

CHUYÊN ĐỀ 4 - HÀM SỐ MŨ VÀ LÔGARIT

1. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

Lũy thừa và căn thức:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \text{ (với } a \neq 0 \text{ và } n \in \mathbb{N}^*)$$

$$a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \text{ (với } a > 0 \text{ và } r = \frac{m}{n}, n \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^*)$$

$$a^\alpha = \lim a^{r_n} \text{ (với } a > 0, \alpha \in \mathbb{R}, r_n \in \mathbb{Q} \text{ và } \lim r_n = \alpha).$$

$$\text{Khi } n \text{ lẻ, } b = \sqrt[n]{a} \Leftrightarrow b^n = a \text{ (với mọi } a)$$

$$\text{Khi } n \text{ chẵn, } b = \sqrt[n]{a} \Leftrightarrow \begin{cases} b \geq 0 \\ b^n = a \end{cases} \text{ (với } a \geq 0).$$

- Biến đổi lũy thừa: Với các số $a > 0, b > 0, \alpha$ và β tùy ý, ta có:

$$a^\alpha \cdot a^\beta = a^{\alpha+\beta}; a^\alpha : a^\beta = a^{\alpha-\beta}; (a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta}$$

$$(a.b)^\alpha = a^\alpha \cdot b^\alpha; (a:b)^\alpha = a^\alpha : b^\alpha$$

- So sánh: Nếu $0 < a < b$ thì: $a^\alpha < b^\alpha \Leftrightarrow \alpha > 0; a^\alpha > b^\alpha \Leftrightarrow \alpha < 0$

Lôgarit:

- Lôgarit cơ số a : $\alpha = \log_a b \Leftrightarrow a^\alpha = b$ ($0 < a \neq 1$ và $b > 0$)

- Lôgarit cơ số 10: $\log_{10} b = \lg b$ hay $\log b$

- Lôgarit cơ số e : $\log_e b = \ln b$ ($e \approx 2,7183$)

- Tính chất: $\log_a 1 = 0$ và $\log_a a^b = b$ với $a > 0, a \neq 1$.

$$a^{\log_a b} = b \text{ với } a > 0, b > 0, a \neq 1.$$

- Biến đổi lôgarit trong điều kiện xác định:

$$\log_a (b.c) = \log_a b + \log_a c$$

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c, \log_a \left(\frac{1}{c} \right) = -\log_a c$$

$$\log_a b^\alpha = \alpha \log_a b \text{ (với mọi } \alpha), \log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n} \log_a b \text{ (} n \in \mathbb{N}^*)$$

- Đổi cơ số trong điều kiện xác định:

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b} \text{ hay } \log_a b \cdot \log_b x = \log_a x$$

$$\log_b a = \frac{1}{\log_a b} \text{ hay } \log_a b \cdot \log_b a = 1; \log_{a^\alpha} b = \frac{1}{\alpha} \log_a b$$

Hàm số lũy thừa $y = x^\alpha$:

Liên tục trên tập xác định của nó

Đạo hàm $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}, (u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} u'$;

$$(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}} (x > 0), (\sqrt[n]{u})' = \frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}, \text{ với } u = u(x) > 0.$$

Hàm số $y = x^\alpha$ đồng biến trên $(0; +\infty)$ khi $\alpha > 0$; nghịch biến trên $(0; +\infty)$ khi $\alpha < 0$.

Hàm số mũ:

Liên tục trên tập xác định $\mathbb{R}$, nhận mọi giá trị thuộc $(0; +\infty)$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & \text{khi } a > 1 \\ 0 & \text{khi } 0 < a < 1 \end{cases}; \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \begin{cases} 0 & \text{khi } a > 1 \\ +\infty & \text{khi } 0 < a < 1 \end{cases}$$

Đạo hàm: $(a^x)' = a^x \ln a; (e^x)' = e^x$;

$$(a^u)' = a^u u' \ln a; (e^u)' = e^u u' \text{ với } u = u(x).$$

Đồng biến trên $\mathbb{R}$ nếu $a > 1$, nghịch biến trên $\mathbb{R}$ nếu $0 < a < 1$.

Hàm số lôgarit $y = \log_a x$:

Liên tục trên tập xác định $(0; +\infty)$, nhận mọi giá trị thuộc $\mathbb{R}$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = \begin{cases} +\infty & \text{khi } a > 1 \\ -\infty & \text{khi } 0 < a < 1 \end{cases}; \lim_{x \rightarrow +0^+} \log_a x = \begin{cases} -\infty & \text{khi } a > 1 \\ +\infty & \text{khi } 0 < a < 1 \end{cases}$$

$$\text{Đạo hàm } (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}; (\ln a)' = \frac{1}{x}; (\ln |x|)' = \frac{1}{x}$$

$$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}; (\ln u)' = \frac{u'}{u}; (\ln |u|)' = \frac{u'}{u} \text{ với } u = u(x).$$

Hàm số $y = \log_a x$ đồng biến trên $(0; +\infty)$ nếu $a > 1$, nghịch biến trên $(0; +\infty)$ nếu $0 < a < 1$.

Giới hạn:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

2. CÁC BÀI TOÁN

Bài toán 4.1: Thực hiện phép tính

$$A = 81^{-0,75} + \left(\frac{1}{125}\right)^{-\frac{1}{3}} - \left(\frac{1}{32}\right)^{-\frac{3}{5}}; B = 0,001^{-\frac{1}{3}} - (-2)^{-2} \cdot 64^{\frac{2}{3}} - 8^{-\frac{1}{3}} + (9^0)^2$$

Hướng dẫn giải

$$A = ((3^4)^{-\frac{3}{4}} + \left(\left(\frac{1}{5}\right)^3\right)^{-\frac{1}{3}} - \left(\left(\frac{1}{2}\right)^5\right)^{-\frac{3}{5}})$$

$$= (3)^{-3} + \left(\frac{1}{5}\right)^{-1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = \frac{1}{27} + 5 - 8 = \frac{1}{27} - 3 = -\frac{80}{27}$$

$$B = (10^{-3})^{-\frac{1}{3}} - 2^{-2} \cdot (2^6)^{\frac{2}{3}} - (2^3)^{-\frac{4}{3}} + 1 = 10 - 2^2 - 2^{-4} + 1 = 7 - \frac{1}{16} = \frac{111}{16}.$$

Bài toán 4.2: Đơn giản biểu thức trong điều kiện xác định:

$$P = \frac{a-1}{a^{\frac{3}{4}} + a^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\sqrt{a} + \sqrt[4]{a}}{\sqrt{a} + 1} \cdot a^{\frac{1}{4}} + 1; Q = \frac{a^{\frac{1}{3}} - a^{\frac{7}{3}}}{a^{\frac{1}{3}} - a^{\frac{4}{3}}} - \frac{a^{-\frac{1}{3}} - a^{\frac{5}{3}}}{a^{\frac{2}{3}} + a^{-\frac{1}{3}}}$$

