$f(5) = \cos 3.\cos 1 - |\sin 3|\,.\sin 1 = \cos 3.\cos 1 - \sin 3.\sin 1 = \cos 4$$

Như vậy $f(2k) = \cos 3$ và $f(2k+1) = \cos 4$ với $k \in \mathbb{N}^*$. Điều này chứng minh khá đơn giản nhờ phương pháp quy nạp:

Với $k = 1$: $f(2) = \cos 3, \ \ f(3) = \cos 4$.

Từ (37) cho $n = 2k+1$:

$$\begin{aligned}
&f(2(k+1)) = f((2k+1)+1) = f(2k+1)\,.\cos 1 - \sqrt{1 - (f(2k+1))^2}.\sin 1\\
&= \cos 4.\cos 1 - \sqrt{1 - (\cos 4)^2}.\sin 1\\
&= \cos 4.\cos 1 + \sin 4.\sin 1 = \cos 3
\end{aligned}$$

Tương tự:

$$\begin{aligned}
&f(2(k+1)+1) = f(2(k+1))\,.\cos 1 - \sqrt{1 - (f(2(k+1)))^2}.\sin 1\\
&= \cos 3.\cos 1 - \sqrt{1 - (\cos 3)^2}.\sin 1\\
&= cos3.cos1 - \sin 3.\sin 1 = \cos 4
\end{aligned}$$

Như vậy hàm f chỉ nhận 3 giá trị là: $\cos 2$, $\cos 3$, $\cos 4$. Giá trị nhỏ nhất trong số đó là $\cos 3$.

Bài tập áp dụng

Bài 1. (Khoa Toán học tính toàn và Điều khiển, 1997) Tồn tại không hàm tuyến tính $y = f(x)$ thỏa mãn điều kiện sau với mọi số thực x:

$$2f(x+2) + f(4-x) = 2x + 5$$

Bài 2. (Khoa Toán học tính toàn và Điều khiển, 1997) Tồn tại không hàm bậc hai $y = f(x)$ thỏa mãn điều kiện sau với mọi số thực x:

$$f(x+1) + f(2-x) = (x+1)^2$$

Bài 3. (Khoa Toán học tính toàn và Điều khiển, 1996) Tìm hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn điều kiện sau với mọi $x \neq 0$:

$$f(x) + 3xf\left(\frac{1}{x}\right) = 3x^2$$

Bài 4. (Khoa Hóa học, 6/2001) Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn điều kiện sau với mọi x:

$$f(x+1) = f(x) + 2x + 1$$

Biết $f(0) = 0$, tính $f(2001)$?

Bài 5. (Khoa Toán học tính toàn và Điều khiển, 2002/Olympic Bungari 1968) Tìm tất cả các hàm số $f(x)$ thỏa mãn:

$$xf(y) + yf(x) = (x+y)f(x)f(y), \ \forall x, y \in (-\infty, +\infty)$$

Bài 6. (Khoa Sinh học, 6/2005) Cho hàm số f thỏa mãn

$$f(x-y) = f(x) - f(y), \ \forall x, y \in \mathbb{Q}$$

Biết rằng $f(6) = -\sqrt{3}$, tính $f\left(-\frac{5}{4}\right)$?

Bài 7. (Khoa Sinh học, 6/2005) Cho hàm số f thỏa mãn

$$f(x-y) = \frac{f(x)}{f(y)}, \ \forall x, y \in \mathbb{Q}$$

Biết rằng $f(3) = 27$, tính $f\left(-\frac{5}{2}\right)$?

Bài 8. (Khoa Toán cơ, 2005). Hàm số f xác định trên tập $\mathbb{Z}$ thỏa mãn:

$$f(1) = \cos 1, f(n+1) = f(n).\cos 1 - \sin n.\sin 1, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Bất đẳng thức $f(n) > -1$ có đúng với số tự nhiên n bất kỳ không?

Bạn đọc tìm tòi

Bí ẩn của các tập đóng lồng nhau

Trần Bạt Phong, Đại học Khoa học Tự nhiên, ĐHQG Tp. HCM

Giới thiệu. Trong quá trình học tập, hẳn mỗi chúng ta đều có những "khám phá", tìm tòi đáng nhớ. Đó có thể là một chứng minh "lạ" cho một định lý "quen", một nhận xét đơn giản nhưng có nhiều ứng dụng, hoặc đơn giản chỉ là những thắc mắc "vì sao lại thế, sao là thế này mà không là thế kia?" Những tìm tòi này có thể nhỏ, cũng có thể không mới, nhưng chúng tôi tin rằng chúng là một phần quan trọng trong chu trình "học-hiểu-thích", và do đó chúng thật sự đáng quý. Mục Bạn đọc tìm tòi hi vọng sẽ nhận được sự chia sẽ từ các bạn những tìm tòi, suy nghĩ của chính mình.

Tôi xin bắt đầu với một kết quả quen thuộc, rằng một dãy các quả cầu đóng "thắt dần" trong một không gian metric đầy đủ thì có giao khác rỗng. Để phát biểu điều này một cách chặt chẽ, chúng ta hãy thống nhất một số ký hiệu. Xét không gian metric (X,d). Với mỗi $x \in X$ và $r \geq 0$ ta ký hiệu $B'(x,r)$ là quả cầu đóng tâm x bán kính r, tức là

$$B'(x,r) := \{y \in X | d(x,y) \leq r\}.$$

Bây giờ kết quả phía trên có thể phát biểu như sau:

Mệnh đề 1. *Cho (X,d) là một không gian metric đầy đủ. Giả sử ta có một dãy các quả cầu đóng lồng nhau*

$$B'(x_1,r_1) \supset B'(x_2,r_2) \supset ...$$

và $r_n \to 0$. Khi đó $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B'(x_n,r_n) \neq \emptyset$.

Chứng minh. Để ý rằng với mỗi $m \geq n$ thì $x_m \in B'(x_n,r_n)$, tức là $d(x_n,x_m) \leq r_n$. Do $r_n \to 0$ nên x_n là một dãy Cauchy, và do (X,d) đầy đủ nên x_n hội tụ về một phần tử x trong X. Bây giờ, với mỗi n thì $x_m \in B'(x_n,r_n)$ với $m \geq n$ và $x_m \to x$, suy ra $x \in B'(x_n,r_n)$ vì mỗi quả cầu đóng là một tập đóng. Vậy $x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B'(x_n,r_n)$ và ta có đpcm. □

Bạn đọc tinh ý có thể thấy rằng thật ra $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B'(x_n,r_n)$ chỉ có duy nhất một phần tử (vì sao?) .

Bây giờ phân tích kỹ Mệnh đề 1 ta thấy có 3 giả thiết cơ bản:

1) (X,d) đầy đủ.

2) $B'(x_n,r_n)$ là các quả cầu đóng (lồng nhau).

3) $r_n \to 0$ (tính thắt dần).

Chúng ta sẽ cùng xem thử các giả thiết này có thể giảm bớt hay không.

Vấn đề 1: Tính đầy đủ.

Mệnh đề 1 cho ta một tính chất quan trọng của không gian đầy đủ: "một dãy các quả cầu đóng thắt dần thì có giao khác rỗng". Một cách tự nhiên ta có thể thắc mắc: phải chăng tính chất này là đặc trưng cho tính đầy đủ của không gian? Nói cách khác, nếu biết rằng mọi dãy các quả cầu thắt dần trong không gian metric (X, d) đều có giao khác rỗng, thì liệu ta có thể kết luận rằng (X, d) đầy đủ hay không? Không quá khó khăn, chúng ta có thể kiểm tra rằng điều ngược lại này cũng đúng.

Mệnh đề 2. *Cho (X, d) là một không gian metric. Giả sử mọi dãy các quả cầu đóng lồng nhau*

$$B'(x_1, r_1) \supset B'(x_2, r_2) \supset ...$$

với $r_n \to 0$ đều thỏa mãn $\bigcap_{n=1}^{\infty} B'(x_n, r_n) \neq \emptyset$. Khi đó (X, d) đầy đủ.

Chứng minh. Lấy x_n là một dãy Cauchy trong X, ta cần chứng minh x_n hội tụ. Tất nhiên, ta chỉ cần chứng minh có một dãy con của x_n hội tụ là đủ (vì sao?). Từ đó, chuyển qua một dãy con nếu cần, ta có thể giả sử (vì sao?)

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq 2^{-n}, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

(điều này nhằm mục đích là để $\sum_{n=1}^{\infty} d(x_n, x_{n+1}) < \infty$). Đặt

$$r_n = \sum_{k=n}^{\infty} d(x_k, x_{k+1}).$$

Khi đó dễ dàng kiểm tra rằng r_n là một dãy giảm về 0 và

$$d(x_n, x_m) \leq r_n - r_m, \ \forall n \geq m.$$

Từ tính chất thứ hai ta cũng suy ra

$$B'(x_1, r_1) \supset B'(x_2, r_2) \supset ...$$

Vậy theo giả thiết, tồn tại $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B'(x_n, r_n)$. Cuối cùng $x_n \to x$ bởi vì $d(x_n, x) \leq r_n \to 0$ và điều này kết thúc chứng minh. □

Vấn đề 2: Quả cầu đóng.

Một câu hỏi tự nhiên là liệu ta có thể thay thế các quả cầu đóng trong Mệnh đề 1 bởi các quả cầu mở. Đây là một câu hỏi dễ vì ngay trong $\mathbb{R}$ (với metric thông thường) ta có thể tìm một phản ví dụ: xét các khoảng mở $(0, \frac{1}{n})$ (là các "quả cầu mở" tâm $x_n = \frac{1}{2n}$ với bán kính $r_n = \frac{1}{2n} \to 0$), thì ta có

$$(0, 1) \supset (0, \frac{1}{2}) \supset (0, \frac{1}{3}) \supset ...$$

nhưng $\bigcap_{n=1}^{\infty} (0, \frac{1}{n}) = \emptyset$. Bạn đọc tinh ý cũng có thể nhận ra tâm x_n của các quả cầu trong ví dụ trên vẫn hội tụ (về 0) nhưng giới hạn này nằm ngoài các quả cầu, từ đó các bạn sẽ giải thích được điều này phá vỡ phần nào trong chứng minh Mệnh đề 1.

Như vậy tính đóng là thiết yếu. Ngược lại, giả thiết về "các quả cầu" là không thiết yếu: ta có thể chứng minh điều tương tự cho các tập đóng.

Mệnh đề 3. *Cho (X, d) là một không gian metric đầy đủ. Giả sử A_n là một dãy các tập đóng, khác rỗng, lồng nhau*

$$A_1 \supset A_2 \supset ...$$

và $\operatorname{diam}(A_n) \to 0$. *Khi đó* $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset$ *(và do đó, có duy nhất một phần tử).*

Ở đây ta ký hiệu $\operatorname{diam}(A)$ là đường kính của tập A, tức là

$$\operatorname{diam}(A) = \sup\{d(x,y)|x, y \in A\}.$$

Chứng minh Mệnh đề 3 hoàn toàn tương tự như Mệnh đề 1 và xin dành lại cho bạn đọc.

Vấn đề 3. Tính thất dần.

Bây giờ chúng ta có câu hỏi về giả thiết cuối cùng, và cũng là câu hỏi thú vị nhất, là liệu giả thiết $r_n \to 0$ trong Mệnh đề 1 có thể bỏ bớt?

Trước khi đến với câu trả lời, mời các bạn hãy chứng minh rằng nếu X là không gian định chuẩn (đầy đủ) thì giả thiết $r_n \to 0$ thực sự là *thừa*.

Mệnh đề 4. *Cho X là một không gian Banach. Giả sử ta có một dãy các quả cầu đóng lồng nhau*

$$B'(x_1, r_1) \supset B'(x_2, r_2) \supset ...$$

Khi đó $\bigcap_{n=1}^{\infty} B'(x_n, r_n) \neq \emptyset$.

Hướng dẫn. Trong không gian định chuẩn từ $B'(x_m, r_m) \subset B'(x_n, r_n)$ ta có bất đẳng thức

$$||x_n - x_m|| \leq r_n - r_m, \ \forall m \geq n.$$

Để chứng minh bất đẳng thức này, hãy xét điểm a là giao điểm của tia nối x_n, x_m và mặt cầu $\partial B'(x_m, r_m)$, tức là

$$a = x_m + r_m \frac{x_n - x_m}{||x_n - x_m||}.$$

□

Bây giờ trở lại trường hợp không gian metric. Thật bất ngờ, trái với cảm giác của chúng ta sau khi làm việc với không gian định chuẩn, trong trường hợp không gian metric tổng quát (đầy đủ) thì điều kiện $r_n \to 0$ là *không thể bỏ bớt*. Để thấy điều đó, chúng ta sẽ xây dựng một không gian metric đầy đủ (X, d) mà một dãy các quả cầu đóng (không thất dần) có thê có giao bằng rỗng. Từ Mệnh đề 4 ta thấy rằng không gian X phải khá "bệnh hoạn" (ít nhất không là không gian định chuẩn). Sự kiện các bán kính không tiến về 0 gợi ý cho chúng ta một nhận xét đơn giản nhưng hữu ích sau đây. Giả sử metric trên X thỏa mãn: tồn tại $\epsilon > 0$ sao cho

$$d(x,y) \geq \epsilon, \ \forall x \neq y.$$

Thì (X, d) là một không gian đầy đủ (vì mọi dãy Cauchy y_n sẽ là dãy hằng nếu n đủ lớn).

Từ các phân tích đó ta có một phản ví dụ như sau. Xét X là một tập đếm được gồm các điểm (phân biệt) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, và trên X ta trang bị một metric d định nghĩa bởi: $d(x_n, x_m) = 0$ nếu $n = m$ và

$$d(x_n, x_m) = 1 + \min\{\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\} \text{ nếu } n \neq m.$$

Bạn đọc có thể dễ dàng kiểm tra d là một metric, và theo nhận xét ở trên thì (X, d) đầy đủ. Bây giờ lấy $r_n = 1 + 1/n$ thì ta thấy $B'(x_1, r_1) = X$ và

$$B'(x_n, r_n) = X \backslash \{x_1, ..., x_{n-1}\} \text{ với } n > 1.$$

Như vậy $B'(x_n, r_n)$ là một dãy các quả cầu đóng lồng nhau nhưng có giao bằng rỗng.

CUỘC THI GIẢI TOÁN MATHVN

Phần A - Đề toán dành cho Học sinh

A25. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). A_1 là điểm bất kì trên BC; A_2 là điểm đối xứng của A qua O. Đường thẳng A_1A_2 lại cắt (O) tại A_3. Lấy A_4 đối xứng với A qua OA_1. Đường thẳng qua A_2, vuông góc với BC lại cắt (O) tại A_5. Chứng minh rằng, A_3A_5 đi qua trực tâm của tam giác ABC.

