

Câu 1. Giải các phương trình sau.

(a). $2\cos x - 1 = 0$ (0,75đ)

$$* 2\cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = \cos \frac{\pi}{3} \text{ (0,5đ)} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi \text{ (0,25đ)}.$$

(b). $\sin^2 x + 2\sin x = 0$ (0,75đ)

$$* (\sin x + 2)\sin x = 0 \text{ (0,25đ)} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \sin x = -2 \end{cases} \text{ (0,25đ)} \Rightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ (0,25đ)}$$

(c). $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 2$ (0,75đ)

$$* \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 1 \text{ (0,25đ)} \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k2\pi \text{ (0,25đ)} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ (0,25đ)}$$

Câu 2. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

(a). $y = 2\cos x - 2021$ (0,5đ)

$$* \begin{cases} \max y = 2 - 2021 \\ \min y = -2 - 2021 \end{cases} \text{ (0,25đ)} \Leftrightarrow \begin{cases} \max y = -2019 \\ \min y = -2023 \end{cases} \text{ (0,25đ)}.$$

(b). $y = 6\sin x + 8\cos x + 2021$. (0,5đ)

$$* \begin{cases} \max y = \sqrt{6^2 + 8^2} + 2021 \\ \min y = -\sqrt{6^2 + 8^2} + 2021 \end{cases} \text{ (0,25đ)} \Leftrightarrow \begin{cases} \max y = 2031 \\ \min y = 2011 \end{cases} \text{ (0,25đ)}$$

Câu 3.

(a). Cho cấp số cộng có số hạng đầu bằng 4 và số hạng thứ mười bằng 25. Tìm công sai của cấp số cộng. (0,5đ)

$$* u_n = u_1 + (n-1)d \text{ (0,25đ)} \Rightarrow d = \frac{7}{3} \text{ (0,25đ)}$$

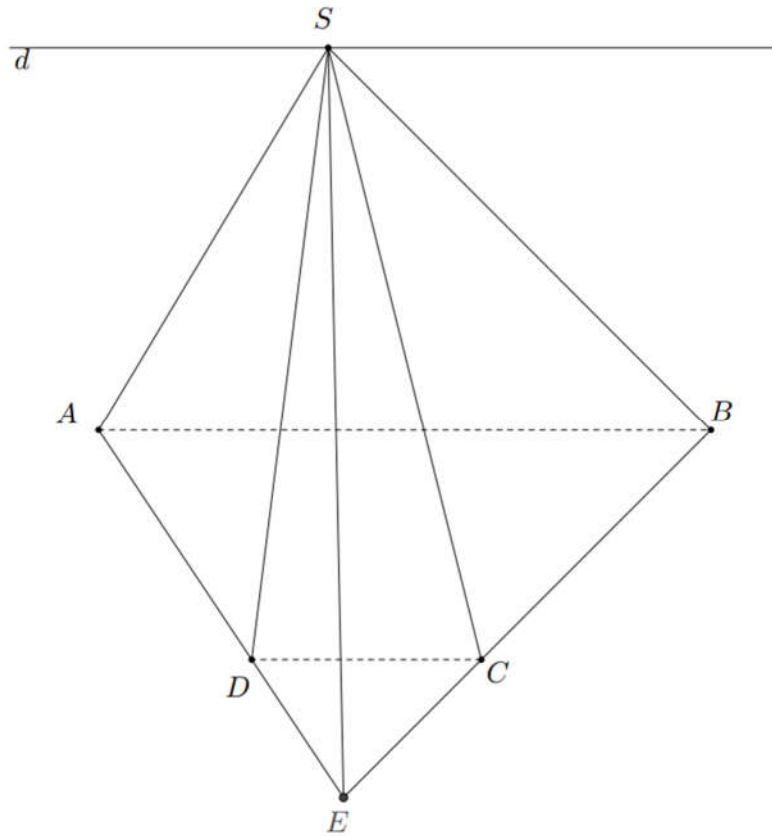
(b). Có thể tạo được bao nhiêu số tự nhiên có bốn chữ số từ tập $\{1; 2; 3; 4; 5\}$? (0,5đ)