Hướng dẫn giải

$$P = \frac{(\sqrt{a} + 1)(\sqrt{a} - 1)}{\sqrt{a}(\sqrt[4]{a} + 1)} \cdot \frac{\sqrt[4]{a}(\sqrt[4]{a} + 1)}{(\sqrt{a} + 1)} \cdot \sqrt[4]{a} + 1 = \sqrt{a} - 1 + 1 = \sqrt{a}$$

$$Q = \frac{a^{\frac{1}{3}}(1 - a^2)}{a^{\frac{1}{3}}(1 - a)} - \frac{a^{-\frac{1}{3}}(1 - a^2)}{a^{-\frac{1}{3}}(a + 1)} = (1 + a) - (1 - a) = 2a$$

Bài toán 4.3: Trục căn ở mẫu

a) $\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}}$

b) $\frac{1}{\sqrt[6]{5 - \sqrt{13 + \sqrt{48}}}}$

Hướng dẫn giải

a) $\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}} = \frac{\sqrt[3]{3} - \sqrt{2}}{\sqrt[3]{9} - 2} = \frac{(\sqrt[3]{3} - \sqrt{2})(3\sqrt[3]{3} + 2\sqrt[3]{9} + 4)}{1}$

b) Vì $5 - \sqrt{13 + \sqrt{48}} = 5 - \sqrt{(2\sqrt{3} + 1)^2} = 4 - 2\sqrt{3} = (\sqrt{3} - 2)^2$

$$\text{nên } \frac{1}{\sqrt[6]{5 - \sqrt{13 + \sqrt{48}}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{\sqrt{3} - 1}} = \frac{\sqrt[3]{(\sqrt{3} - 1)^2}}{\sqrt{3} - 1} = \frac{(\sqrt{3} + 1) \cdot \sqrt[3]{4 - 2\sqrt{3}}}{2}$$

Bài toán 4.4: Không dùng máy, tính giá trị đúng:

a) $\sqrt{15 + 6\sqrt{6}} + \sqrt{15 - 6\sqrt{6}}$

b) $\sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}} - \sqrt[3]{7 - 5\sqrt{2}}$

Hướng dẫn giải

a) Ta có $(3\sqrt{2} \pm 2\sqrt{3})^2 = 18 + 12 \pm 12\sqrt{6} = 30 \pm 12\sqrt{6}$

$$\text{nên } \sqrt{15 + 6\sqrt{6}} + \sqrt{15 - 6\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \frac{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = 6$$

Cách khác: Đặt $\sqrt{15 + 6\sqrt{6}} + \sqrt{15 - 6\sqrt{6}} = x; x > 0$.

$$\text{Ta có } x^2 = 30 + 2\sqrt{225 - 216} = 36 \text{ nên chọn } x = 6.$$

b) Ta có: $7 + 5\sqrt{2} = 1 + 3\sqrt{2} + 6 + 2\sqrt{2} = (1 + \sqrt{2})^3$

$$\text{Tương tự } 7 - 5\sqrt{2} = (1 - \sqrt{2})^3$$

$$\text{Do đó } \sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}} - \sqrt[3]{7 - 5\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2} - (1 - \sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$$

Cách khác: Đặt $x = \sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}} - \sqrt[3]{7 - 5\sqrt{2}}$. Ta có:

$$\begin{aligned} x^3 &= 7 + 5\sqrt{2} - (7 - 5\sqrt{2}) - 3\left(\sqrt[3]{7 - 5\sqrt{2}} - \sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}}\right) \cdot \left(\sqrt[3]{(7 + 5\sqrt{2})(7 - 5\sqrt{2})}\right) \\ &= 10\sqrt{2} + 3\left(\sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}} - \sqrt[3]{7 - 5\sqrt{2}}\right) = 10\sqrt{2} + 3x. \end{aligned}$$

Ta có phương trình:

$$x^3 - 3x - 10\sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow (x - 2\sqrt{2})(x^2 + 2\sqrt{2}x + 5) = 0 \Leftrightarrow x = 2\sqrt{2}$$

Bài toán 4.5: Tính gọn

a) $\sqrt[4]{49 + 20\sqrt{6}} + \sqrt[4]{49 - 20\sqrt{6}}$

b) $\sqrt[4]{2 + \sqrt{5} + 2\sqrt{2 + \sqrt{5}}} + \sqrt[4]{2 + \sqrt{5} - 2\sqrt{2 + \sqrt{5}}}$

Hướng dẫn giải

a) Ta có $\sqrt[4]{49 + 20\sqrt{6}} = \sqrt[4]{25 + 10\sqrt{24} + 24} = \sqrt[4]{(5 + 2\sqrt{6})^2}$

$$=\sqrt[4]{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^4}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$$

Tương tự: $\sqrt[4]{49-20\sqrt{6}}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$ (do $\sqrt{3}>\sqrt{2}$)

Suy ra $\sqrt[4]{49+20\sqrt{6}}+\sqrt[4]{49-20\sqrt{6}}=2\sqrt{3}$

b) Đặt $M=\sqrt[4]{2+\sqrt{5}+2\sqrt{2+\sqrt{5}}}, N=\sqrt[4]{2+\sqrt{5}-2\sqrt{2+\sqrt{5}}}$

Ta có: $MN=\sqrt[4]{(2+\sqrt{5})^2-4(2+\sqrt{5})}=1$

$$M^4+N^4=4+2\sqrt{5}\Rightarrow M^4+N^2+2M^2N^2=6+2\sqrt{5}=(\sqrt{5}+1)^2$$

$$\Rightarrow M^2+N^2=\sqrt{5}+2\Rightarrow M^2+N^2+2MN=\sqrt{5}+3=\left(\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{2}}\right)^2$$

Vậy $\sqrt[4]{2+\sqrt{5}+2\sqrt{2+\sqrt{5}}}+\sqrt[4]{2+\sqrt{5}-2\sqrt{2+\sqrt{5}}}=M+N=\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{2}}.$

Bài toán 4.6:

a) Cho $x=\frac{1}{3}\left(\sqrt[3]{\frac{23+\sqrt{513}}{4}}+\sqrt[3]{\frac{23-\sqrt{513}}{4}}-1\right)$. Tính $A=x^3+x^2+1$

b) Tính $B=\frac{4+\sqrt{3}}{\sqrt{1}+\sqrt{3}}+\frac{6+\sqrt{8}}{\sqrt{2}+\sqrt{4}}+\dots+\frac{2k+\sqrt{k^2-1}}{\sqrt{k-1}+\sqrt{k+1}}+\dots+\frac{200+\sqrt{9999}}{\sqrt{99}+\sqrt{101}}$