NGUYỄN MINH HÀ, KHỐI THPT CHUYÊN ĐHSP HÀ NỘI

A26. Cho 8 điểm nằm bên trong (hoặc trên biên) một hình tròn bán kính $r > 0$ sao cho có một điểm nằm tại tâm hình tròn và khoảng cách giữa hai điểm bất kỳ không nhỏ hơn 1. Hỏi r có thể chọn nhỏ nhất là bao nhiêu?

THEO PAUL BATEMAN, PAUL ERDOS

A27. Cho $\{x_n\}_{n\geq 1}$ là dãy số thực thỏa mãn

$$\frac{1}{1+x_n^2} + 2nx_n - 2 = 0$$

với mọi số nguyên dương n. Tính $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n\ln(2-2nx_n)}{x_n}$.

DƯƠNG VIỆT THÔNG, KHOA CƠ BẢN, ĐHSP KỸ THUẬT NAM ĐỊNH

A28. Cho tam giác ABC và XYZ, chứng minh rằng

$$\cos^2\frac{X}{2}\cot\frac{A}{2} + \cos^2\frac{Y}{2}\cot\frac{B}{2} + \cos^2\frac{Z}{2}\cot\frac{C}{2} \geq \cos\frac{X}{2}\cos\frac{Y}{2}\cos\frac{Z}{2}$$

TRẦN QUANG HÙNG, ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN - ĐHQG HÀ NỘI

A29. Cho tam giác không cân ABC nội tiếp đường tròn (O). Hai tiếp tuyến cuả (O) tại B và C cắt nhau ở S. Tiếp tuyến của (O) tại A cắt BC ở V. Gọi M là trung điểm cạnh AC. Kí hiệu P, Q, I tương ứng là điểm chung cuả từng cặp đường thẳng $(VM, AB), (AS, BC), (AQ, CP)$. Trên MP, MQ lần lượt lấy hai điểm E, F sao cho $IE||MQ, IF||MP$. Giả sử MP cắt AQ ở H, MQ cắt CP ở K.Chứng minh rằng FH, KE và MI đồng quy.

HOÀNG QUỐC KHÁNH, HỌC SINH THPT CHUYÊN VĨNH PHÚC, TỈNH VĨNH PHÚC

A30. Cho tứ giác nội tiếp $ABCD$. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của AC, BD. Đặt $E = AB \cap CD$ và $F = AB \cap CD$. Chứng minh rằng:

$$\frac{MN}{EF} = \frac{1}{2}\left|\frac{AC}{BD} - \frac{BD}{AC}\right|$$

TẠ HỒNG SƠN, SINH VIÊN TRƯỜNG ĐẠI HỌC KINH TẾ QUỐC DÂN, HÀ NỘI

A31. Giải hệ phương trình sau với $x, y, z \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} 2x^3 + +y = 37x + 70 \\ y^3 + z = 18y + 40 \\ 3z^3 + x = 56z + 100 \end{cases}$$

Lê Nguyễn - Sinh viên Lớp TC0662A1, Đại học Cần Thơ

A32. Tìm số nguyên dương m bé nhất sao cho tồn tại $a > 1$ để hệ phương trình đồng dư

$$\begin{cases} x \equiv a^3 x \mod m \\ y \equiv a^5 y \mod m \\ z \equiv a^7 z \mod m \end{cases}$$

thỏa mãn với mọi $x, y, z \in \mathbb{N}$

Vladimir Lesko, Khoa Đại số, Hình học và Tin học, Đại học Sư phạm Volgograd, LB Nga

A33. Giả sử a,b,c là những số thực dương. Ký hiệu

$$S_r = a^r(a-b)(a-c) + b^r(b-c)(b-a) + c^r(c-a)(c-b)$$

Với r là số thực dương. Khi đó ta có bất đẳng thức

$$S_2^2(a^2+b^2+c^2) + (ab+bc+ca)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2 \geq 2abcS_1S_2$$

Kim Đình Sơn, Học sinh lớp 12A1, THPT Chuyên Vĩnh Phúc

Phần B - Đề toán dành cho Sinh viên

B7. Cho $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx < \infty$

a. Tìm phản ví dụ cho phát biểu $\displaystyle\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$

b. Giả sử f' liên tục và $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |f'(x)|dx < \infty$, liệu chăng $\displaystyle\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$

Phan Thành Nam - Khoa Toán, Đại học Copenhagen, Đan Mạch

B8. Cho A là một tập mở, bị chặn trong $\mathbb{R}$. Hỏi độ đo Lebesgue của A và $\overline{A}$ có bằng nhau hay không?

Lâm Bạt Phong - Đại học Khoa học Tự nhiên, ĐHQG Tp.HCM

B9. Chứng minh rằng

$$|\sin(At)| \leq e^{|A-D_A|t}$$

Trong đó, với $A = (a_{ij})_n$, kí hiệu $|A| = (|a_{ij}|)_n$, $D_A = \mathrm{diag}(a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn})$. Quan hệ $A \geq B$ nghĩa là ma trận $A - B$ không âm.

Phần C - Các vấn đề mở[1]

C4. Xét phương trình vi phân

$$x''(t) + a(t)x^{2n+1}(t) = 0,\ 0 \leq t < \infty$$

Trong đó n nguyên dương, $a(t)$ là hàm khả vi liên tục và $a(t) \geq a_0 > 0$ với mọi t.

a. Nếu $a'(t)$ đổi dấu hữu hạn lần chứng tỏ mọi nghiệm $x(t)$ bất kì đều bị chặn.

b. Nếu bỏ đi điều kiện $a'(t)$ đổi dấu hữu hạn lần, liệu khẳng định trên còn đúng?

Theo Khoa Toán, Trường Đại học Khoa học và Nghệ thuật McMicken, ĐH Cincinnati, Hoa Kỳ

C5. Xét ma trận đối xứng cấp $8m$ có dạng

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & ... & A_{18} \\ A_{21} & A_{22} & ... & A_{28} \\ ... & ... & ... & ... \\ A_{81} & A_{82} & ... & A_{88} \end{pmatrix}$$

Trong đó các block A_{ij} là các ma trận đối xứng cấp m. Giả sử A có đúng k giá trị riêng âm, chứng minh ma trận $A_{11} + A_{22} + ... + A_{88}$ có không quá k giá trị riêng âm, (số giá trị ở đây tính cả với bội của nó trong đa thức đặc trưng)

Theo Problems and Solutions, SIAM

C6. Tìm một hàm f từ không gian Schwartz $S(R)$ của các hàm giảm nhanh với giá trên $\overline{\mathbb{R}^+} = \{x \in \mathbb{R}\ :\ x \geq 0\}$, với biến đổi Fourier-Laplace

$$\widetilde{f}(z) = \int_0^\infty e^{izx} f(x)dx$$

không có không điểm trên $\overline{\mathbb{C}^+} = \{z \in \mathbb{C}\ :\ \mathrm{Im} z \geq 0\}$

Theo Problems and Solutions, SIAM

[1]Các bài toán của phần này được chúng tôi chọn ra từ những vấn đề của các khoa Toán, các trường Đại học trên Thế Giới và từ các tạp chí Toán học. Những bài toán như thế này mang tính chất sinh viên nên chúng tôi hi vọng các bạn có thể cùng nhau tham gia giải quyết.

Lời giải kì trước

A1. *Cho tam giác không cân ABC nội tiếp đường tròn tâm O. M là điểm bất kì trong mặt phẳng.*

$$AM \cap (O) = A_1$$

$$BM \cap (O) = B_1$$

$$CM \cap (O) = C_1$$

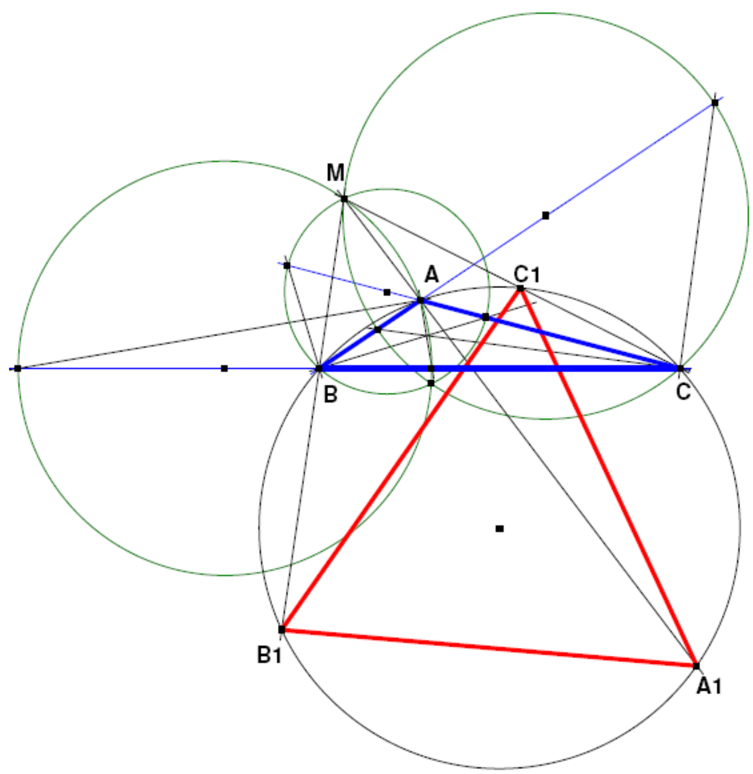
Chứng minh rằng tồn tại đúng hai điểm M sao cho tam giác $A_1B_1C_1$ đều

Solution by Francisco Javier García Capitán, Priego de Córdoba, Spain

Let k be the power of the point M with respect the circle (O). Then we have

$$MA \cdot MA_1 = MB \cdot MB_1 = MC \cdot MC_1 = k^2,$$

so A_1, B_1, C_1 are the inverses of A, B, C with respect circle with center M and radius k.



We take into account that by such an inversion we have

$$A_1B_1 = \frac{k^2 \cdot AB}{MA \cdot MB}, \quad C_1A_1 = \frac{k^2 \cdot CA}{MC \cdot MA}.$$

Since we want $A_1B_1C_1$ to be equilateral we must have

$$A_1B_1 = C_1A_1 \Rightarrow \frac{k^2 \cdot AB}{MA \cdot MB} = \frac{k^2 \cdot CA}{MC \cdot MA} \Rightarrow \frac{MB}{MC} = \frac{AB}{AC},$$

that is M must belongs to the $A-$Apolonian circle for ABC, and in the same way to the three Apollonian circles, so M must be one of the two isodyamic points of triangle ABC (we exclude the trivial case in which M belongs to the circumcircle of ABC and $A_1B_1C_1$ degenerates in a point).

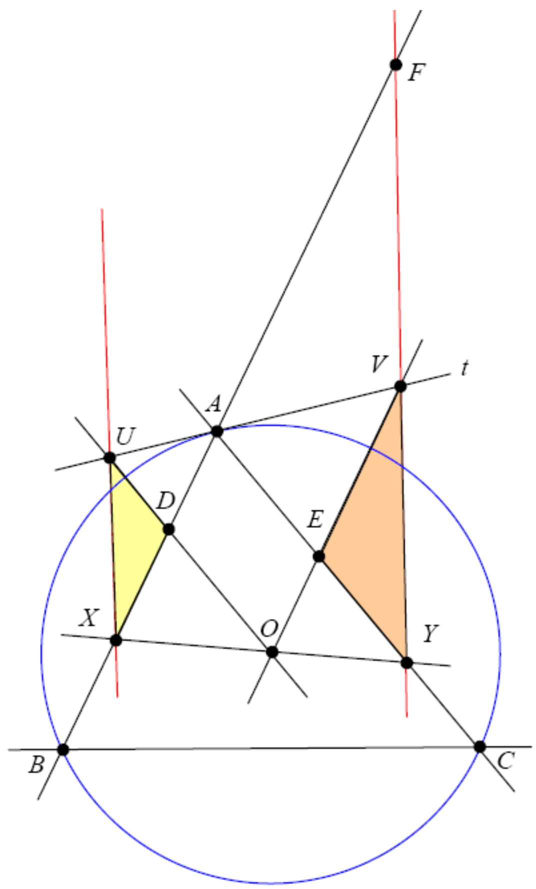
A2. *Cho tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn (O). Tiếp điểm của (O) trên AB, BC, CD, DA lần lượt là M, N, P, Q. Đường thẳng qua M vuông góc với MN cắt PQ ở I. Đường thẳng qua M vuông góc với MQ cắt PN ở J. Chứng minh rằng $AI||BJ$*

Solution by Ercole Suppa, Teramo, Italy

First we prove the following lemma:

Lemma. *Let ABC be a triangle inscribed in the circle (O). Let X be an arbitrary point on AB and $Y = OX \cap AC$. Let t be the tangent at A to the circumcircle. The lines through O parallel to AB and AC intersect t at U, V respectively. Prove that $UX||VY$.*

Proof. Let $D = AB \cap OU$, $E = AC \cap OV$ and $F = AB \cap VY$.