$$* \overline{abcd} \text{ (0,25đ)} \Rightarrow \text{có } 625 \text{ (0,25đ)}$$

Câu 4. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển thức $\left(x - \frac{1}{x^2}\right)^{15}$ theo công thức nhị thức Newton. (0,75đ)

$$* T_k = (-1)^k C_{15}^k x^{15-3k} \text{ (0,25đ)}. \text{ Cho } 15-3k=0 \Leftrightarrow k=5 \text{ (0,25đ)} \Rightarrow T_5 = -C_{15}^5 \text{ (0,25đ)}$$

Câu 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ với $ABCD$ là hình thang có AB là đáy lớn và CD là đáy nhỏ.



(a). Tìm giao điểm của đường thẳng AD với (SBC) . (1,0đ)

* Trong mặt phẳng $(ABCD)$, $BC \cap AD = E$ (0,5đ). Ta có

$$\begin{cases} BC \subset (SBC) \\ BC \cap AD = E \end{cases} \Rightarrow E = AD \cap (SBC) \text{ (0,5đ)}$$

(b). Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) . (1,0đ)

$$\text{* Ta có } \begin{cases} S \in (SAB) \cap (SCD) \\ AB \parallel CD \\ AB \subset (SAB) \\ CD \subset (SCD) \end{cases} \text{ (0,5đ)} \Rightarrow \begin{cases} d = (SAB) \cap (SCD) \\ S \in d \\ d \parallel AB \end{cases} \text{ (0,5đ).}$$

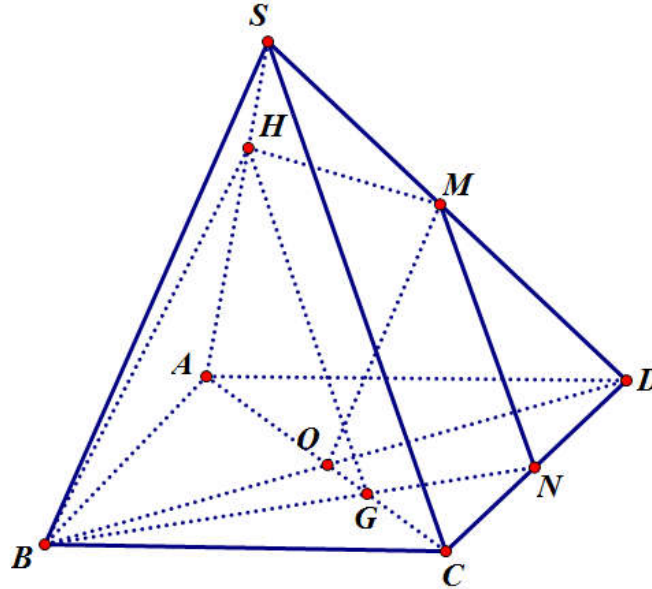
Câu 6. Một hộp chứa 4 quả cầu đỏ (được đánh số từ 1 đến 4) và 5 quả cầu xanh (được đánh số từ 5 đến 9). Lấy ngẫu nhiên ra 2 quả cầu. Tính xác suất để lấy được 2 quả cầu có số chẵn và khác màu. (1,0đ)

$$\text{* } n(\Omega) = C_9^2 = 32 \text{ (0,25đ)} \Rightarrow \text{số các quả cầu có số chẵn có màu đỏ là } \{2; 4\} \text{ và màu xanh là } \{6; 8\} \text{ (0,25đ)}$$

$$\text{* } n(A) = 4 \text{ (0,25đ)} \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{4}{32} = \frac{1}{8} \text{ (0,25đ).}$$