Hướng dẫn giải

a) Đặt $a=\sqrt[3]{\frac{23+\sqrt{513}}{4}}, b=\sqrt[3]{\frac{23-\sqrt{513}}{4}}$

$$\Rightarrow a^3+b^3=\frac{23}{2}, ab=1 \text{ và } 3x+1=a+b$$

Vì $(3x+1)^3=27x^3+27x^2+9x+1$

$$=27(x^3+x^2+1)+3(3x+1)-29 \text{ nên}$$

$$A=\frac{(3x+1)^3-3(3x+1)+29}{27}=\frac{(a+b)^3-3(a+b)+29}{27}$$

$$=\frac{a^3+b^3+3ab(a+b)-3(a+b)+29}{27}=\frac{\frac{23}{2}+29}{27}=\frac{3}{2}$$

b) Với mọi $k \geq 2$ thì

$$\begin{aligned}\frac{2k + \sqrt{k^2 - 1}}{\sqrt{k-1} + \sqrt{k+1}} &= \frac{\left[(\sqrt{k-1})^2 + (\sqrt{k+1})^2 + \sqrt{(k-1)(k+1)} \right] (\sqrt{k+1} - \sqrt{k-1})}{(\sqrt{k-1} + \sqrt{k+1})(\sqrt{k+1} - \sqrt{k-1})} \\ &= \frac{\sqrt{(k+1)^3} - \sqrt{(k-1)^3}}{2}. \text{ Do đó}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B &= \frac{1}{2} \left[\sqrt{3^3} - \sqrt{1^3} + \sqrt{4^3} - \sqrt{2^3} + \sqrt{5^3} - \sqrt{3^3} + \sqrt{6^3} - \sqrt{4^3} + \dots + \sqrt{101^3} - \sqrt{99^3} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[-1 - \sqrt{2^3} + \sqrt{101^3} + \sqrt{100^3} \right] = \frac{999 + \sqrt{101^3} - \sqrt{8}}{2} \\ &= \frac{999 + 101\sqrt{101} - 2\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

Bài toán 4.7: Cho $sh(x) = \frac{a^x - a^{-x}}{2}$; $ch(x) = \frac{a^x + a^{-x}}{2}$; $th(x) = \frac{a^x - a^{-x}}{a^x + a^{-x}}$ với $a > 0, a \neq 1$. Chứng minh

$$ch^2(x) - sh^2(x) = 1, \quad th(2x) = \frac{2th(x)}{1 + th^2(x)}.$$

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned}\text{Ta có } ch^2(x) - sh^2(x) &= \left(\frac{a^x + a^{-x}}{2} \right)^2 - \left(\frac{a^x - a^{-x}}{2} \right)^2 \\ &= \frac{a^{2x} + a^{-2x} + 2 - a^{2x} - a^{-2x} + 2}{4} = \frac{4}{4} = 1\end{aligned}$$

$$\text{Ta có: } 1 + th^2(x) = 1 + \left(\frac{a^x - a^{-x}}{a^x + a^{-x}} \right)^2 = \frac{2(a^{2x} + a^{-2x})}{a^{2x} + a^{-2x} + 2}$$

$$\begin{aligned}\text{nên } \frac{2th(x)}{1 + th^2(x)} &= 2 \frac{a^x - a^{-x}}{a^x + a^{-x}} \cdot \frac{a^{2x} + a^{-2x} + 2}{2(a^{2x} + a^{-2x})} \\ &= \frac{2(a^x - a^{-x})(a^x - a^{-x})^2}{2(a^x + a^{-x})(a^{2x} - a^{-2x})} = \frac{a^{2x} - a^{-2x}}{a^{2x} + a^{-2x}} = th(2x).\end{aligned}$$

Bài toán 4.8: Cho số tự nhiên n lẻ, chứng minh:

$$\text{a) Nếu } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c} \text{ thì } \frac{1}{a^n} + \frac{1}{b^n} + \frac{1}{c^n} = \frac{1}{a^n + b^n + c^n}$$

b) Nếu $ax^n = by^n = cz^n$, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$ thì: $\sqrt[n]{ax^{n-1} + by^{n-1} + cz^{n-1}} = \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} + \sqrt[n]{c}$

Hướng dẫn giải

a) Từ giả thiết suy ra $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{a+b+c} - \frac{1}{c}$

$$\Rightarrow (a+b).(a+b+c)c = abc - ab(a+b+c) \Rightarrow (a+b)(b+c)(c+a) = 0$$

$\Rightarrow$ có 2 số đối nhau mà ta có n lẻ $\Rightarrow$ đpcm.

b) VT = $\sqrt[n]{\frac{ax^n}{x} + \frac{by^n}{y} + \frac{cz^n}{z}} = \sqrt[n]{ax^n \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right)} = \sqrt[n]{ax^n} = x\sqrt[n]{a} = y\sqrt[n]{b} = z\sqrt[n]{c}$

$$\Rightarrow \text{VT} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) = \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} + \sqrt[n]{c} \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Bài toán 4.9: Tính:

a) $3^{\log_3 18} = 18; 3^{5 \log_3 2} = 3^{\log_3 2^5} = 2^5 = 32$

$$\left(\frac{1}{8} \right)^{\log_2 5} = (2^{-3})^{\log_2 5} = 2^{(-3) \log_2 5} = 2^{\log_2 5^{-3}} = 5^{-3} = \frac{1}{125}$$

$$\left(\frac{1}{32} \right)^{\log_{0,5} 2} = \left(\left(\frac{1}{2} \right)^5 \right)^{\log_{\frac{1}{2}} 2^5} = 2^5 = 32.$$

b) $\frac{1}{2} \log_7 36 - \log_7 14 - 3 \log_7 \sqrt[3]{21} = \log_7 7 \left(\frac{6}{14 \cdot 21} \right) = \log_7 7^{-2} = -2.$

Bài toán 4.10: Rút gọn các biểu thức:

a) $A = \log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_6 5 \cdot \log_7 6 \cdot \log_8 7$

b) $B = a^{\sqrt{\log_a b}} - b^{\sqrt{\log_b a}}$

Hướng dẫn giải

a) $A = \log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \cdot \log_6 5 \cdot \log_7 6 \cdot \log_8 7$

$$= \frac{\log 2}{\log 3} \cdot \frac{\log 3}{\log 4} \cdot \frac{\log 4}{\log 5} \cdot \frac{\log 5}{\log 6} \cdot \frac{\log 6}{\log 7} \cdot \frac{\log 7}{\log 8} = \frac{\log 2}{\log 8} = \log_8 2 = \frac{1}{3} \log_2 2 = \frac{1}{3}$$

b) Đặt $x = \sqrt{\log_a b} \Rightarrow \log_a b = x^2 \Rightarrow b = a^{x^2}$

Mặt khác $\log_b a = \frac{1}{x^2} \Rightarrow \sqrt{\log_b a} = \frac{1}{x}$

Do đó: $B = a^x - a^{x^2 \cdot \frac{1}{x}} = 0$.