Taking into account the equality of the opposite sides of the parallelogram $ADOE$ and the similarity $\triangle UDA \sim \triangle AEV$, $\triangle DXO \sim \triangle EOY$, we have:

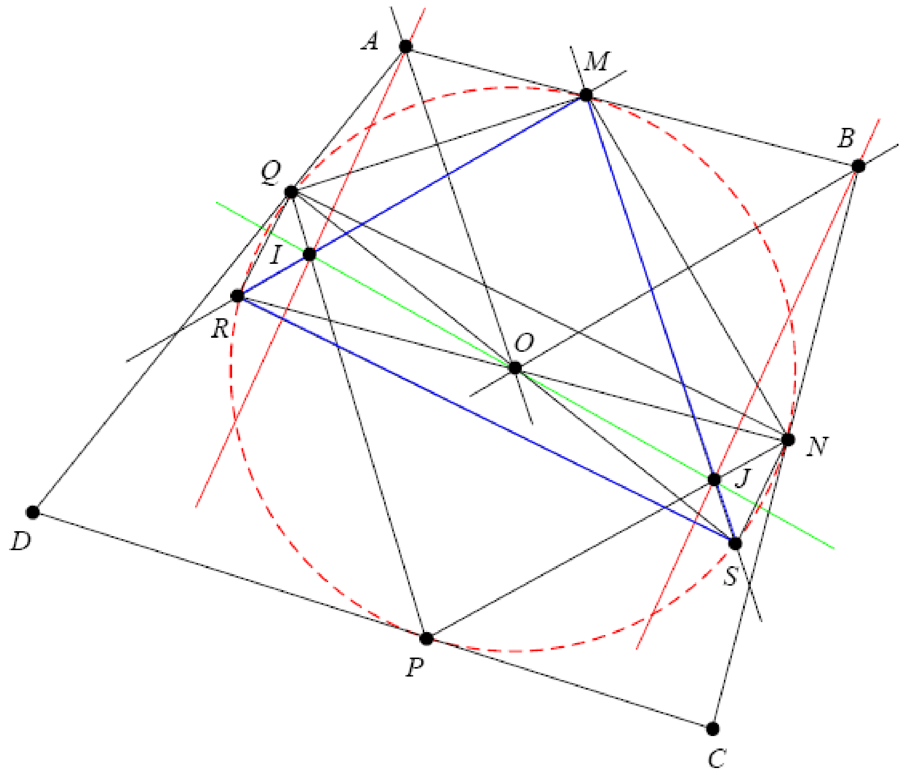
$$\frac{UD}{DX} = \frac{UD}{AD} \cdot \frac{AD}{DX} = \frac{AE}{EV} \cdot \frac{EO}{DX} = \frac{AE}{EV} \cdot \frac{EY}{DO} = \frac{AE}{EV} \cdot \frac{EY}{AE} = \frac{EY}{EV}$$

Therefore the triangles $\triangle DUX$ and $\triangle EYV$ are similar, hence

$$\angle UXD = \angle EVY = \angle AFY$$

and the proof of the lemma is complete. □

Coming back to the problem denote $R = MI \cap (O)$ and $S = MJ \cap (O)$ as shown in figure:

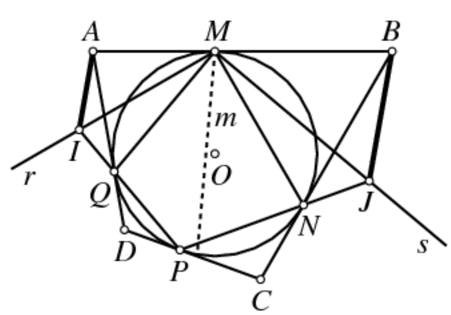


We can notice that $QS \cap RN = O$ because $\angle QMS = \angle RMN = 90°$, so the Pascal theorem applied to the hexagon $QPNRMS$ yields that I, O, J are collinear. Thus the result follows at once from the lemma applied to the triangle $\triangle MRS$ since $AO||MS$, $BO||MR$.

Solution by Francisco Javier García Capitán, Priego de Córdoba, Spain.

We observe from construction that line BJ is the reflection of line AI with respect to the angle bisector m of angle QMN.

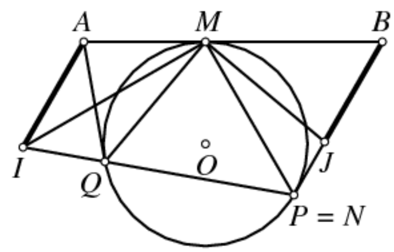
If we consider that M, Q, N are fixed points and P is a variable point on the circle, then, as P varies, the points I and J vary on the lines r and s perpendicular at M to MN and MQ, respectively.



The map $I \to J$ from r to s is a homography. For, we can see that the map $I \to J$ can be defined as follows: given any $I \in r$, we draw line IQ intersecting the circle again at some P. Then we draw PN, and J is the intersection of this line PN with the reflection of line MI on the angle bisector m of angle QMN.

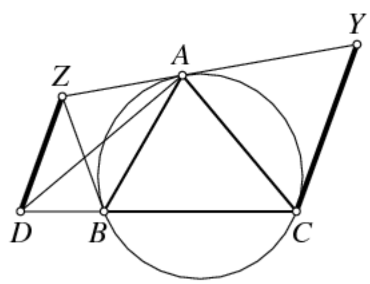
Therefore the problem will be solved if we can find three positions of point P on the circle for which the lines AI and BJ are parallel. □

First we suppose that point P is confounded with N,

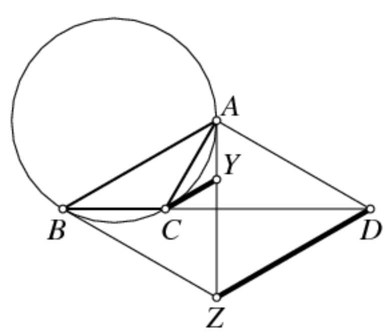


and the result follows from applying the following lemma to triangle MNQ.

Lemma 1. *If XYZ is the tangential triangle of ABC, and the perpendicular to CA at A intersects BC at D, then DZ and CY are parallel.*

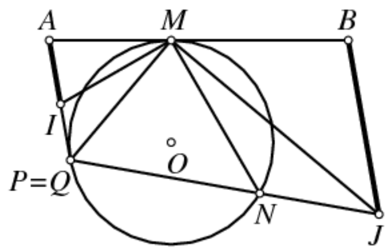


Proof. Let's make an angle chase. Suppose that $C \leqslant 90°$. We have the semiinscribed and inscribed angles $\angle YCA = \angle YAC = \angle ABC = B \Rightarrow \angle YCB = B + C$. We also have $\angle ZBA = \angle ZAB = \angle ACB = C \Rightarrow ZBD = A$. Moreover $\angle AZB = 180° - 2C = 2(90° - C) = 2\angle ADB$, hence D is on the circle centered at Z with radius $ZA = AB$. Therefore the triangle ZDB is isosceles with $ZD = ZB$ and $\angle ZDB = A = 180° - (B + C) = 180° - \angle YCB$ and lines AY and DZ are parallel.

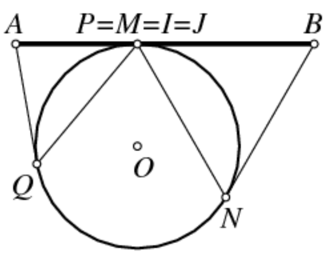


If we have $C \geqslant 90°$, we get as before that $\angle YCA = \angle YAC = \angle ABC = B \Rightarrow \angle YCB = B + C$ and $\angle YCD = A$. We also have $\angle ZBD = A$ and $\angle ZBA = \angle ZAB = \angle ACB = 180° - C$. In this case we have $\angle ADB = 90° - (180° - C) = C - 90°$ and $\angle AZB = 180° - 2(180° - C) = 2C - 180° = 2(C - 90°) = 2\angle ADB$, hence D is on the circle centered at Z with radius $ZA = AB$. Therefore the triangle ZDB is isosceles with $ZD = ZB$ and $\angle ZDB = A = \angle YCD$ and lines AY and DZ are parallel.

In the same way, when the point P reaches the position of point Q the we have that the result also is true by applying Lemma 1 to triangle MQN.



As a third case, when $P = M$, then we have $P = M = I = J$ and $AI \equiv BJ \equiv AB$, so AI and BJ are parallel.



A3. *Cho tam giác ABC với l_a, l_b, l_c tương ứng là phân giác của các góc A, B, C. Chứng minh rằng*

$$\frac{a+b}{l_a+l_b} + \frac{b+c}{l_b+l_c} + \frac{c+a}{l_c+l_a} \geq 2\sqrt{3}$$

Lời giải của Nguyễn Mạnh Dũng, 12A2 Toán, ĐHKHTN-ĐHQGHN

Đầu tiên ta chứng minh một bổ đề:

Bổ đề. *Cho tam giác ABC, khi đó*

$$\sqrt{3}l_a \leq b + c - \frac{a}{2}$$

Chứng minh. Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$\frac{a}{2} + \sqrt{3}l_a = \frac{a}{2} + \frac{2\sqrt{bc}\sqrt{3p(p-a)}}{b+c} \leq \frac{a}{2} + \frac{(b+c)\frac{3(p-a)+p}{2}}{b+c} = \frac{a}{2} + \frac{4p-3a}{2} = b + c$$

Ta có điều phải chứng minh.

Tương tự ta cũng chứng minh được

$$\sqrt{3}l_b \le c + a - \frac{b}{2}, \sqrt{3}l_c \le a + b - \frac{c}{2}$$

Quay lại bài toán, áp dụng bổ đề trên ta được

$$\frac{a+b}{l_a+l_b} + \frac{b+c}{l_b+l_c} + \frac{c+a}{l_c+l_a} \ge \sum \frac{2\sqrt{3}(a+b)}{a+b+4c}$$

Mặt khác, áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có

$$\sum \frac{a+b}{a+b+4c} \ge \frac{4(a+b+c)^2}{\sum(a+b)(a+b+4c)} = 1 + \frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{2(a^2+b^2+c^2)+10(ab+bc+ca)} \ge 1$$

Do đó

$$\frac{a+b}{l_a+l_b} + \frac{b+c}{l_b+l_c} + \frac{c+a}{l_c+l_a} \ge 2\sqrt{3}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$ hay tam giác ABC là tam giác đều.

Solution by Francisco Javier García Capitán, Priego de Córdoba, Spain.

By using the AM-GM inequality, we have

$$l_a^2 = \frac{4bcs(s-a)}{(b+c)} \leqslant s(s-a),$$

where s stands for the semiperimeter of triangle ABC. Adding the three similar inequalities, we get, by using the Cauchy Schwarz inequality

$$\begin{aligned} l_a + l_b + l_c = 1 \cdot l_a + 1 \cdot l_b + 1 \cdot l_c &\leqslant \sqrt{3}\sqrt{l_a^2 + l_b^2 + l_c^2} \\ &\leqslant \sqrt{3}\sqrt{s(s-a+s-b+s-c)} = \sqrt{3}s. \end{aligned}$$

Next we use first the Chebyshev inequality, then the HM-AM inequality

$$\begin{aligned} \frac{a+b}{l_a+l_b} + \frac{b+c}{l_b+l_c} + \frac{c+a}{l_c+l_a} &\geqslant \frac{(2a+2b+2c)\left(\frac{1}{l_a+l_b} + \frac{1}{l_b+l_c} + \frac{1}{l_c+l_a}\right)}{3} \\ &\geqslant \frac{4s\frac{9}{2(l_a+l_b+l_c)}}{3} = \frac{6s}{l_a+l_b+l_c} \geqslant \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}. \end{aligned}$$

and the problem is solved.

Lời giải của Nguyễn Duy Khánh, Lớp Toán Tiên tiến, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội

Ta có

$$l_a = \frac{2\sqrt{bcs(s-a)}}{b+c} \le \sqrt{s(s-a)}$$

Tương tự $l_b \le \sqrt{s(s-b)}$ suy ra

$$\frac{a+b}{l_a+l_b} \ge \frac{a+b}{\sqrt{s(s-a)}+\sqrt{s(s-b)}} \ge \frac{a+b}{\sqrt{c(a+b+c)}}$$

Hoàn toàn tương tự

$$\frac{b+c}{l_b+l_c} \geq \frac{b+c}{\sqrt{s(s-b)}+\sqrt{s(s-c)}} \geq \frac{b+c}{\sqrt{a(a+b+c)}}$$

$$\frac{c+a}{l_c+l_a} \geq \frac{c+a}{\sqrt{s(s-c)}+\sqrt{s(s-a)}} \geq \frac{c+a}{\sqrt{b(a+b+c)}}$$

Nên

$$\frac{a+b}{l_a+l_b}+\frac{b+c}{l_b+l_c}+\frac{c+a}{l_c+l_a} \geq \frac{1}{\sqrt{a+b+c}}\left(\frac{a+b}{\sqrt{c}}+\frac{b+c}{\sqrt{a}}+\frac{c+a}{\sqrt{b}}\right)$$

Vì thế ta chỉ cần chỉ ra

$$\frac{a+b}{\sqrt{c}}+\frac{b+c}{\sqrt{a}}+\frac{c+a}{\sqrt{b}} \geq 2\sqrt{3(a+b+c)}$$

hay dạng tương tự :

$$\frac{m^2+n^2}{p}+\frac{n^2+p^2}{m}+\frac{p^2+m^2}{n} \geq 2\sqrt{3(m^2+n^2+p^2)}$$

$$\Leftrightarrow \sum(m-n)^2\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}-\frac{2}{\sqrt{3(m^2+n^2+p^2)}+m+n+p}\right) \geq 0$$

Theo bất đẳng thức AM-GM ta có $\sqrt{3(m^2+n^2+p^2)} \geq m+n+p$, suy ra

$$\sqrt{3(m^2+n^2+p^2)}+m+n+p \geq 2(m+n+p)$$

Do đó

$$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}-\frac{2}{\sqrt{3(m^2+n^2+p^2)}+m+n+p} \geq \frac{1}{m}+\frac{1}{n}-\frac{1}{m+n+p} = \frac{(m+n)^2+mp+np-mn}{mn(m+n+p)} \geq 0$$

Vai trò của m, n, p là như nhau nên ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác đều.

Các bạn cũng có lời giải tốt: Nguyễn Đình Thi (THPT Chuyên Lương Văn Chánh, Tuy Hòa, Phú Yên), Võ Quốc Bá Cẩn (ĐH Cần Thơ, Tp. Cần Thơ), Ercole Suppa (Teramo, Italy).