Câu 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O và M là trung điểm của SD

a) Chứng minh rằng MO song song với mặt phẳng (SAB) . (0,5đ)



* Ta có MO là đường trung bình của tam giác SBD suy ra $MO \parallel SB$ và $SB \subset (SAB)$
 . Từ đây suy ra $MO \parallel (SAB)$. **(0,5đ)**

b) Gọi G là trọng tâm tam giác (BCD) . Mặt phẳng (P) qua M, G và (P) song song với đường thẳng SC . Dựng thiết diện tạo bởi (P) và hình chóp. **(0,5đ)**

* $SC \parallel (P)$ và M là điểm chung của hai mặt phẳng $(P), (SCD)$ nên $(SCD) \cap (P) = MN, N$ là trung điểm của CD .

+ GN đi qua điểm B

+ $SC \parallel (P)$ và G là điểm chung của hai mặt phẳng $(P), (SAC)$ nên

$(SAC) \cap (P) = GH, GH \parallel SC, H \in SA$ **(0,25đ)**

* Suy ra các đoạn giao tuyến tạo bởi (P) và các mặt $(SAB), (ABCD), (SCD), (SAD)$ lần lượt là HB, BN, NM, MH . Vậy thiết diện tạo bởi (P) và hình chóp là tứ giác $MNBH$. **(0,25đ)**

Câu 8. Tam giác mà ba đỉnh của nó là ba trung điểm ba cạnh của tam giác ABC được gọi là *tam giác trung bình* của tam giác ABC . Ta xây dựng dãy các tam giác $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2, A_3B_3C_3, \dots$ sao cho $A_1B_1C_1$ là một tam giác đều cạnh bằng 3. Với mỗi số nguyên dương $n \geq 2$, tam giác $A_nB_nC_n$ là tam giác trung bình của tam giác $A_{n-1}B_{n-1}C_{n-1}$. Ta kí hiệu S_n là diện tích hình tròn ngoại tiếp tam giác $A_nB_nC_n$. Tổng $S = S_1 + S_2 + \dots + S_{2021}$. **(1,0đ)**

* Vì dãy các tam giác $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2, A_3B_3C_3, \dots$ là các tam giác đều nên bán kính đường tròn ngoại tiếp các tam giác bằng cạnh $\times \frac{\sqrt{3}}{3}$. **(0,25đ)**

* Với $n = 1$ thì tam giác đều $A_1B_1C_1$ có cạnh bằng 3 nên đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_1B_1C_1$ có bán kính $R_1 = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow S_1 = \pi \left(3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \right)^2 = 3\pi$.

Với $n = 2$ thì tam giác đều $A_2B_2C_2$ có cạnh bằng $\frac{3}{2}$ nên đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_2B_2C_2$

$$\text{có bán kính } R_2 = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow S_2 = \pi \left(3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \right)^2.$$

Với $n = 3$ thì tam giác đều $A_3B_3C_3$ có cạnh bằng $\frac{3}{4}$ nên đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_3B_3C_3$

$$\text{có bán kính } R_3 = 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow S_3 = \pi \left(3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \right)^2.$$

Như vậy tam giác đều $A_nB_nC_n$ có cạnh bằng $3 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1}$ nên đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_nB_nC_n$

$$\text{có bán kính } R_n = 3 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow S_n = \pi \left(3 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \right)^2. \quad (0,25đ)$$

* Khi đó ta được dãy $S_1, S_2, \dots, S_{2021}$ là một cấp số nhân với $u_1 = S_1 = 3\pi, q = \frac{1}{4}$. (0,25đ)

$$\text{* Do đó tổng } S = S_1 + S_2 + \dots + S_{2021} = \frac{3\pi \left[1 - \left(\frac{1}{4} \right)^{2021} \right]}{1 - \frac{1}{4}} = 4\pi \left[1 - \left(\frac{1}{4} \right)^{2021} \right]. \quad (0,25đ)$$