Bài toán 4.11:

a) Cho $\log_6 15 = x, \log_{12} 18 = y$, tính $\log_{25} 24$ theo x, y

b) Cho $a = \log_2 3, b = \log_3 5, c = \log_7 2$, tính $\log_{140} 63$ theo a, b, c .

Hướng dẫn giải

a) Ta có $x = \frac{\log_2 3 \cdot 5}{\log_2 2 \cdot 3} = \frac{\log_2 3 + \log_2 5}{1 + \log_2 3}$ và $y = \frac{\log_2 2 \cdot 3^2}{\log_2 2^2 \cdot 3} = \frac{1 + 2\log_2 3}{2 + \log_2 3}$

$$\text{Suy ra } \log_2 3 = \frac{2y - 1}{2 - y}; \log_2 5 = \frac{x + 1 - 2y + xy}{2 - y}$$

$$\text{Do đó } \log_{25} 24 = \frac{\log_2 2^3 \cdot 3}{\log_2 5^2} = \frac{5 - y}{2(x + 1 - 2y + xy)}.$$

b) $\log_{140} 63 = \log_{140} (3^2 \cdot 7) = 2\log_{140} 3 + \log_{140} 7$

$$= \frac{2}{\log_3 140} + \frac{1}{\log_7 140} = \frac{2}{\log_3 (2^2 \cdot 5 \cdot 7)} + \frac{1}{\log_7 (2^2 \cdot 5 \cdot 7)}$$

$$= \frac{2}{2\log_3 2 + \log_3 5 + \log_3 7} + \frac{1}{2\log_7 2 + \log_7 5 + 1}$$

Ta có $\log_3 2 = \frac{1}{\log_2 3} = \frac{1}{a}, \log_7 5 = \log_7 2 \cdot \log_2 3 \cdot \log_3 5 = cab$;

$$\log_3 7 = \frac{1}{\log_7 3} = \frac{1}{\log_7 2 \cdot \log_2 3} = \frac{1}{ca}$$

Vậy $\log_{140} 63 = \frac{2}{\frac{2}{a} + b + \frac{1}{ca}} + \frac{1}{2c + cab + 1} = \frac{2ac + 1}{abc + 2c + 1}$

Bài toán 4.12: Cho các số thực a, b, c thỏa mãn:

$$a^{\log_3 7} = 27, b^{\log_7 11} = 49, c^{\log_{11} 25} = \sqrt{11}$$

Tính $T = a^{(\log_3 7)^2} + b^{(\log_7 11)^2} + c^{(\log_{11} 25)^2}$

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$T = (a^{\log_3 7})^{\log_3 7} + (b^{\log_7 11})^{\log_7 11} + (c^{\log_{11} 25})^{\log_{11} 25}$$

$$= 27^{\log^3 7} + 49^{\log_7 11} + (\sqrt{11})^{\log_{11} 25} = 7^3 + 11^2 + 25^{\frac{1}{2}} = 469.$$

Bài toán 4.13: Trong điều kiện có nghĩa, chứng minh:

a) $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$

b) $\frac{1}{\log_a b} + \frac{1}{\log_{a^2} b} + \frac{1}{\log_{a^3} b} + \dots + \frac{1}{\log_{a^n} b} = \frac{n(n+1)}{2 \log_a b}$

Hướng dẫn giải

a) $a^{\log_c b} = b^{\log_b a^{\log_c b}} = b^{\log_c b \cdot \log_b a} = b^{\log_c a}$

b) VT = $\frac{1}{\log_a b} + \frac{2}{\log_a b} + \frac{3}{\log_a b} + \dots + \frac{n}{\log_a b}$
 $= (1 + 2 + 3 + \dots + n) \cdot \frac{1}{\log_a b} = \frac{n(n+1)}{2 \log_a b}$

Bài toán 4.14: Trong điều kiện có nghĩa, chứng minh:

a) Nếu $a^2 + c^2 = b^2$ thì $\log_{b+c} a + \log_{b-c} a = 2 \log_{b+c} a \cdot \log_{b-c} a$.

b) Nếu a, b, c lập cấp số nhân thì $\frac{\log_a d - \log_b d}{\log_b d - \log_c d} = \frac{\log_a d}{\log_c d}$

Hướng dẫn giải

a) Theo giả thiết: $a^2 = (b - c)(b + c)$. Xét $a = 1$: đúng.

Xét $a \neq 1$ thì $\log_a (b - c) + \log_a (b + c) = 2 \Rightarrow \frac{1}{\log_{b-c} a} + \frac{1}{\log_{b+c} a} = 2$

nên $\log_{b+c} a + \log_{b-c} a = 2 \log_{b+c} a \cdot \log_{b-c} a$

b) Ta có $\log_a d - \log_b d = \frac{1}{\log_d a} - \frac{1}{\log_d b} = \frac{\log_d \left(\frac{c}{b} \right)}{(\log_d a)(\log_d b)}$

Tương tự: $\log_b d - \log_c d = \frac{1}{\log_d b} - \frac{1}{\log_d c} = \frac{\log_d \left(\frac{c}{a} \right)}{(\log_d b)(\log_d c)}$

Vì a, b, c lập thành cấp số nhân nên $\frac{c}{a} = \frac{b}{a} \Rightarrow \log_d \left(\frac{c}{b} \right) = \log_d \left(\frac{b}{a} \right)$

Do đó $\frac{\log_a d - \log_b d}{\log_b d - \log_c d} = \frac{\log_d c}{\log_d a} = \frac{\log_a d}{\log_c d}$

Bài toán 4.15: Cho x, y, z, a là các số thực dương đôi một khác nhau và khác 1. Chứng minh:

a) Nếu $\log_a x = 1 + \log_a x \cdot \log_a z$, $\log_a y = 1 + \log_a y \cdot \log_a x$ thì:

$$A = \log_{\frac{a}{x}} x \cdot \log_{\frac{a}{y}} y \cdot \log_{\frac{a}{z}} z \cdot \log_x a \cdot \log_y a \cdot \log_z a = 1.$$

b) Nếu $\frac{x(y+z-x)}{\log x} = \frac{y(z+x-y)}{\log y} = \frac{z(x+y-z)}{\log z}$ thì $x^y \cdot y^x = y^z \cdot z^y = z^x \cdot x^z$