A5. *Cho các số dương a, b, c. Chứng minh bất đẳng thức sau với mọi $k \geq 1$:*

$$a^k+b^k+c^k \geq \frac{a^2(b^k+c^k)}{a^2+bc}+\frac{b^2(c^k+a^k)}{b^2+ca}+\frac{c^2(a^k+b^k)}{c^2+ab}.$$

Lời giải của Nguyễn Đình Thi (THPT Chuyên Lương Văn Chánh, Tuy Hòa, Phú Yên)

Đặt $\frac{bc}{a^2}=x; \frac{ca}{b^2}=y; \frac{ab}{c^2}=z \Rightarrow xyz=1$ Ta có

$$a^k+b^k+c^k \geqslant \frac{a^2\left(b^k+c^k\right)}{a^2+bc}+\frac{b^2\left(c^k+a^k\right)}{b^2+ca}+\frac{c^2\left(a^k+b^k\right)}{c^2+ab}$$

$$\Leftrightarrow a^k+b^k+c^k \geqslant \frac{b^k+c^k}{1+\frac{bc}{a^2}}+\frac{c^k+a^k}{1+\frac{ca}{b^2}}+\frac{a^k+b^k}{1+\frac{ab}{c^2}} = \frac{b^k+c^k}{1+x}+\frac{c^k+a^k}{1+y}+\frac{a^k+b^k}{1+z}$$

$$\Leftrightarrow \left(a^k+b^k+c^k\right)(x+1)(y+1)(z+1) \geqslant$$

$$\geqslant \left(b^k+c^k\right)(y+1)(z+1)+\left(a^k+c^k\right)(x+1)(z+1)+\left(a^k+b^k\right)(y+1)(z+1)$$

$$\Leftrightarrow \left(a^k+b^k+c^k\right)(2+x+y+z+xy+yz+zx) \geqslant$$

$$\geqslant a^k(2+2x+y+z+xy+zx)+b^k(2+x+2y+z+xy+yz)+c^k(2+x+y+2z+yz+zx)$$

$$\Leftrightarrow a^kyz+b^kzx+c^kxy \geqslant a^kx+b^ky+c^kz$$

$$\Leftrightarrow a^k.\frac{ca}{b^2}.\frac{ab}{c^2}+b^k.\frac{bc}{a^2}.\frac{ab}{c^2}+c^k.\frac{bc}{a^2}.\frac{ca}{b^2} \geqslant a^k.\frac{bc}{a^2}+b^k.\frac{ca}{b^2}+c^k.\frac{ab}{c^2}$$

Nhân 2 vế bất đẳng thức cho abc ta được bất đẳng thức tương đương là

$$a^{k+3}+b^{k+3}+c^{k+3} \geqslant a^{k-1}b^2c^2+b^{k-1}c^2a^2+c^{k-1}a^2b^2$$

$$\Leftrightarrow a^{k-1}\left(a^4-b^2c^2\right)+b^{k-1}\left(b^4-c^2a^2\right)+c^{k-1}\left(c^4-a^2b^2\right) \geqslant 0$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geqslant b \geqslant c$, do $k \geqslant 1$ nên $a^k \geqslant b^k \geqslant c^k$

Và

$$a^4-b^2c^2 \geqslant b^4-c^2a^2 \geqslant c^4-a^2b^2$$

Do đó theo bất đẳng thức Chebysev ta có

$$a^{k-1}\left(a^4-b^2c^2\right)+b^{k-1}\left(b^4-c^2a^2\right)+c^{k-1}\left(c^4-a^2b^2\right) \geqslant \left(a^k+b^k+c^k\right)\left(a^4+b^4+c^4-a^2b^2-c^2a^2-b^2c^2\right) \geqslant 0$$

Vậy ta có ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Nhận xét. Bằng cách chứng minh tương tự như trên ta cũng thu được bất đẳng thức

$$\frac{bc\left(b^k+c^k\right)}{a^2+bc}+\frac{ca\left(c^k+a^k\right)}{b^2+ca}+\frac{ab\left(a^k+b^k\right)}{c^2+ab} \geqslant a^k+b^k+c^k$$

Bất đẳng thức này được chứng minh như trên và cuối cùng cũng vẫn là

$$a^k.\frac{bc}{a^2}+b^k.\frac{ca}{b^2}+c^k.\frac{ab}{c^2} \leqslant a^k.\frac{ca}{b^2}.\frac{ab}{c^2}+b^k.\frac{bc}{a^2}.\frac{ab}{c^2}+c^k.\frac{bc}{a^2}.\frac{ca}{b^2}$$

Do đó từ 2 bất đẳng thức trên ta thu được chuỗi bất đẳng thức thú vị là

$$\frac{bc\left(b^k+c^k\right)}{a^2+bc}+\frac{ca\left(c^k+a^k\right)}{b^2+ca}+\frac{ab\left(a^k+b^k\right)}{c^2+ab} \geqslant a^k+b^k+c^k \geqslant \frac{a^2\left(b^k+c^k\right)}{a^2+bc}+\frac{b^2\left(c^k+a^k\right)}{b^2+ca}+\frac{c^2\left(a^k+b^k\right)}{c^2+ab}$$

Lời giải của Võ Quốc Bá Cẩn (ĐH Cần Thơ, Tp. Cần Thơ)

Bất đẳng thức cần chứng minh có thể viết lại như sau

$$\sum_{cyc} a^k\left(1-\frac{b^2}{b^2+ca}-\frac{c^2}{c^2+ab}\right) \ge 0$$

Tương đương

$$\sum_{cyc} \frac{a^kbc(a^2-bc)}{(b^2+ca)(c^2+ab)} \ge 0$$

hay là

$$a^{k-1}(a^4-b^2c^2)+b^{k-1}(b^4-c^2a^2)+c^{k-1}(c^4-a^2b^2) \ge 0$$

Bất đẳng thức viết lại thành

$$a^{k+3}+b^{k+3}+c^{k+3} \ge a^{k-1}b^2c^2+b^{k-1}c^2a^2+c^{k-1}a^2b^2$$

Áp dụng bất đẳng thức $AM - GM$ ta được

$$(k-1)a^{k+3} + 2b^{k+3} + 2c^{k+3} \geq (k+3)a^{k-1}b^2c^2,$$

$$(k-1)b^{k+3} + 2c^{k+3} + 2a^{k+3} \geq (k+3)b^{k-1}c^2a^2,$$

$$(k-1)c^{k+3} + 2a^{k+3} + 2b^{k+3} \geq (k+3)c^{k-1}a^2b^2$$

Cộng tương ứng vế theo vế 3 bất đẳng thức này rồi chia cả hai vế cho $k+3$ ta được bất đẳng thức cần phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

A6. *Với a, b, c là các số thực dương sao cho $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng*

$$\frac{a^2 + b^2c}{b+c} + \frac{b^2 + c^2a}{c+a} + \frac{c^2 + a^2b}{a+b} \geq \frac{2}{3}$$

Lời giải của Võ Quốc Bá Cẩn (ĐH Cần Thơ, Tp. Cần Thơ)

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\frac{b^2c}{b+c} = bc - \frac{bc^2}{b+c} \geq bc - \frac{(b+c)^2c}{4(b+c)} = \frac{3}{4}bc - \frac{1}{4}c^2$$

Từ đó dẫn đến

$$\frac{b^2c}{b+c} + \frac{c^2a}{c+a} + \frac{a^2b}{a+b} \geq \frac{3}{4}(ab+bc+ca) - \frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2) = \frac{5}{4}(ab+bc+ca) - \frac{1}{4}$$

Bây giờ, áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta được

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} = (a+b+c)\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}\right) - (a+b+c)$$

$$= \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} - 1 \geq \frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)} - 1 = \frac{1}{2(ab+bc+ca)} - 1$$

Bây giờ ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{5}{4}(ab+bc+ca) - \frac{1}{4} + \frac{1}{2(ab+bc+ca)} - 1 \geq \frac{2}{3}$$

Tương đương

$$\frac{5}{4}(ab+bc+ca) + \frac{1}{2(ab+bc+ca)} \geq \frac{23}{12}$$

Lại áp dụng bất đẳng thức AM-GM

$$\frac{5}{4}(ab+bc+ca) + \frac{1}{2(ab+bc+ca)} = \left[\frac{9}{2}(ab+bc+ca) + \frac{1}{2(ab+bc+ca)}\right] - \frac{13}{4}(ab+bc+ca)$$

$$\geq 3 - \frac{13}{4}.\frac{(a+b+c)^2}{3} = \frac{23}{12}$$

Vậy bất thức đã được chứng minh, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.

Lời giải của Nguyễn Đình Thi (THPT Chuyên Lương Văn Chánh, Tuy Hòa, Phú Yên)

Theo bất đẳng thức Schur thì

$$(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca\right) \geqslant 3\left(a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)\right)$$

$$\Rightarrow a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b) \leqslant \frac{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca}{3}$$

Do đó

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b} = \frac{a^4}{a^2(b+c)}+\frac{b^4}{b^2(c+a)}+\frac{c^4}{c^2(a+b)}$$

$$\geqslant \frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)} \geqslant \frac{3\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca}$$

Lại có

$$\frac{b^2c}{b+c}+\frac{c^2a}{c+a}+\frac{a^2b}{a+b} = \frac{b^2c^2}{bc+c^2}+\frac{c^2a^2}{ca+a^2}+\frac{a^2b^2}{ab+b^2} \geqslant \frac{(ab+bc+ac)^2}{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca}$$

Do đó theo 2 bất đẳng thức trên với chú ý

$$a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+bc+ca$$

Ta có

$$\frac{a^2+b^2c}{b+c}+\frac{b^2+c^2a}{c+a}+\frac{c^2+a^2b}{a+b} \geqslant \frac{3\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca}+\frac{(ab+bc+ac)^2}{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca}$$

$$= \frac{2\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca}+\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca}+\frac{(ab+bc+ac)^2}{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca}$$

$$\geqslant \frac{2.\left(\frac{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca}{2}\right)^2}{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca}+\frac{\left(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca\right)^2}{2\left(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca\right)}$$

$$= a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca \geqslant \frac{2}{3}(a+b+c)^2 = \frac{2}{3}$$

Vậy ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Lời giải của Nguyễn Mạnh Dũng, 12A2 Toán, ĐHKHTN-ĐHQGHN

Theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có:

$$\frac{b^2c}{b+c}+\frac{c^2a}{c+a}+\frac{a^2b}{a+b} \geq \frac{(ab+bc+ca)^2}{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca} \geq \frac{3abc}{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca}$$

Ta cần chứng tỏ rằng

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}+\frac{3abc}{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca} \geq \frac{2(a+b+c)}{3}$$

Coi bất đẳng thức như $A \geq B$, trong đó

$$A = \sum_{cyclic}\frac{a^2}{b+c}-\frac{1}{2}\sum_{cyclic}a, \quad B = \frac{a+b+c}{6}-\frac{3abc}{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca}$$

Biến đổi đơn giản, thu được

$$A = \frac{a+b+c}{2}\sum_{cyclic}\frac{(b-c)^2}{(a+b)(a+c)}, \qquad B = \frac{\displaystyle\sum_{cyclic}(5a+b+c)(b-c)^2}{12(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)}$$

Như vậy, có thể viết bất đẳng thức như sau

$$S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \geq 0$$

Với kí hiệu

$$S_a = \frac{6(a+b+c)}{(a+b)(a+c)} - \frac{5a+b+c}{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca}$$

và đối xứng cho trường hợp S_b, S_c.

Do $6(a+b+c) > 5a+b+c$ và $(a+b)(a+c) < a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca$, nên $S_a > 0$. Tương tự cũng có $S_b > 0, S_c > 0$. Như vậy ta đi đến điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.

Nhìn ra thế giới

Kỳ thi Qualify cho nghiên cứu sinh ở Mỹ

Trong chương trình giáo dục của Mỹ, một sinh viên sau khi tốt nghiệp cử nhân có thể xin học tiếp để lấy bằng Tiến sĩ (Ph.D.) mà không cần có bằng Thạc sĩ. Chương trình học dành cho ngành Toán thường là 5 năm, trong đó giai đoạn đầu (khoảng 2 năm) sẽ học các môn cơ bản (có thể xem như có ý nghĩa tương đương với chương trình Thạc sĩ, mặc dù nội dung có thể khó hơn), và giai đoạn còn lại sẽ tập trung nghiên cứu để hoàn thành luận văn. Thông thường, để đánh dấu kết thúc giai đoạn đầu, các sinh viên phải đậu một kỳ thi kiểm tra chất lượng, gọi là Qualify exam. Nội dung mà mức độ khó dễ của kỳ thi này phụ thuộc vào từng trường, tuy nhiên nhìn chung nó sẽ kiểm tra hiểu biết của sinh viên về các môn học cơ bản, và quyết định sinh viên sẽ được tiếp tục đi vào nghiên cứu hay không.

Với mục tiêu đó, các đề thi Qualify thường hỏi vào những điều cơ bản, không đánh đố, nhưng để trả lời được sinh viên phải nắm vững kiến thức ở mức độ "hiểu" chứ không phải "thuộc". Thật ra, ngay một sinh viên đại học ở Việt Nam đã học vững kiến thức về một môn học nào đó, thì hoàn toàn có thể trả lời được các câu hỏi rơi vào lĩnh vực đó. Mặt khác, chúng tôi thấy rằng hiện nay nhiều sinh viên năm thứ ba, thứ tư của chúng ta vẫn còn đầu tư sức lực vào các kỳ thi Olympic sinh viên Toàn quốc, vốn đề bài gồm các bài toán trong phần giải tích một biến và đại số tuyến tính ma trận (tương đương với các môn học trong học kỳ đầu tiên năm thứ nhất). Đây là một sự lãng phí thời gian đối với các bạn có ý định theo đuổi chuyên ngành về Toán. Do đó, chúng tôi xin giới thiệu một số đề thi Qualify, với hi vọng đây là một nguồn tài liệu tham khảo tốt để các bạn sinh viên tự kiểm tra kiến thức của mình, đồng thời có đường hướng học tập đúng đắn, đặc biệt là các bạn có ước mơ sẽ học Toán lâu dài.

Dưới đây, chúng tôi xin giới thiệu các đề thi Qualify của Đại học Indiana ở Mỹ trong năm 2009. Các bạn có thể tham khảo nguyên văn đề thi, cũng như đề thi các năm trước trên trang web của trường này

`http://www.math.indiana.edu/programs/graduate/tiers/`

Tier I Analysis Exam: January 2009

Hướng dẫn: Cố gắng trả lời tất cả các câu hỏi. Mọi bài toán có điểm số như nhau.

Bài 1. Giả sử f và g là các hàm liên tục đều $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Nếu f và g đều bị chặn, chứng minh rằng fg cũng liên tục đều. Cho một ví dụ để chứng tỏ rằng nếu f hoặc g không bị chặn thì tích fg có thể không liên tục đều (chứng minh rõ ràng rằng phản ví dụ không liên tục đều).

Bài 2. Cho các hàm nhận giá trị thực $f, g \in C^2(\mathbb{R})$ và $h \in C^1(\mathbb{R}^2)$ sao cho

$$f(0) = g(0) = 0,\ f'(0) = g'(0) = h(0,0) = 1.$$

Chứng minh rằng hàm hàm số $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ cho bởi

$$H(x, y) = \int_0^{f(x)} \int_0^{g(y)} h(s,t) ds\mathrm{d}t + \frac{1}{2}x^2 + by^2$$

nhận $(0,0)$ làm một điểm cực tiểu địa phương nếu $b > 1/2$, và nhận $(0,0)$ làm một điểm yên ngựa (saddle point) có 1 điểm yên ngựa nếu $b > 1/2$.

Bài 3. Cho $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z > 0, x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$, tức là nửa trên của mặt cầu tâm 0 bán kính R trong $\mathbb{R}^3$. CHo $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ là trường vector

$$F(x, y, z) = \{x^2(y^2 - z^3), xzy^4 + e^{-x^2}y^4 + y, x^2y(y^2x^3 + 3)z + e^{-x^2-y^2}\}.$$

Tính $\int\limits_H F \cdot \widehat{n} dS$ trong đó $\widehat{n}$ là vector đơn vị hướng ra ngoài trên mặt cầu và dS là độ đo (diện tích) bề mặt.

Bài 4. Cho D là hình vuông với các đỉnh $(2, 2), (3, 3), (2, 4), (1, 3)$. Tính tích phân

$$\int\int_D \ln(y^2 - x^2) dxdy.$$

Bài 5. Giả sử hàm số $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ thuộc lớp C^4 có tính chất: mọi đạo hàm riêng phần bậc nhất và bậc hai của f tại (x_0, y_0) đều bằng 0, và có ít nhất một đạo hàm riêng phần bậc ba tai (x_0, y_0) khác 0. Chứng minh rằng f có thể không đạt cả cực đại địa phương cũng như cực tiểu địa phương tại điểm tới hạn này.

Bài 6. Chứng minh rằng chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1 + n^2(\log(n))^2 x^2}$$

hội tụ đều trên $[\varepsilon, \infty)$ với mỗi $\varepsilon > 0$.

Bài 7. Giả sử hàm số $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ thuộc lớp C^1 sao cho $f(0, 0, 0) = 0$ và

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(0, 0, 0) \neq 0, \frac{\partial f}{\partial x_3}(0, 0, 0) \neq 0, \frac{\partial f}{\partial x_2}(0, 0, 0) + \frac{\partial f}{\partial x_3}(0, 0, 0) \neq -1.$$

Chứng minh rằng hệ phương trình

$$\begin{aligned} f(x_1, f(x_1, x_2, x_3), x_3) = 0 \\ f(x_1, x_2, f(x_1, x_2, x_3)) = 0 \end{aligned}$$

xác định các hàm $x_2 = \varphi(x_1), x_3 = \psi(x_1)$ thuộc lớp C^1 với x_1 trong một lân cận của 0 sao cho

$$\begin{aligned} f(x_1, f(x_1, \varphi(x_1), \psi(x_1)), \psi(x_1)) = 0 \\ f(x_1, \varphi(x_1), f(x_1, \varphi(x_1), \psi(x_1))) = 0. \end{aligned}$$

Bài 8. Cho $b \in [1, e]$ và dãy truy hồi $a_0 = \sqrt[b]{b}$, $a_{n+1} = (\sqrt[b]{b})^{a_n}, n = 0, 1, 2, ...,$, tức là

$$\sqrt[b]{b}, \sqrt[b]{b}^{\sqrt[b]{b}}, \sqrt[b]{b}^{\sqrt[b]{b}^{\sqrt[b]{b}}}, \sqrt[b]{b}^{\sqrt[b]{b}^{\sqrt[b]{b}^{\sqrt[b]{b}}}}, ...$$

Chứng minh dãy số này hội tụ và tìm giới hạn đó.

Bài 9. Với mỗi n=1,2,... ta định nghĩa $x_n : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ bởi

$$x_n(t) = \begin{cases} -1 \text{ nếu } -1 \leq t \leq -1/n, \\ nt \text{ nếu } -1/n \leq t \leq 1/n, \\ 1 \text{ nếu } 1/n \leq t \leq 1. \end{cases}$$

a) Chứng minh rằng $\{x_n\}$ là một dãy Cauchy trong không gian metric $(C([-1,1]),d)$, trong đó $C([-1,1])$ là tập hợp các hàm liên tục trên $[-1,1]$ và hàm khoảng cách d cho bởi

$$d(x,y)=\int_{-1}^{1}|x(t)-y(t)|dt.$$

b) Chứng minh rằng $(C([-1,1]),d)$ không đầy đủ.

Tier I Algebra Exam: January 2009

Hướng dẫn: Mỗi bài toán hoặc một phần chính của mỗi bài toán được tính 5 điểm, như được chỉ ra, và tổng cộng là 90 điểm. Làm mỗi bài toán trên một tờ giấy riêng. Trừ khi có ghi chú khác, nên trình bày bài làm chi tiết và kiểm tra các khẳng định của bạn.

Bài 1. (10 điểm).
(1) Chứng minh rằng mỗi nhóm con của một nhóm cyclic cũng cyclic.

(2) Hãy xác định, sai khác một đẳng cấu, các nhóm abel hữu hạn sinh có tính chất là mỗi nhóm con thực sự đều cyclic.

Bài 2. (5 điểm). Cho G là một nhóm. Định nghĩa một nhóm con $H\in G$ là đặc trưng (characteristic) nếu với mỗi đẳng cấu $\varphi:G\to G$ ta có $\varphi(H)\subset H$. Bây giờ giả sử rằng $H\le G$ là một nhóm con chuẩn tắc và $K\le H$ là một nhóm con đặc trưng của H. Chứng minh rằng K là một nhóm con chuẩn tắc của G.

Bài 3. (5 điểm). Cho G là một nhóm abel hữu hạn cấp n, trong đó toán tử nhân giữa hai phần tử được viết theo kiểu nhân. Giả sử rằng ánh xạ $f:x\to x^m$ là một tự đẳng cấu của G, với một số nguyên dương m cho trước. Chứng minh rằng m và n nguyên tố cùng nhau.

Bài 4. (10 điểm). Cho V là một không gian vector phức hữu hạn chiều, và $L(V)$ là không gian phức các ánh xạ tuyến tính $V\to V$. Với mỗi $A\in L(V)$, hàm số $T_A:L(V)\to L(V)$ định nghĩa bởi

$$T_A(X)=AX-XA,\ \forall X\in L(V)$$

là một ánh xạ tuyến tính.

(1) Giả sử rằng $A,B\in L(V)$ có cùng dạng chuẩn tắc Jordan (Jordan canonical form). Chứng minh rằng T_A và T_B cũng có cùng dạng chuẩn tắc.

(2) Giả sử rằng số chiều của V là 2. Chứng minh rằng với mỗi $A\in L(V)$ thì $rank(T_A)$ là 0 hoặc 2.

Bài 5. (5 điểm). Cho V là một không gian vector thực và $T:V\to V$ là một ánh xạ tuyến tính. Giả sử rằng mỗi vector khác 0 trong V đều là một vector riêng của T. Chứng minh rằng T bằng ánh xạ đồng nhất nhân với một hằng số.

Bài 6. (10 điểm). Trong bài này ta chỉ xét các ma trận trên trường số thực.

(1) Cho A là một ma trận thực 2×2 sao cho

$$A^2+\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}.$$

Chứng minh rằng A đồng dạng với ma trận $B=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$.

(2) Cho A là một ma trận thực $n \times n$ sao cho $A^2 + I_n = 0$ trong đó I_n là ma trận vuông đơn vị cấp n. Chứng minh rằng nếu $n = 2m$ thì A đồng dạng với ma trận $B = \begin{pmatrix} 0 & I_m \\ -I_m & 0 \end{pmatrix}$.

Bài 7. (10 điểm). Cho R là một vành giao hoán với đơn vị 1 và chứa đúng 3 ideals.

(1) Chứng minh rằng mỗi phần tử khác 0 của R là khả nghịch hoặc là ước của 0.

(2) Điều ngược lại có đúng không? Chứng minh câu trả lời.

Bài 8. (5 điểm). Cho một số nguyên tố p, và F_p là trường của p phần tử. Giả sử rằng ước chung lớn nhất của hai đa thức

$$f(x) = 6x^3 + 10x^2 - 110x + 16 \text{ và } g(x) = 6x^2 + 10x - 16$$

trong $F_p[x]$ là 1. Tìm p.

Bài 9. (10 điểm). Cho F_3 là trường hữu hạn với 3 phần tử và $\overline{F_3}$ là bao đóng đại số. Cho K là trường phân rã (splitting field) của $g(x) = x^{21} - 1$.

(1) Tìm số nghiệm của $g(x)$ trên $\overline{F_3}$.

(2) (a) Tìm số phần tử của K. (b) Số phần tử của trường con thực sự cực đại của A là bao nhiêu? (một trường con của K gọi là trường con thực sự nếu nó không bằng K)

Bài 10 (10 điểm).

(1) Giả sử γ là mội số phức sao cho γ^2 là một số đại số trên $\mathbb{Q}$. Chứng minh rằng γ là một số đại số trên $\mathbb{Q}$..

(2) Cho α, β là các số phức sao cho α là số siêu việt trên $\mathbb{Q}$. Chứng minh rằng ít nhất một trong hai số $\alpha - \beta$ và $\alpha\beta$ là số siêu việt

Bài 11 (10 điểm). Cho D là một miền nguyên (domain). Hai ideals khác không $I, J \subset D$ được gọi là comaximal nếu $I + J = D$, và hai ideals gọi là coprime nếu if $I \cap J = I \cdot J$.

(1) Chứng minh rằng nếu hai ideals $I, J \subset D$ là comaximal thì chúng cũng coprime.

(2) Chứng minh rằng nếu D là một vành chính (PID, tức là một miền nguyên mà mọi ideal đều sinh ra từ 1 phần tử) và hai ideals $I, J \subset D$ là coprime, thì chúng là comaximal.

Olympic Học sinh - Sinh viên

Olympic Sinh viên Kiev 2009

Bài 1. Tam giác ABC nội tiếp trong một đường tròn. Liệu có luôn tồn tại điểm D trên đường tròn này sao cho tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp.

Bài 2. $F_0 = 0, F_1 = 1, F_k = F_{k-1} + F_{k-2}, k \geq 2$ là dãy Fibonaci. Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho đa thức $F_n x^{n+1} + F_{n+1} x^n - 1$ bất khả quy trên $\mathbb{Q}[x]$.

Bài 3. Cho A, B, C là các góc của tam giác nhọn. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{\cos A}{\sin B \sin C} + \frac{\cos B}{\sin C \sin A} + \frac{\cos C}{\sin A \sin B} \geq 2$$

$$\frac{\cos A}{\sqrt{\sin B \sin C}} + \frac{\cos B}{\sqrt{\sin C \sin A}} + \frac{\cos C}{\sqrt{\sin A \sin B}} \leq \sqrt{3}$$

Bài 4. Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho tồn tại ma trận $A, B, C \in M_n(\mathbb{Z})$ sao cho

$$ABC + BCA + CAB = I$$

Bài 5. Cho các hàm $x, y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sao cho $(x(t) - x(s))(y(t) - y(s)) \geq 0$ với mọi $t, s \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng tồn tại hai hàm không giảm $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và hàm $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sao cho $x(t) = f(z(t)), y(t) = g(z(t))$ với mọi $t \in \mathbb{R}$.

Bài 6. Với $(x_n)_{n\geq 1}$ là dãy số thực sao cho tồn tại giới hạn hữu hạn

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k$$

Chứng minh rằng với mọi $p > 1$ tồn tại hữu hạn

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} \sum_{k=1}^{n} k^{p-1} x_k$$

Bài 7. Đặt $K(x) = xe^{-x}, x \in \mathbb{R}$. Với mọi $n \geq 3$, tính

$$\sup_{x_1,\ldots,x_n \in \mathbb{R}} \min_{1\leq i<j\leq n} K(|x_i - x_j|)$$

Bài 8. Liệu có tồn tại hàm số $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ sao cho $f(x)f(y) \leq |x - y|$ với mọi $x, y \in \mathbb{Q}, x \neq y$. Và với mọi $x \in \mathbb{Q}$, tập hợp $\{y \in \mathbb{Q} \mid f(x)f(y) = |x - y|\}$ là vô hạn?

Bài 9. Tìm mọi $n \geq 2$ sao cho có thể đánh số tất cả các hoán vị của tập $\{1, 2, ..., n\}$ bằng các số từ 1 đến $n!$ trong đó với bất kì cặp hai hoán vị σ, τ với chỉ số liền kề nhau, cũng như cặp thứ 1 và $n!$ thì $\sigma(k) \neq \tau(k)$ thỏa mãn với mỗi $1 \leq k \leq n$

Bài 10. Cho μ là độ đo trên $\sigma-$đại số Borel trên $\mathbb{R}$ sao cho $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{ax} d\mu(x) < \infty$ với mọi $a \in \mathbb{R}$, và $\mu((-\infty, 0)) > 0, \mu((0, +\infty)) > 0$. Chứng minh rằng tồn tại duy nhất số thực a sao cho $\int_{\mathbb{R}} xe^{ax}d\mu(x) = 0$.

Bài 11. Với $(\xi_n)_{n\geq 0}, (\nu_n)_{n\geq 0}$ là hai dãy biến ngẫu nhiên gồm các phần tử đôi một độc lập cùng phân phối (phân phối của hai dãy có thể khác nhau). Nếu $E(\xi_0) = 0, P\{v_1 = 1\} = p, P\{v_1 = 0\} = 1 - p$, $p \in (0,1)$. Kí hiệu $x_0 = 0, x_n = \sum_{k=1}^{n} v_k, n \geq 1$. Chứng tỏ rằng $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\xi_{x_k} \to 0$ theo xác suất khi $n \to \infty$.

Bài 12. Với $X_1, X_2, ..., X_{2n}$ là các biến ngẫu nhiên độc lập cùng phân phối sao cho $X_1 \neq 0$ hầu chắc chắn. Kí hiệu

$$Y_k = \frac{\left|\sum_{i=1}^{k} X_i\right|}{\sqrt{\sum_{i=1}^{k} X_i^2}}, 1 \leq k \leq 2n$$

Chứng minh bất đẳng thức $E(Y_{2n}^2) \leq 1 + 4(E(Y_n))^2$

Olympic Xác suất Kolmogorov 2009

Bài 1. Đại lượng ngẫu nhiên X có phương sai hữu hạn và không đồng nhất bằng 0. Chứng minh rằng $P(X = 0) \leq (E(X^2))^{-1}D(X)$

Bài 2. Các tập hợp $A_1, A_2, ..., A_{2000} \subset A$, mỗi tập chứa tối thiểu là 6 phần tử và không có 2 tập nào trùng nhau. Chứng minh tồn tại 100 phân hoạch của tập A, mỗi phân hoạch tạo bởi 5 tập con đôi một không giao nhau E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 sao cho mỗi tập A_i chứa ít nhất hai tập E_i.

Bài 3. Từ container A mà trong đó có 1000 quả táo xanh và 3000 quả táo đỏ người ta lấy ra một nửa số táo và chuyển sang container B mà trong đó đã có 3000 quả táo xanh và 1000 quả táo đỏ. Sau đó từ container B người ta lấy ra một quả táo. Tính xác suất để quả táo đó là quả táo xanh.