Hướng dẫn giải

a) Từ giả thiết, ta có: $\log_a x = 1 + \log_a x \cdot \log_a z$

$$\Rightarrow \log_a x = \frac{1}{1 - \log_a z} = \frac{1}{\log_a \frac{a}{z}} = \log_{\frac{a}{z}} z$$

Do đó: $\log_x a \log_{\frac{a}{z}} z = 1$. Tương tự $\log_y a \log_{\frac{a}{x}} x = 1$

Mà $\log_a y = 1 + \log_a y \cdot \log_a z$, nên $\log_a y = 1 + \frac{\log_a y}{1 - \log_a z} \Rightarrow 1 - \log_a z = \frac{\log_a y}{\log_a y - 1}$

$$\Rightarrow \log_a z = 1 + \log_a y \cdot \log_a z$$

Tương tự trên, ta cũng có $\log_z a \log_{\frac{a}{y}} y = 1$. Do đó

$$A = \left(\log_{\frac{a}{x}} x \cdot \log_y a \right) \cdot \left(\log_{\frac{a}{y}} y \cdot \log_z a \right) \cdot \left(\log_{\frac{a}{z}} z \cdot \log_x a \right) = 1$$

b) Nếu một trong các số $x+y-z, y+z-x, z+x-y$ bằng 0 thì cả ba số đều bằng 0 và dẫn đến $x=y=z=0$, mâu thuẫn.

Do đó $x+y-z, y+z-x, z+x-y$ khác 0.

$$\text{Từ giả thiết thì: } \begin{cases} x(\log y) \cdot (y+z-x) = y(\log x) \cdot (z+x-y) \\ y(\log z) \cdot (z+x-y) = z(\log y) \cdot (x+y-z) \\ z(\log x) \cdot (x+y-z) = x(\log z) \cdot (y+z-x) \end{cases}$$

Ta có: $x(\log y) \cdot (y+z-x) = y(\log x) \cdot (z+x-y)$

$$\Rightarrow x \log y = y(\log x) \cdot \frac{z+x-y}{y+z-x}$$

$$\Rightarrow x \log y + y \log x = y(\log x) \cdot \left(\frac{z+x-y}{y+z-x} + 1 \right)$$

$$\Rightarrow x \log y + y \log x = y(\log x) \cdot \frac{2z}{z+x-y}$$

$$\text{Tương tự } y \log z + z \log y = z(\log y) \cdot \frac{2x}{z+x-y}$$

$$\text{Do đó: } x^y \cdot y^x = y^z \cdot z^y \Leftrightarrow x \log y + y \log x = y \log z + z \log y$$

$$\Leftrightarrow y \log x \cdot \frac{2z}{y+z-x} = z \log y \cdot \frac{2x}{z+x-y}$$

$$\Leftrightarrow y(\log x) \cdot (z+x-y) = x(\log y) \cdot (y+z-x): \text{ đúng}$$

$$\text{Chứng minh tương tự: } y^z \cdot z^y = z^x \cdot x^z.$$

Bài toán 4.16: Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $1 < a < b < c$. Chứng minh rằng: $\log_a(\log_a b) + \log_b(\log_b c) + \log_c(\log_c a) > 0$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Vì } 1 < a < b \text{ nên } \log_a b > 1 \Rightarrow \log_a(\log_a b) > \log_b(\log_a b) > 0$$

$$\text{Ta có } 1 < a < c \text{ nên } \log_c a < 1$$

$$\text{Suy ra } 0 > \log_c(\log_c a) > \log_b(\log_c a)$$

$$\begin{aligned} \text{Do đó } & \log_a(\log_a b) + \log_b(\log_b c) + \log_c(\log_c a) \\ & > \log_b(\log_a b) + \log_b(\log_b c) + \log_b(\log_c a) \\ & = \log_b(\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a) = \log_b(1) = 0 \end{aligned}$$

Bài toán 4.17: Trong khai triển nhị thức $P(x) = \left(x^{-\frac{2}{3}} + x\sqrt{x} \right)^{13}, x > 0$.

a) Tìm hệ số của x^{13}

b) Tìm số hạng không chứa x

Hướng dẫn giải

$$\text{Số hạng tổng quát của } P(x) = \left(x^{-\frac{2}{3}} + x\sqrt{x} \right)^{13} \text{ là:}$$

$$T_{k+1} = C_{13}^k \left(x^{-\frac{2}{3}} \right)^{13-k} (x\sqrt{x})^k = C_{13}^k \cdot x^{\frac{13k-52}{6}}$$

a) Hệ số của x^{13} ứng với $\frac{13k-52}{6} = 13 \Leftrightarrow k = 10$ là:

$$T_{11} = C_{13}^{10} = 286.$$

b) Số hạng không chứa x ứng với $13k - 52 = 0 \Leftrightarrow k = 4$ là $T_5 = C_{13}^4 = 715$.

Bài toán 4.18: Trong khai triển nhị thức $\left(\sqrt{x^{\frac{1}{\lg x + 1}}} + \sqrt[12]{x} \right)^6$, biết số hạng thứ tư bằng 200. Tìm x ?

Hướng dẫn giải

ĐK: $x > 0, x \neq \frac{1}{10}$. Ta có:

$$\left(\sqrt{x^{\frac{1}{\lg x + 1}}} + \sqrt[12]{x} \right)^6 = \left(x^{\frac{1}{2(\lg x + 1)}} + x^{\frac{1}{12}} \right)^6 = \sum_{k=0}^6 C_6^k x^{\frac{6-k}{2(\lg x + 1)}} \cdot x^{\frac{k}{12}}$$

Số hạng thứ 4 ứng với $k = 3$, theo giả thiết bằng 200 nên:

$$C_6^3 x^{\frac{3}{2(\lg x + 1)} + \frac{1}{4}} = 200 \Leftrightarrow x^{\frac{7 + \lg x}{4 \lg x + 4}} = 10 \Leftrightarrow \frac{7 + \lg x}{4 \lg x + 4} \lg x = 1$$

$$\Leftrightarrow \lg^2 x + 3 \lg x - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lg x = 1 \\ \lg x = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \\ x = 10^{-4} \end{cases} \text{ (Chọn).}$$

Bài toán 4.19: Chứng minh các giới hạn:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{a}{x} \right)^x = e^a; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+ax} - 1}{x} = \frac{a}{n}$$

Hướng dẫn giải

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\ln a^x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \ln a} - 1}{x \ln a} \cdot \ln a = \ln a$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \log_a e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} = \frac{1}{\ln a}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{a}{x} \right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{x}{a}} \right)^{\frac{x}{a}} \right]^a = e^a$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+ax} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+ax+1}{x \left(\sqrt[n]{(1+ax)^{n-1}} + \sqrt[n]{(1+ax)^{n-2}} + \dots + 1 \right)} = \frac{a}{n}$$

Bài toán 4.20: Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^{5x}}{x}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x + 5^x - 2}{3^x + 5^x - 2}$

Hướng dẫn giải

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^{5x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{2x} - 1}{x} - \frac{e^{5x} - 1}{x} \right) = 2 - 5 = -3$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x + 5^x - 2}{3^x + 5^x - 2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2^x - 1}{x} + \frac{5^x - 1}{x}}{\frac{3^x - 1}{x} + \frac{5^x - 1}{x}} = \frac{\ln 2 + \ln 5}{\ln 3 + \ln 5} = \frac{\ln 10}{\ln 15}$

Bài toán 4.21: Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 3x^2)}{1 - \cos 2x}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6^x - 3^x}{\ln(1 + 6x) - \ln(1 + 3x)}$

Hướng dẫn giải

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 3x^2)}{1 - \cos 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 3x^2)}{2 \sin^2 x}$
 $= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{3 \ln(1 + 3x^2)}{3x^2} : \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \right] = \frac{3}{2}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6^x - 3^x}{\ln(1 + 6x) - \ln(1 + 3x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{6^x - 1}{x} - \frac{3^x - 1}{x} \right) : \left(\frac{\ln(1 + 6x)}{x} - \frac{\ln(1 + 3x)}{x} \right)$
 $= (\ln 6 - \ln 3) : (6 - 3) = \frac{1}{3} \ln 2.$

Bài toán 4.22: Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x-3} \right)^x$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+3}{x+1} \right)^x$

Hướng dẫn giải

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x-3} \right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{x-3} \right)^{x-3} \right]^{\frac{x}{x-3}} = e^1 = e$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+3}{x+1} \right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{x+1} \right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{x+1}{2}} \right)^{\frac{x+1}{2}} \right]^{\frac{2x}{x+1}} = e^2$$

Bài toán 4.23: Tìm các giới hạn sau:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-2x^2} - \sqrt[3]{1+x^2}}{\ln(1+x^2)} \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}} \text{ với } 0 < a, b \neq 1.$$

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-2x^2} - \sqrt[3]{1+x^2}}{\ln(1+x^2)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{-2x^2} - 1}{x^2} - \frac{\sqrt[3]{1+x^2} - 1}{x^2} \right) : \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(-2 \frac{e^{-2x^2} - 1}{-2x^2} - \frac{1}{\sqrt[3]{(1+x^2)^2} + \sqrt[3]{1+x^2} + 1} \right) : \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} = -\frac{7}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(1 + \frac{a^x + b^x}{2} - 1 \right)^{\frac{1}{\frac{a^x + b^x}{2} - 1}} \right]^{\frac{\frac{a^x + b^x}{2} - 1}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\frac{a^x + b^x}{2} - 1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{a^x - 1}{2x} + \frac{b^x - 1}{2x}} = e^{\frac{\ln a + \ln b}{2}} = e^{\ln \sqrt{ab}} = \sqrt{ab} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}} = \sqrt{ab}$$

Bài toán 4.24: Tính các giới hạn sau:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right) \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\cot x}$$

Hướng dẫn giải

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - x + 1}{(x-1)\ln x}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\ln x - x + 1)'}{((x-1)\ln x)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x} - 1}{\ln x + \frac{x-1}{x}} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{\ln x + x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-x)'}{(x \ln x + x - 1)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{\ln x + 2} = -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

b) Ta có: $\lim_{x \rightarrow 0} (\cot x \ln(1+x)) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{\tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln(1+x))'}{(\tan x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{\tan^2 x + 1} = 1$

nên $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\cot x} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\cot x \ln(1+x)} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} (\cot x \ln(1+x))} = e$

Bài toán 4.25: Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{2x^2}}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 3x)^{\frac{5}{x}}$

Hướng dẫn giải

a) Ta có $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln(\cos x))'}{(2x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\tan x}{4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(-\tan x)'}{(4x)'} =$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-(\tan^2 x + 1)}{4} = -\frac{1}{4}$$

Nên $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{2x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\ln(\cos x)}{2x^2}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{2x^2}} = e^{-\frac{1}{4}}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \ln(\cos 3x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(5 \ln(\cos 3x))'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{15 \sin 3x}{\cos 3x}}{1} = 0$

Nên $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 3x)^{\frac{5}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{5 \ln(\cos 3x)}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \ln(\cos 3x)}{x}} = e^0 = 1$

Bài toán 4.26: Tính giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x - \sqrt{x^2 - 1}} \right)^{\frac{1}{\ln x}}$

b) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\ln(\pi^{x-\pi})}{x - \pi}$

Hướng dẫn giải

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x - \sqrt{x^2 - 1}} \right)^{\frac{1}{\ln x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right)^{\frac{1}{\ln x}}$

Ta có:
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}}{\frac{1}{x}} = 1$$

Vậy:
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x - \sqrt{x^2 - 1}} \right)^{\frac{1}{\ln x}} = e^1 = e$$

b)
$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1}{x - \pi} \ln(\pi^{x-\pi}) = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1}{x - \pi} \ln \frac{\pi^x}{\pi^\pi} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\ln \pi^x - \ln \pi^\pi}{x - \pi}$$

Đặt $g(x) = \ln \pi^x$ thì $g(\pi) = \ln \pi^\pi$ và $g'(x) = \ln \pi$

Theo định nghĩa đạo hàm ta có:

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\ln \pi^{x-\pi}}{x - \pi} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{g(x) - g(\pi)}{x - \pi} = g'(\pi) = \ln \pi$$

Bài toán 4.27: Tìm đạo hàm của hàm số sau:

a) $y = x^2 \sqrt{e^{4x} + 1}$ b) $y = \frac{2^x - 2^{-x}}{2^x + 2^{-x}}$ c) $y = x^5 - 5^x + x^{-x}$