Bài 4. Cư dân thành phố N sau khi tan sở yêu thích đi câu cá. Giờ tan sở của họ là ngẫu nhiên. Ở trong hồ có cá chép và cá rô. Tỷ lệ các chép là p. Trong thành phố có một đạo luật cấm 1 người không được bắt quá 1 con cá chép trong một ngày, và cư dân thành phố thì rất tuân thủ pháp luật, do đó cứ sau khi câu được cá chép đầu tiên là họ sẽ ra về. Hãy tính tỷ lệ số cá chép mà cư dân thành phố câu được.

Bài 5. Dãy các đại lượng ngẫu nhiên $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ theo xác suất về đại lượng ngẫu nhiên X sao cho với mỗi n X_n và X độc lập. Phải chẳng X bằng hằng số hầu khắp nơi?

Bài 6. Cho dãy các đại lượng ngẫu nhiên $X_1, X_2, ...$ với phân phối Poisson ứng với tham số $\lambda = 1$. Chứng minh rằng $E(\max\{X_1, X_2, ..., X_n\}) = O(\ln n)$ khi $n \to \infty$.

Bài 7. Cho $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là dãy đại lượng ngẫu nhiên sao cho $S_0 = 0$, $S_n = \xi_1 + ... + \xi_n$, ở đây $(\xi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ là đại lượng ngẫu nhiên đạt giá trị bằng 1 hoặc -1 ứng với xác suất là 1/2. Kí hiệu $\tau = \inf\{n \in \mathbb{N} \ : \ S_n = 0\}$. Với $a \in \mathbb{N}$ tìm $E(N_a)$ với $N_a = |\{j < \tau \ : \ S_j = a\}|$.

Bài 8. Cho quá trình Wiener $W = (W_t)_{t\geq 0}$. Tìm kì vọng của thời gian mà đồ thị của nó vượt cao hơn đường thẳng $y = t$. Viết và tính phương sai của thời gian này dưới dạng tích phân các hàm cơ bản.

Bài 9. Thực nghiệm với đại lượng ngẫu nhiên X có phân phối chuẩn với trung bình μ chưa biết, phương sai bằng 1. Để ước lượng μ ta sử dụng biểu thức $f(X)$ với f là hàm liên tục và $E(f(X)^2) < +\infty$ với mọi μ. Chứng tỏ giá trị nhỏ nhất (xác định trên tất cả các hàm f thỏa mãn điều như vậy) của $\sup_{\mu\in\mathbb{R}} E(f(X)-\mu)^2$ đạt được tại hàm $f(x) = x$

Bài 10. Với $p > 0$, và $X_1, X_2, ..., X_n$ là các đại lượng ngẫu nhiên trong cùng một không gian xác suất, sao cho với mọi $\epsilon > 0$ dãy $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}P(\max_{k=1,2,\dots,n} |X_k| > \epsilon n^{1/p})$ hội tụ. Chứng minh rằng $X_n/n^{1/p} \to 0$ hầu khắp nơi khi $n \to \infty$.

Kỳ thi TST Việt Nam 2009 – Đề thi và Bình luận

Trần Nam Dũng - Trường Đại học KHTN, ĐHQG Tp.Hồ Chí Minh

Kỳ thi chọn đội tuyển Việt Nam tham dự IMO 2009 diễn ra trong hai ngày 18 và 19/4/2009 tại Hà Nội. Như thường lệ, mỗi ngày các thí sinh làm 3 bài toán trong vòng 4 giờ. Đề thi năm nay được đánh giá là khá khó chịu và kết quả điểm chuẩn 15 cho 1 suất vào đội tuyển đã chứng tỏ điều đó. Dưới đây là đề thi và bình luận của chúng tôi.

Bình luận chung

Đề thi có khá nhiều bài khó, trong đó khó nhất là các bài 3 (Số học) và 5 (Hình học). Bài 3 khó do tính độc đạo của nó, và chỉ có những thí sinh nắm rất vững về thuyết phương trình Pell nâng cao mới có thể công phá được. Bài hình số 5 có cấu hình khá khó chịu, bản chất bài toán bị dấu khá kỹ khiến nhiều thí sinh không tìm được phương hướng. Bài số 2 thực chất không khó nhưng do cách phát biểu cồng kềnh, thừa dữ kiện nên cũng làm cho các thí sinh sợ và lạc đường. Tương tự bài số 6 cũng không quá khó nhưng do được đặt ở vị trí cuối nên số thí sinh dám công phá bài này không nhiều, mặc dù câu gợi ý (câu a) là khá đơn giản.

Hai bài dễ nhất của kỳ thi là bài số 1 (Hình học) và bài số 4 (Bất đẳng thức). Đáng tiếc là nhiều thí sinh vẫn gặp khó khăn ngay cả với hai bài này. Tuy nhiên, đây cũng là lý do khiến điểm cận kề khu vực "phao cứu sinh" khá đông: có đến trên 10 bài nằm ở mức điểm 13-14. Đây cũng là điểm yếu của đề thi chọn đội tuyển năm nay: tính phân loại không cao.

I - Các bài toán cho điểm

Bài 1. *Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn tâm O; gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là chân đường vuông góc của A, B, C xuống các cạnh đối diện; gọi A_2, B_2, C_2 lần lượt là điểm đối xứng của A_1, B_1, C_1 qua trung điểm các cạnh BC, CA, AB. Các đường tròn ngoại tiếp các tam giác $AB_2C_2, BC_2A_2, CA_2B_2$ cắt (O) tại các điểm thứ hai là A_3, B_3, C_3. Chứng minh A_1A_3, B_1B_3, C_1C_3 đồng quy.*

Lời giải

Gọi H là trực tâm của tam giác ABC. Gọi S là điểm đối xứng của H qua O. Ta có

$$SA_2 \perp BC, SB_2 \perp CA, SC_2 \perp AB$$

Do đó, đường tròn ngoại tiếp tam giác AB_2C_2 là đường tròn đường kính SA. Gọi D là điểm đối xứng của A qua O thì $SD \perp BC$. Do $\angle AA_3D = 90°$ nên A_3 thuộc đường thẳng SD. Gọi M là trung điểm của BC. Do $MA1 || AA_3$ và $MA_1 = AA_3/2$ nên A_1A_3 đi qua trọng tâm G của tam giác ABC. Chứng minh tương tự ta cũng có B_1B_3 và C_1C_3 đi qua G. Vậy A_1A_3, B_1B_3, C_1C_3 đồng quy tại điểm G.

Bình luận. Bài này khá đơn giản. Mấu chốt của lời giải là chứng minh $AA_3 || BC$. Đáng tiếc là nhiều thí sinh làm được đến đây nhưng vẫn không đi tiếp được hoặc sử dụng những "định lý" tự chế như "Nếu có 3 đường thẳng đồng quy (ý nói AA_2, BB_2, CC_2) lấy đối xứng qua ba trục đồng quy (ý nói ba đường trung trực của tam giác) thì ba đường thẳng ảnh cũng đồng quy". Các bạn có thể lấy phản ví dụ để chứng tỏ "mệnh đề" này không đúng.

Bài 4. *Tìm tất cả các số thực r sao cho với mọi số dương a, b, c ta luôn có bất đẳng thức sau*

$$\left(r+\frac{a}{b+c}\right)\left(r+\frac{b}{c+a}\right)\left(r+\frac{c}{a+b}\right) \geq \left(r+\frac{1}{2}\right)^3$$

Lời giải

Do bất đẳng thức là thuần nhất, ta có thể giả sử $a+b+c=1$.

Ta biến đổi bất đẳng thức đề bài về dạng

$$\sum(b-c)^2\left(\frac{r^2}{2}(b+c)+\frac{ra}{4}-\frac{a}{8}\right)\geq 0$$

(Từ đây nếu $r\geq 1/2$ thì bất đẳng thức đúng với mọi $a,b,c>0$).

Đặt $S_a=\frac{r^2}{2}(b+c)+\frac{ra}{4}-\frac{a}{8}=\frac{r^2}{2}-\frac{1}{8}(4r^2-2r+1)a$, và S_b, S_c tương tự. Bất đẳng thức được đưa về dạng

$$\sum(b-c)^2S_a\geq 0$$

+ Cho $b=c$ thì bất đẳng thức tương đương $S_b=S_c\geq 0\Leftrightarrow 4r^2-(4r^2-2r+1)b\geq 0$.

+ Cho $a\to 0, b\to 1/2$ thì ta được $4r^2-\frac{1}{2}(4r^2-2r+1)\geq 0\Leftrightarrow 4r^2+2r-1\geq 0$.

Ta chứng minh đây cũng là điều kiện đủ để bất đẳng thức đúng với mọi a,b,c.

Thật vậy, giả sử $a\geq b\geq c$. Vì $4r^2-2r+1>0$ nên $S_a\leq S_b\leq S_c$. Hơn nữa khi đó $b\leq 1/2$ nên

$$S_b=r^2/2-(4r^2-2r+1)b/8\geq r^2/2-(4r^2-2r+1)/16=(4r2+2r-1)/16\geq 0$$

$$S_b+S_a=r^2-(4r^2-2r+1)(a+b)/8\geq(4r^2+2r-1)/8\geq 0$$

Từ đó

$$S_a(b-c)^2+S_b(c-a)^2+S_c(a-b)^2=S_a(b-c)^2+S_b((a-b)+(b-c))^2+S_c(a-b)^2$$

$$=(S_a+S_b)(b-c)^2+(S_b+S_c)(a-b)^2+2S_b(a-b)(b-c)\geq 0$$

Bình luận. Ngoài cách giải trên, còn có một số cách giải khác như khai triển toàn bộ rồi dùng các bất đẳng thức Schur và Muirhead. Có một số thí sinh tiếp cận bằng phương pháp dồn biến hoặc *pqr* nhưng do nắm lý thuyết không vững nên đã phạm những sai lầm "không sửa chữa được". Đây cũng là bài học cho các bạn học sinh: Khi học một phương pháp mới, phải học thật kỹ và phân tích rõ các điểm mạnh yếu của phương pháp, những điểm dễ bị sơ hở, sai lầm.

II - Hai bài toán trung bình

Bài 2. *Cho đa thức $P(x)=rx^3+qx^2+px+1$ trong đó p,q,r là các số thực với $r>0$. Xét dãy số (a_n), n = 0, 1, 2... xác định như sau*

$$a_0=1,\ a_1=-p,\ a_2=p^2-q$$
$$a_{n+3}=-pa_{n+2}-qa_{n+1}-ra_n\ (n\geq 0).$$

Chứng minh rằng nếu đa thức $P(x)$ chỉ có duy nhất một nghiệm thực và không có nghiệm bội thì dãy (a_n) có vô số số âm.

Bình luận. Bài toán này lẽ ra đã không khó đến vậy (số thí sinh làm được bài này có thể đếm trên đầu ngón tay) nếu như không phải là "đề bài". Việc đề bài cho các giá trị ban đầu a_0, a_1, a_2 khá đặc thù đã khiến các thí sinh lạc đề, không biết khai thác thế nào. Lời giải trình bày dưới đây cho thầy các giá trị đó hầu như không quan trọng, không ảnh hưởng đến kết quả bài toán.

Lời giải

Từ điều kiện đề bài suy ra phương trình đặc trưng của phương trình sai phân $x^3+px^2+qx+r=0$ có 1 nghiệm thực âm và hai nghiệm phức liên hợp.

Giả sử ba nghiệm đó là $-a, R(\cos\alpha+i\sin\alpha), R(\cos\alpha-i\sin\alpha)$ với $a>0, R>0, 0<\alpha<\pi$ thì

$$a_n = C_1(-a)^n + C_2R^n(\cos\alpha+i\sin\alpha)^n + C_3R^n(\cos\alpha-i\sin\alpha)^n$$

trong đó C_1, C_2, C_3 là các hằng số nào đó và $C2, C3$ là các số phức liên hợp.

Đặt $C_2 = R^*(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ với $\varphi\in[0,2\pi)$, ta có

$a_n = C_1(-a)^n + R^n(R^*(\cos\varphi+i\sin\varphi)(\cos n\alpha+i\sin n\varphi) + R^*(\cos\varphi-\sin\varphi)(\cos n\alpha - i\sin n\varphi))$

$= C_1(-a)^n + 2R^nR^*(\cos(n\alpha+\varphi))$

Giả sử ngược lại tồn tại n sao cho $a_n\geq 0$ với mọi $n\geq n_0$. Khi đó ta có

$0\leq a_{n+1}+aa_n = 2R^{n+1}R^*(\cos((n+1)\alpha+\varphi)) + a2R^nR^*(\cos(n\alpha+\varphi))$

$= 2R^nR^*(R\cos((n+1)\alpha+\varphi) + a\cos(n\alpha+\varphi))$

$= 2R^nR^*.C.\cos(n\alpha+\varphi^*) \quad (C>0, \varphi^*\in[0,2\pi))$

với mọi $n\geq n_0$.

Điều này không xảy ra vì $0<\alpha<\pi$ nên tồn tại vô số n sao cho $n\alpha+\varphi^*\in(\pi/2+k2\pi, 3\pi/2+2k\pi)$.

Bài 6. *Có $6n+4$ nhà toán học tham dự 1 hội nghị, trong đó có $2n+1$ buổi thảo luận. Mỗi buổi thảo luận đều có 1 bàn tròn cho 4 người ngồi và n bàn tròn cho 6 người ngồi. Biết rằng 2 người bất kỳ không ngồi cạnh nhau hoặc đối diện nhau quá 1 lần.*

1. *Hỏi có thể thực hiện được việc sắp xếp chỗ ngồi với $n=1$?*
2. *Hỏi có thể thực hiện được việc sắp xếp chỗ ngồi với $n>1$?*

Bình luận. Bài toán này thuộc dạng xây dựng ví dụ. Đây là dạng toán không thực sự quen thuộc với học sinh chúng ta (vốn quen với tìm và chứng minh). Chính điều này và việc bài toán được xếp ở vị trí số 6 đã khiến cho có ít thí sinh giải và giải được bài này. Về thực chất thì bài này không khó. Với $n=1$, ta có thể dễ dàng xây dựng ví dụ về cách xếp:

1. (1 2 3 4), (5 8 6 9 7 10)
2. (1 5 6 7), (2 8 3 9 4 10)
3. (1 8 9 10), (2 5 3 6 4 7)

Ở đây, ý tưởng là tách 1 ra riêng, còn 9 số còn lại phân thành 3 nhóm (2 3 4), (5 6 7) và (8 9 10), sau đó ghép cặp như ở trên.