Hướng dẫn giải

a)
$$y' = 2x \sqrt{e^{4x} + 1} + \frac{2x^2 e^{4x}}{\sqrt{e^{4x} + 1}} = \frac{2x[(x+1)e^{4x} + 1]}{\sqrt{e^{4x} + 1}}$$

b)
$$y' = \frac{(2^x \ln 2 + 2^{-x} \ln 2)(2^x + 2^{-x}) - (2^x - 2^{-x})(2^x \ln 2 - 2^{-x} \ln 2)}{(2^x + 2^{-x})^2}$$

$$= \frac{(2^x + 2^{-x})^2 - (2^x - 2^{-x})^2}{(2^x + 2^{-x})^2} \ln^2 2 = \frac{4 \ln^2 2}{(2^x + 2^{-x})^2}$$

c) Ta có $y = x^5 - 5^x + x^{-x} = x^5 - 5^x + e^{x \ln x}$ nên

$$y' = 5x^4 - 5^x \ln 5 + e^{x \ln x} (\ln x + 1) = 5x^4 - 5^x \ln 5 + x^x (\ln x + 1)$$

Bài toán 4.28: Tìm đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})$

b) $y = \log_{\sqrt{3}}(-x^2 + 5x + 6)$

c) $y = \cos x \cdot e^{2 \tan x}$

Hướng dẫn giải

$$a) \quad y' = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}}{x + \sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

$$b) \quad y' = \frac{-2x+5}{(-x^2+5x+6)\ln\sqrt{3}} = \frac{-4x+10}{(-x^2+5x+6)\ln 3}$$

$$c) \quad y' = -\sin x \cdot e^{2\tan x} + \frac{2}{\cos x} \cdot e^{2\tan x} = e^{2\tan x} \left(\frac{2}{\cos x} - \sin x \right)$$

Bài toán 4.29: Chứng minh:

$$a) \quad \text{Nếu } y = e^{4x} + 2e^{-x} \text{ thì: } y''' - 13y' - 12y = 0$$

$$b) \quad \text{Nếu } y = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1} + \ln\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}} \text{ thì: } 2y = xy' + \ln y'$$

Hướng dẫn giải

$$a) \quad y' = 4e^{4x} - 2e^{-x}, y'' = 16e^{4x} + 2e^{-x}, y''' = 64e^{4x} - 2e^{-x} \text{ nên:}$$

$$y''' - 13y' - 12y = (64e^{4x} - 2e^{-x}) - 13(4e^{4x} - 2e^{-x}) - 12(e^{4x} + 2e^{-x}) = 0$$

$$b) \quad y' = x + \frac{1}{2}\sqrt{x^2+1} + \frac{x^2}{2\sqrt{x^2+1}} + \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{2(x + \sqrt{x^2+1})}$$

$$= x + \frac{2x^2+1}{2\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} = x + \sqrt{x^2+1}$$

$$\text{Do đó, ta có: } 2y = x^2 + x\sqrt{x^2+1} + \ln(x + \sqrt{x^2+1})$$

$$xy' = x^2 + x\sqrt{x^2+1} \text{ và } \ln y' = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$$

$$\Rightarrow 2y = xy' + \ln y': \text{ đpcm.}$$

Bài toán 4.30: Tìm đạo hàm cấp n của hàm số

$$a) \quad y = 5^{kx}$$

$$b) \quad y = \ln(6x^2 - x - 1)$$

Hướng dẫn giải

$$a) \quad y' = (k \ln 5) \cdot 5^{kx}; y'' = (k \ln 5)^2 \cdot 5^{kx}$$

$$\text{Ta chứng minh quy nạp: } y^{(n)} = (k \ln 5)^n \cdot 5^{kx}$$

b) Với $x < -\frac{1}{3}$ hoặc $x > \frac{1}{2}$:

$$y = \ln((2x-1)(3x+1)) = \ln|2x-1| + \ln|3x+1|$$

$$\Rightarrow y' = \frac{1}{2x-1} + \frac{1}{3x+1}$$

Ta chứng minh quy nạp $\left(\frac{1}{ax+b}\right)^{(m)} = \frac{(-1)^m m! a^m}{(ax+b)^{m+1}}$

Suy ra $y^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1} (n-1)! 2^{n-1}}{(2x-1)^n} + \frac{(-1)^{n-1} (n-1)! 3^{n-1}}{(3x+1)^n}$

Bài toán 4.31: Tìm khoảng đơn điệu và cực trị hàm số:

a) $y = \frac{e^x}{x}$

b) $y = x^2 \cdot e^{-x}$

Hướng dẫn giải

a) $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $y' = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

BBT

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
y'	-		- 0 +	
y	$+\infty$	$+\infty$	e	$+\infty$

Vậy hàm số nghịch biến trong các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(0; 1)$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$, đạt CT $(1; e)$

b) $D = \mathbb{R}$, $y' = (2x - x^2)e^x$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 2$.

BBT

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
y'	-	0	+ 0 -	
y	$+\infty$	0	$4e^{-2}$	$-\infty$

Vậy hàm số đồng biến trong khoảng $(0; 2)$, nghịch biến trong các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$, đạt CĐ $(2; 4e^{-2})$, CT $(0; 0)$.

Bài toán 4.32: Tìm khoảng đơn điệu và cực trị hàm số:

a) $y = \ln(x^2 - 1)$

b) $y = x - \ln(1 + x)$

Hướng dẫn giải

a) $D = (-\infty; -1) \cup (1; +\infty), y' = \frac{2x}{x^2 - 1}$

Khi $x < -1$ thì $y' < 0$ nên hàm số nghịch biến trên $(-\infty; -1)$

Khi $x > 1$ thì $y' > 0$ nên hàm số đồng biến trên $(1; +\infty)$

Hàm số không có cực trị.

b) $D = (-1; +\infty), y' = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}, y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$y' > 0, \forall x \in (0; +\infty)$ nên hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$

$y' < 0, \forall x \in (-1; 0)$ nên hàm số nghịch biến trên $(-1; 0)$

Ta có $y'' = \frac{1}{(1+x)^2} > 0$ nên đạt cực tiểu tại $x = 0, y_{CT} = 0$.