Lại có thể ghép cặp bằng một cách khác:

1. (1 2 5 8), (3 4 6 7 9 10)
2. (1 3 6 9), (2 4 5 7 8 10)
3. (1 4 6 10), (2 3 5 6 8 9)

Tiếp theo, với $n = 2$, ta cũng tách 1 ra và 15 số còn lại chia thành 3 nhóm (2 3 4 5 6) (7 8 9 10 11) (12 13 14 15 16) và tiếp tục xếp

1. (1 2 7 12) (3 4 8 9 13 14) (5 6 10 11 15 16)
2. (1 3 8 13) (2 6 7 11 12 16) (4 5 9 10 14 15)
3. (1 4 9 14) (2 5 7 10 12 15) (3 6 8 11 13 16)
4. (1 5 10 15) (2 3 7 8 12 13) (4 6 9 11 14 16)
5. (1 6 11 16) (2 4 7 9 12 14) (3 5 8 10 13 15)

Từ đây có thể nảy sinh ra ý tưởng cho lời giải tổng quát: Tách một số ra riêng, còn lại chia thành 3 nhóm, mỗi nhóm $2n + 1$ người. Sẽ lần lượt cho 1 người lẻ tham gia bàn 4 người, $2n$ người còn lại tách thách n cặp và phối hợp với các cặp của 2 nhóm còn lại tạo thành bàn 6 người. Vấn đề là phải ghép các cặp thế nào để hai người cùng nhóm không được ghép cặp với nhau hai lần. Như vậy, dễ thấy bài toán chuyển về bài toán quen thuộc: *Hãy xếp lịch thi đấu cho một giải đấu gồm $2n + 1$ đội thành $2n+1$ lượt, mỗi lượt có n trận đấu.* Bài toán này có thể giải bằng quy nạp hoặc hệ thặng dư.

Lời giải. Tách số $6n + 4$ ra riêng. Các số còn lại chia thành 3 nhóm: $\{1, 2, ..., 2n + 1\}, \{2n + 2, ..., 4n + 2\}, \{4n + 3, ..., 6n + 3\}$. Ở bước thứ k, từ 3 nhóm ta chọn ra 3 số $k, 2k + 1 + k$ và $4k + 2 + k$ để ghép với $6n + 4$ vào bàn 4. Các số còn lại thuộc $\{1, 2, ..., 2n + 1\}\backslash\{k\}$ ta phân cặp theo quy tắc i, j cùng cặp khi và chỉ khi $i + j \equiv 2k \mod 2n + 1$. Ta chứng minh cách chia này thoả mãn điều kiện:

i. Hai số i, j không thể cùng xuất hiện tương ứng ở lần k và lần k', do $2k \equiv 2k' \mod 2n + 1 \Leftrightarrow k \equiv k' \mod 2n + 1$

ii. Với mọi i thuộc $A = \{1, 2, ..., 2n + 1\}\backslash\{k\}$, tồn tại duy nhất j thuộc A sao cho $i + j \equiv 2k \mod 2n + 1$. (Bạn đọc hãy chứng minh chi tiết điều này).

Các số thuộc $\{2n + 2, \dots, 4n + 2\}\backslash\{2n + 1 + k\}$ và $\{4n + 3, \dots, 6n + 3\}\backslash\{4n + 2 + k\}$ cũng được ghép cặp tương tự. Lấy các cặp từ nhóm 1, nhóm 2, nhóm 3 ta ghép thành các bàn 6 người.

III - Hai bài toán khó

Bài 5. *Cho đường tròn (O) đường kính AB, M là điểm tùy ý trong (O). Đường phân giác từ M của tam giác AMB cắt (O) tại N. Phân giác ngoài của góc AMB cắt NA, NB tại P, Q. Đường thẳng AM cắt đường tròn đường kính NQ tại điểm thứ hai R; đường thẳng BM cắt đường tròn đường kính NP tại điểm thứ hai S. Chứng minh đường trung tuyến kẻ từ N của tam giác NSR đi qua một điểm cố định.*

Bình luận. Đây là một bài toán khá khó chịu. Và rất nhiều thí sinh đã sa lầy ở bài toán này, tốn nhiều thời gian và công sức nhưng không tìm ra sợi chỉ của chứng minh. Được biết bài toán này được tạo thành từ hai bài toán quen thuộc:

1) Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp một đường tròn. Giả sử hai đường chéo cắt nhau tại O và K, L, M, N là chân các đường vuông góc hạ từ O xuống AB, BC, CD, DA thì $KLMN$ là một tứ giác ngoại tiếp được. Ngoài ra, O chính là tâm đường tròn nội tiếp tứ giác $KLMN$ và các bộ ba đường thẳng (KL, MN, AC), (KN, LM, BC) đồng quy.

2) (Đường thẳng Newton) Cho tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp được. Giả sử E, F là giao điểm các cặp cạnh đối diện. Khi đó trung điểm M, N, P của AC, BD, EF và tâm I đường tròn nội tiếp nằm trên một đường thẳng.

Đáp án chính thức đi ngược theo hướng này và vì thế khá cồng kềnh, bao gồm các bước tìm lại cấu hình ban đầu, tức là tứ giác ngoại tiếp đường tròn (O), rồi sử dụng ý tưởng chứng minh của đường thẳng Newton để chứng minh sự thẳng hàng.

Chỉ có một số ít thí sinh làm trọn vẹn bài này, trong đó đáng chú ý là lời giải trình bày dưới đây (rất ngắn gọn và sáng sủa) và một lời giải bằng phương pháp toạ độ. Cũng rất sáng sủa (đó là một điều đặc biệt vì lời giải theo hướng này thường cồng kềnh và xấu xí) và đặc biệt hơn, nhờ lời giải này mà chúng tôi phát hiện ra điều kiện $\angle ANB = 90°$ là không cần thiết. Thực ra là chỉ cần N nằm trên phân giác góc $\angle AMB$. Sẽ rất lý thú nếu bạn đọc tự kiểm tra lại điều này (bằng phương pháp hình học hoặc phương pháp toạ độ).

Lời giải. Giả sử $I = NS \cap PQ, J = NR \cap PQ$. Vì M, N, Q, R đồng viên, ta có $\angle AMP = \angle RMQ = \angle JBM = \angle JNQ$. Từ đây suy ra M, N, B, J đồng viên.

Tương tự, M, N, A, I đồng viên. Vì vậy $\angle JBN = \angle IAN = 90°$.

Từ A và B kẻ các đường thẳng vuông góc với MN cắt NJ và NI tương ứng tại U và V. Ta có

$$\frac{AU}{JP} = \frac{NA}{NP} \Rightarrow AU = JP.\frac{NA}{NP}, \quad \frac{BV}{IQ} = \frac{NB}{NQ} \Rightarrow BV = IQ.\frac{NB}{NQ}.$$

Từ đó

$$\frac{AU}{BV} = \frac{JP}{IQ}.\frac{NA}{NB}.\frac{NQ}{NP} = \frac{NA}{NB}.\frac{NQ}{NB}.\frac{S_{NJP}}{S_{NIQ}} = \frac{NA}{NB}.\frac{NQ}{NP}.\frac{NJ.NP.\sin\angle PNJ}{NI.NQ.\sin\angle QNI} = \frac{NA}{NB}.\frac{NJ}{NI} = 1.$$

Suy ra $AU = BV$, nhưng $AU||BV$ nên $AUBV$ là hình bình hành. Vậy O là trung điểm của UV.

Mặt khác, $\Delta NAI \sim \Delta NSP \sim \Delta NBJ \sim \Delta NRQ$

$$\Leftrightarrow \frac{NA}{NI} = \frac{NS}{NP} = \frac{NB}{NJ} = \frac{NR}{NB} \Rightarrow \frac{NA}{NI}.\frac{NS}{NP} = \frac{NB}{NJ}.\frac{NR}{NQ} \Rightarrow \frac{NU}{NJ}.\frac{NS}{NI} = \frac{NV}{NI}.\frac{NR}{NJ} \Rightarrow \frac{NU}{NR} = \frac{NV}{NS}$$

Do đó $UV||RS$. Từ đây suy ra rằng trung tuyến kẻ từ N của tam giác NSR đi qua trung điểm O của UV. Ta có điều phải chứng minh.

Bài 3. *Cho a, b là các số nguyên dương không chính phương sao cho ab cũng không chính phương. Chứng minh rằng ít nhất một trong hai phương trình $ax^2 - by^2 = 1$ và $ax^2 - by^2 = -1$ không có nghiệm nguyên dương.*

Lời giải. Trước hết ta chứng minh bổ đề sau

Bổ đề. Cho phương trình

$$Ax^2 - By^2 = 1 \tag{1}$$

với A và AB không chính phương. Gọi (a, b) là nghiệm nhỏ nhất của phương trình Pell kết hợp

$$x^2 - ABy^2 = 1 \tag{2}$$

Giả sử phương trình (1) có nghiệm và $(x_0; y_0)$ là nghiệm nhỏ nhất của nó thì $(x_0; y_0)$ là nghiệm duy nhất của hệ phương trình

$$\begin{cases} a = Ax^2 + By2 \\ b = 2xy \end{cases}$$

Chứng minh. Giả sử $(x_0; y_0)$ là nghiệm nhỏ nhất của (1). Đặt $u = Ax_0^2 + By_0^2, v = 2x_0y_0$ thì ta có

$$u^2 - ABv^2 = (Ax_0^2 + By_0^2)^2 - AB(2x_0y_0)^2 = (Ax_0^2 - By_0^2)^2 = 1$$

Chứng tỏ $(u; v)$ là nghiệm của phương trình (2). Mà $(a; b)$ là nghiệm nhỏ nhất của phương trình này nên $u \geq a, v \geq b$.

Ta chứng minh $u = a, v = b$. Thật vậy, giả sử trái lại $u > a, v > b$.

$$\begin{aligned}
&a - b\sqrt{AB} < (a - b\sqrt{AB})(a + b\sqrt{AB}) = a^2 - ABb^2 = 1\\
&\Rightarrow (a - b\sqrt{AB})(\sqrt{A}x_0 + \sqrt{B}y_0) < (\sqrt{A}x_0 + \sqrt{B}y_0)\\
&\Rightarrow (ax_0 - Bby_0)\sqrt{A} + (ay_0 - Abx_0)\sqrt{B} < (\sqrt{A}x_0 + \sqrt{B}y_0)
\end{aligned}$$

Lại có

$$\begin{aligned}
&(a + b\sqrt{AB}) < (u + v\sqrt{AB}) = \left(\sqrt{A}x_0 + \sqrt{B}y_0\right)^2\\
&\Rightarrow (ax_0 - Bby_0)\sqrt{A} - (ay_0 - Abx_0)\sqrt{B} = (a + b\sqrt{AB})(\sqrt{A}x_0 - \sqrt{B}y_0)\\
&< (\sqrt{A}x_0 + \sqrt{B}y_0)^2(\sqrt{A}x_0 - \sqrt{B}y_0) = (\sqrt{A}x_0 + \sqrt{B}y_0)
\end{aligned}$$

Đặt $s = ax_0 - Bby_0, t = ay_0 - Abx_0$ thì các bất đẳng thức trên có thể viết lại thành

$$\begin{aligned}
&s\sqrt{A} + t\sqrt{B} < x_0\sqrt{A} + y_0\sqrt{B} \quad (3)\\
&s\sqrt{A} - t\sqrt{B} < x_0\sqrt{A} + y_0\sqrt{B} \quad (4)
\end{aligned}$$

Tiếp theo, ta có $(As^2 - Bt^2) = A(ax_0 - Bby_0)^2 - B(ay_0 - Abx_0)^2 = (a^2 - ABb^2)(Ax_0^2 - By_0^2) = 1$.

Ta thấy $s > 0$ vì

$s > 0 \Leftrightarrow ax_0 > Bby_0 \Leftrightarrow a^2x_0^2 > B^2b^2y_0^2 \Leftrightarrow a^2x_0^2 > Bb^2(Ax_0^2 - 1)$

$\Leftrightarrow (a^2 - ABb2^)x_0^2 > -Bb^2 \Leftrightarrow x_0^2 > -Bb^2$.

Bất đẳng thức cuối cùng đúng, do đó $s > 0$.

Ta thấy $t \neq 0$ vì $t = 0 \Leftrightarrow ay_0 = Abx_0 \Leftrightarrow a^2y_0^2 = A^2b^2x_0^2 \Leftrightarrow (ABb^2+1)y_0^2 = Ab^2(By_0^2+1)y_0^2 = Ab^2$.

Điều này không thể xảy ra do A không chính phương.

Nếu $t > 0$ thì $(s; t)$ là nghiệm nguyên dương của (1), mà (x_0, y_0) là nghiệm nhỏ nhất của (1) nên $s \geq x_0, t \geq y_0$. Do vậy $s\sqrt{A} + t\sqrt{B} \geq \sqrt{A}x_0 + \sqrt{B}y_0$, điều này mâu thuẫn với (3).

Tương tự, với $t < 0$ thì $(s, -t)$ là nghiệm nguyên dương của (1) và ta cũng dẫn đến một bất đẳng thức mâu thuẫn với (4).

Vậy $u = a, v = b$ hay (x_0, y_0) là nghiệm của hệ trên.

Trở lại bài toán giả sử cả hai phương trình

$$ax^2 - by^2 = 1 \qquad (3)$$

và

$$bx^2 - ay^2 = 1 \qquad (4)$$

có nghiệm.

Gọi (m, n) là nghiệm nhỏ nhất của phương trình $x^2 - aby^2 = 1$, (x_1, y_1) là nghiệm nhỏ nhất của phương trình (5) và (x_2, y_2) là nghiệm nhỏ nhất của phương trình (6).

Áp dụng bổ đề 2, ta có $m = ax_1^2 + by_1^2; n = 2x_1y_1$ và $m = bx_2^2 + ay_2^2; n = 2x^2y^2$

Do $ax_1^2 = by_1^2 + 1$ và $ay_2^2 = bx_2^2 - 1$ nên từ đây ta suy ra

$ax_1^2 + by_1^2 = bx_2^2 + ay_2^2$

$\Leftrightarrow 2by_1^2 + 1 = 2bx_2^2 - 1$

$\Leftrightarrow b(x_2^2 - y_1^2) = 1$

Điều này không thể xảy ra do $b > 1$.

Nhận xét.

1. Bổ đề trong lời giải trên chính là một phần của định lý 5.19 , trang 148 trong cuốn *Một số vấn đề về Số học chọn lọc* do Nguyễn Văn Mậu chủ biên, NXB Giáo Dục 2008. Trong định lý này chỉ có điều kiện AB không chính phương và $A > 1$. Điểm duy nhất cần đến A không chính phương là điểm mà ta chứng minh $t \neq 0$. Trong chứng minh trên, $t = 0$ khi và chỉ khi $y_0^2 = Ab^2$. Thay vào đẳng thức $Ax_0^2 - By_0^2 = 1$ ta suy ra $A(x_0^2 - Bb^2) = 1$. Điều này không thể xảy ra do $A > 1$. Vậy bổ đề đúng với điều kiện AB không chính phương và $A > 1$. Và có nghĩa là bài toán của ta cũng đúng nếu ab không chính phương và $a, b > 1$.

2. Bài toán này có xuất xứ rất gần với bài toán sau đây đăng trong tạp chí American Mathematical Monthly:

"Giả sử x và y là các số nguyên dương sao cho $x + xy$ và $y + xy$ là các số chính phương

a. Chứng minh rằng có đúng một trong hai số x và y là số chính phương.

b. Hãy mô tả tất cả các cặp số nguyên dương x, y như vậy". $(*)$

Thật vậy, trước hết, nếu biết đã chứng minh được bài toán (*), ta có thể giải bài số 3 VTST09 như sau:

Giả sử tồn tại x, y, u, v sao cho $ax^2 - by^2 = 1$ và $au^2 - bv^2 = -1$. Đặt $X = by^2$ và $Y = au^2$ thì $X(Y+1) = by^2.bv^2 = (byv)^2, (X+1)Y = ax^2.au^2 = (axu)^2$ là các số chính phương, suy ra X hoặc Y chính phương (theo bài toán (*)!). Điều này mâu thuẫn vì a và b không chính phương.

Đó là bề ngoài, còn nếu đọc kỹ lời giải bài toán (*) thì có thể thấy mấu chốt của lời giải cũng là một tính chất "cơ bản" của phương trình Pell loại 1 và loại 2 tương đương với bổ đề trong lời giải ở trên.

3. Thực ra kết quả bài toán 3 là một định lý trong bài báo của D.T. Walker đăng trên tạp chí AMM năm 1967 (*On the Diophantine equations* $mX^2 - nY^2 = \pm 1$). Việc sử dụng một định lý toán học trong đề thi là việc làm khá thông dụng, tuy nhiên thường là định lý đó phải ít nhiều quen thuộc, có chứng minh ngắn gọn và bài toán phải là một áp dụng khéo léo của định lý. Ở đây, với bài toán 3, cả hai yêu cầu này đều không được đáp ứng. Vì thế, dùng bài toán này để phân loại học sinh là không khả thi.

Sai lầm ở đâu?

Độ đo Metric

Phan Thành Nam - Khoa Toán, Đại học Copenhagen, Denmark

Giới thiệu. Một trong những đặc tính tốt của một người học toán là sự cẩn thận được rèn luyện để tránh những sai lầm trong lập luận. Tuy nhiên, từ một học sinh phổ thông cho tới một giáo sư đại học thì việc thỉnh thoảng mắc "lỗi" vẫn là điều khó tránh khỏi. Chuyên mục "Sai lầm ở đâu?" được mở ra để chúng ta chia sẻ một số lỗi mà chúng ta gặp trong quá trình học tập, đọc sách, nghiên cứu ... Học hỏi từ sai lầm của mình, và của người khác cũng là một điều hay, phải không các bạn?

Trong bài viết này tôi muốn trao đổi với các bạn một chứng minh trong sách "Hausdorff measure" của C.A. Rogers (Cambridge University Press, 1970) về độ đo metric.

Trước hết, xin nhắc lại một số định nghĩa. Chúng tôi giả sử rằng bạn đọc đã quen thuộc với các khái niệm như $\sigma-$đại số ($\sigma-$algebra), độ đo (measure) và không gian metric. Cho Ω là một tập hợp khác rỗng và 2^Ω là họ tất cả các tập con của Ω (ký hiệu 2^Ω là từ nhận xét rằng một tập hữu hạn có n phần tử thì số lượng các tập con của nó là 2^n). Một hàm số $\mu : 2^\Omega \to [0,\infty]$ gọi là một độ đo ngoài (outer measure) nếu nó thỏa mãn:

(i) $\mu(\emptyset) = 0$,

(ii) Nếu $A \subset B$ thì $\mu(A) \le \mu(B)$,

(iii) Nếu $E_1, E_2, ...$ là một họ đếm được các tập con của Ω thì

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu\left(E_n\right).$$

Tính chất (iii) gọi là dưới cộng tính đếm được (countably subaddtive).

Từ một độ đo ngoài μ như vậy, chúng ta có thể thu hẹp 2^Ω xuống một lớp $\sigma-$ đại số mà trên đó μ là một độ đo. Cách xây dựng này rất tổng quát và là ý tưởng của Carathéodory. Để làm điều đó, ta định nghĩa một tập $E \subset \Omega$ là $\mu-$measurable nếu nó thỏa mãn tiêu chuẩn Carathéodory

$$\mu(A) = \mu(A\cap E) + \mu(A \cap E^c),\ \forall A \subset \Omega$$

trong đó $E^c = \Omega \backslash E$. Một cách tương đương, E là $\mu-$measurable nếu và chỉ nếu

$$\mu(A\cup B) = \mu(A) + \mu(B)$$

với mọi $A \subset E$, $B \subset E^c$ (xin bạn đọc kiểm tra điều này). Ta có:

Định lý. [Carathéodory] *Cho μ là một độ đo ngoài trên Ω và $\sum$ là lớp các tập hợp $\mu-$measurable. Khi đó $\sum$ là một $\sigma-$đại số và thu hẹp của μ trên $\sum$ thỏa mãn tính cộng tính đếm được.*

Bây giờ chúng ta giả sử trên Ω có một "hàm khoảng cách" $\rho : \Omega \times \Omega \to [0, \infty)$ sao cho (Ω, ρ) là một không gian metric. Bây giờ ta có một lớp các tập hợp quan trọng là các tập mở và các tập đóng. Một cách tự nhiên, ta muốn xây dựng một độ đo trên $\sigma-$đại số chứa tất cả các tập mở (và các tập đóng) này ($\sigma-$đại số nhỏ nhất có tính chất này gọi là $\sigma-$đại số Borel). Từ cách xây dựng của Carathéodory ở trên, ta sẽ làm được điều này nếu ta có một độ đo ngoài μ trên Ω mà ở đó mọi tập mở (hoặc một cách tương đương là mọi tập đóng) đều là $\mu-$measurable.

Để có điều nói trên, chúng ta sẽ giả sử μ thỏa mãn thêm một tính chất. Ta định nghĩa khoảng cách giữa hai tập hợp $A, B \subset \Omega$ là

$$d(A, B) = \inf\{\rho(x, y) | x \in A, y \in B\}.$$

Ta gọi A, B là tách ngặt (positively separated) nếu $d(A, B) > 0$. Tính chất sau đây nói rằng μ thỏa mãn tính cộng tính giữa hai tập tách ngặt.

(iv) Nếu $A, B \subset \Omega, d(A, B) > 0$ thì

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B).$$

Một độ đo ngoài μ thỏa mãn từ (i)-(ii)-(iii)-(iv) gọi là một độ đo ngoài metric (metric outer measure, hoặc *metric measure*). Có thể chứng minh rằng nếu μ là một độ đo ngoài metric thì mỗi tập đóng (và do đó, mỗi tập mở) đều μ-measurable, và do đó sử dụng xây dựng của Carathéodory ta thấy thu hẹp của μ trên $\sigma-$đại số Borel tạo thành một độ đo.

Chứng minh sau đây trích từ sách "Hausdorff measure" của C.A. Rogers (Cambridge University Press, 1970, trang 32-33). Đây là một chứng minh tự nhiên và đẹp mắt, tuy nhiên còn có một lỗi nhỏ. Câu hỏi dành cho bạn đọc: lỗi đó là gì, và làm sao để sửa chữa? Tòa soạn xin tặng bản in của Tạp chí MathVN số tiếp theo cho 3 bạn có câu trả lời đúng và sớm nhất.

Theorem 18. *If μ is a metric measure in a metric space Ω all closed sets of Ω are μ-measurable.*

Proof. Let F be a closed set in Ω. Consider any two sets A, B that are separated by F with

$$A \subset F, \qquad B \subset \Omega \backslash F.$$

We may suppose that A, B are both non-empty. Our aim is to express B as a union of an increasing sequence

$$B_1 \subset B_2 \subset B_3 \subset \dots$$

of sets with B_n and $\Omega \backslash B_{n+1}$ positively separated for each $n \geqslant 1$ and with A and B_n positively separated for each $n \geqslant 1$.

Once we can effect such a construction it will follow, by using the metric property of the measure, and theorem 17, that

$$\begin{aligned} \mu(A \cup B) &\geqslant \sup_n \mu(A \cup B_n) \\ &= \sup_n \{\mu(A) + \mu(B_n)\} \\ &= \mu(A) + \sup_n \mu(B_n) \\ &= \mu(A) + \mu(B), \end{aligned}$$

and we shall have the required measurability condition for F.

Define B_n to be the set of all points x of Ω in B with

$$\inf_{y\in F}\rho(x,y) > 1/n.$$

Then $$B_1 \subset B_2 \subset B_3 \subset \ldots \subset B.$$

Further, if $b\in B$, then $b \notin F$, as $B \subset \Omega\backslash F$, and b is not a limit point of F and so lies in B_n for all sufficiently large n. Hence

$$B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n.$$

As $A \subset F$, it follows, from the definition of B_n, that A and B_n are positively separated. Now consider any two points b and e with

$$b\in B_n, \qquad e\in \Omega\backslash B_{n+1}, \tag{8}$$

for some $n \geqslant 1$. Then, from the definition of B_{n+1},

$$\inf_{y\in F}\rho(e,y) \leqslant 1/(n+1).$$

So, for some choice of a point f in F, we have

$$\rho(e,f) \leqslant 1/(n+\tfrac{1}{2}).$$

If we had $$\rho(b,e) \leqslant \frac{\frac{1}{2}}{n(n+\frac{1}{2})},$$

this would yield $$\begin{aligned}\inf_{y\in F}\rho(b,y) &\leqslant \rho(b,f)\\ &\leqslant \rho(b,e)+\rho(e,f)\\ &\leqslant \frac{\frac{1}{2}}{n(n+\frac{1}{2})}+\frac{1}{n+\frac{1}{2}}\\ &= 1/n,\end{aligned}$$

contrary to the definition of B_n and the relation $b\in B_n$. Thus for all pairs b, e satisfying (8) we have $\rho(b,e) \geqslant 1/[n(2n+1)]$ and B_n and $\Omega\backslash B_{n+1}$ are positively separated. This completes the construction and so the whole proof.

Ghi chú: Định lý 17 được nhắc tới trong chứng minh trên phát biểu rằng nếu μ là một độ đo ngoài metric thì nó thỏa mãn tính chất "tăng ngặt": nếu $A_1 \subset A_2 \subset ...$ là một dãy tăng các tập con của Ω sao cho A_n và A_n^c tách ngặt (positively separated), tức là $d(A_n, A_{n+1}^c) > 0$, thì

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sup_{m\in\mathbb{N}} \mu\left(A_m\right).$$

Thông báo về vấn đề giải bài và giải thưởng

MathVn là một tạp chí khoa học mang tính cộng đồng và giáo dục Toán học. Đi kèm với các bài viết chuyên đề chúng tôi khởi xướng cuộc thi giải toán không hạn chế đối tượng. Qua đó chúng tôi mong muốn các bạn trẻ tham gia tìm hiểu và giải quyết nhiều vấn đề khác nhau phân thành ba loại: phần cho học sinh, phần cho sinh viên, phần các vấn đề mở. Các đối tượng tham gia có thể giải bài ở tất cả các phần.

Cơ cấu giải thưởng

- Giải nhất: 3 triệu đồng (1 giải)
- Giải nhì: 2 triệu đồng (1 giải)
- Giải ba: 1 triệu đồng (2 giải)
- Giải khuyến khích: Bản in Tạp chí MathVn 1 năm (10 giải)

Qui tắc tính điểm

Với mục đích phát triển các chuyên đề, động viên các bạn tham gia trao đổi giao lưu, chúng tôi khuyến khích gửi lời giải cho các bài toán trong mỗi phần của tạp chí.

+ Lời giải cho các vấn đề mở (Open Problems): 15 điểm (Các bạn có thể không cần gửi cho tạp chí MathVn mà gửi trực tiếp đến các địa chỉ gốc chứa vấn đề đó, bạn nào được đăng tên trong lời giải thì sẽ được tính điểm).

+ Lời giải cho các đề Qualify cho nghiên cứu sinh: 15 điểm.

+ Bài toán đề nghị gửi cho tạp chí: 10 điểm.

+ Lời giải cho các bài đề ra kì này của MathVn chia ra các mức khác nhau tuỳ thuộc vào tính thách thức của bài toán:

* Bài khó và hay: 8 điểm.

* Bài bình thường và hay: 6 điểm.

* Bài dễ và hay : 4 điểm.

+ Lời giải các bài tập trong chuyên đề: 3 điểm.

Với cơ chế tính điểm như trên sau 4 số chúng tôi sẽ có bảng tổng kết theo thứ tự và công bố ở diễn đàn cũng như tạp chí danh sách các bạn đạt giải. Tuy nhiên để giải nhất là xứng đáng thì điểm tổng kết sau 4 kì ra báo phải lớn hơn 150 điểm. Các bạn nhận được giải thưởng sẽ được chúng tôi thông báo và chuyển tiền qua bưu điện.

Về mức độ chia các bài khó dễ qua 3 số báo đã ra như sau:

+ Loại khó: A2,A4,A8,A9,A10,A11,A12,A13, A14, A25, A26, A32, B1,B2,B3,B4,B5,B6,B9.(8 điểm)

+ Loại bình thường: A1,A3,A5,A6,A7,A15,A16,A17,A19,A20,A21,A23,A24,A27,A28,A29,A30,A31,A33,B7,B8.(6 điểm)

+ Loại dễ: A18, A22. (4 điểm)

Về hạn giải các bài:

+ Số 1 : đến hết ngày 25/07/2009.

+ Số 2: đến hết ngày 29/10/2009.

+ Số 3: đến hết ngày 29/01/2010

Một lần nữa thay mặt nhóm biên tập tạp chí MathVn mong rằng có sự tham gia nhiều hơn nữa của các thầy giáo cô giáo và các bạn trẻ để cộng đồng cũng như tạp chí chúng ta ngày càng phát triển bền vững và chất lượng. Thư từ thắc mắc xin gửi về địa chỉ thư điện tử `mathvn2008@gmail.com` hoặc truy cập vào website `http://mathvn.org`.

BAN BIÊN TẬP