Bài toán 4.33: Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh hàm số

$$f(x) = \frac{a^x}{b^x + c^x} + \frac{b^x}{c^x + a^x} + \frac{c^x}{a^x + b^x} \text{ đồng biến với mọi } x \text{ dương.}$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \left(\frac{a^x}{b^x + c^x} \right)' &= \frac{a^x \cdot \ln a (b^x + c^x) - a^x (b^x \cdot \ln b + c^x \cdot \ln c)}{(b^x + c^x)^2} \\ &= \frac{a^x b^x (\ln a - \ln b) + a^x c^x (\ln a - \ln c)}{(b^x + c^x)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Do đó } f'(x) &= \sum_{sym} \left(\frac{a^x}{b^x + c^x} \right)' = \sum_{sym} \left(\frac{a^x b^x (\ln a - \ln b) + a^x c^x (\ln a - \ln c)}{(b^x + c^x)^2} \right) \\ &= \sum_{sym} \left(\frac{a^x b^x (\ln a - \ln b)}{(b^x + c^x)^2} - \frac{a^x b^x (\ln a - \ln b)}{(a^x + c^x)^2} \right) \end{aligned}$$

$$= \sum_{sym} a^x b^x (\ln a - \ln b) \frac{(a^x - b^x)(a^x + b^x + 2c^x)}{(a^x + c^x)^2 (b^x + c^x)^2} > 0$$

Bài toán 4.34: So sánh các số:

a) $\sqrt[4]{13}$ và $\sqrt[5]{23}$

b) $\sqrt[3]{7} + \sqrt{15}$ và $\sqrt{10} + \sqrt[3]{28}$

Hướng dẫn giải

a) $\sqrt[4]{13} = \sqrt[20]{13^5} = \sqrt[20]{371293}$; $\sqrt[3]{23} = \sqrt[20]{23^4} = \sqrt[20]{279841}$

Ta có $371293 > 279841$ nên $\sqrt[4]{13} > \sqrt[5]{23}$

b) $\sqrt[3]{7} + \sqrt{15} < 2 + 4 = 3 + 3 < \sqrt{10} + \sqrt[3]{28}$

Bài toán 4.35: So sánh các số:

a) 3^{600} và 5^{400}

b) $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{4\sqrt{5}}$ và $3^{-3\sqrt{2}}$

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $3^{600} = (3^3)^{200} = 27^{200}$ và

$$5^{400} = (5^2)^{200} = 25^{200}. \text{ Vậy } 3^{600} > 5^{400}$$

b) Ta có $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{4\sqrt{5}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{2\sqrt{5}}$ và $3^{-3\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{3\sqrt{2}}$

$$\text{Ta có } 3\sqrt{2} < 2\sqrt{5} \Leftrightarrow (3\sqrt{2})^2 < (2\sqrt{5})^2 \Leftrightarrow 18 < 20 : \text{ đúng}$$

$$\text{Vì cơ số } 0 < \frac{1}{3} < 1 \text{ nên } \left(\frac{1}{3}\right)^{2\sqrt{5}} < \left(\frac{1}{3}\right)^{3\sqrt{2}} \Rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{4\sqrt{5}} < 3^{-3\sqrt{2}}.$$

Bài toán 4.36: Hãy so sánh các số:

a) $\log_3 4$ và $\log_4 \frac{1}{3}$

b) $3^{\log_6 11}$ và $7^{\log_6 0,99}$

Hướng dẫn giải

a) Ta có $\log_3 4 > 1$ và $\log_4 \frac{1}{3} < 0$, suy ra $\log_3 4 > \log_4 \frac{1}{3}$

b) Ta có $\log_6 1,1 > 0$ nên $3^{\log_6 1,1} > 3^0 = 1$ (vì $3 > 1$) và $\log_6 0,99 < 0$ nên $7^{\log_6 0,99} < 7^0 = 1$ (vì $7 > 1$).

$$\text{Suy ra } 3^{\log_6 1,1} > 7^{\log_6 0,99}.$$

Bài toán 4.37: Hãy so sánh các số:

a) $\log_8 27 > \log_9 25$

b) $\log_4 9 > \log_9 25$

Hướng dẫn giải

a) $\log_8 27 > \log_8 25 > \log_9 25$

b) $\log_4 9 = \log_2 3 = \log_8 27 > \log_9 25$

Bài toán 4.38:

a) So sánh hai số $1^1 + 2^2 + 3^3 + \dots + 1000^{1000}$ và $2^{2^{2^2}}$

b) Chứng minh với n số 2, $n > 6$ thì $2^{2^{\cdot^{\cdot^2}}}$ > 222...2^{222...2}

Hướng dẫn giải

a) Ta thấy rằng $2^{2^{2^2}} = 2^{2^{2^4}} = 2^{2^{16}}$

Mà $2^{10} = 1024 > 1000, 2^6 = 64$

$\Rightarrow 2^{16} = 2^{10} \cdot 2^6 > 64000$ nên $2^{2^{2^2}} > 2^{64000}$

Mặt khác: $1^2 + 2^2 + 3^3 + \dots + 1000^{1000} < 1000 \cdot 1000^{1000} = 1000^{1001}$

$< (2^{10})^{1001} = 2^{10010} < 2^{64000}$

Từ đó suy ra $2^{2^{2^2}} > 1^2 + 2^2 + 3^3 + \dots + 1000^{1000}$

b) Ta chứng minh quy nạp $2^{n^{\cdot^{\cdot^2}}} > n, \forall n \geq 6$

Với n số 2, đặt $a_n = 2^{n^{\cdot^{\cdot^2}}}, b_n = 222 \dots 2^{222 \dots 2}$

Ta có $222 \dots 2 < 10^n < 2^{4n}$ nên

$b_n < (2^{4n})^{2^{4n}} = 2^{4n \cdot 2^{4n}} < 2^{2^{5n}}$

Và mặt khác $a_{n-2} - 5n > 2^{2^{\cdot^{\cdot^2}}} - 8 \cdot 2^{n-2} > 2^{2^{n-2}} - 2^{n+1} > 0$

Nên $a_n = 2^{a_{n-2}} > 2^{2^{5n}} > b_n$. Ta có đpcm.

Bài toán 4.39: Chứng minh:

a) $\log_n(n+1) > \log_{n+1}(n+2)$ với mọi số nguyên $n > 1$

b) $a^m + b^m < c^m$, nếu $m > 1, a + b = c$ với $a > 0, b > 0$

Hướng dẫn giải

a) $A = \log_n(n+1) = \log_n n \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 + \log_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)$

$$B = \log_{n+1}(n+2) = \log_{n+1}(n+1) \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) = 1 + \log_{n+1} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)$$

$$\text{Ta có } 1 + \frac{1}{n} > 1 + \frac{1}{n+1} \Rightarrow \log_n \left(1 + \frac{1}{n}\right) > \log_n \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)$$

$$\text{và } \log_n \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) > \log_{n+1} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)$$

$$\Rightarrow \log_n \left(1 + \frac{1}{n}\right) > \log_{n+1} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right). \text{ Do đó } A > B.$$

$$\text{b) Ta có } a^m + b^m < c^m \Leftrightarrow \left(\frac{a}{c}\right)^m + \left(\frac{b}{c}\right)^m < 1$$

$$\text{Mà } a + b = c, a > 0, b > 0 \text{ nên } 0 < \frac{a}{c} < 1, 0 < \frac{b}{c} < 1$$

$$\text{Suy ra với } m > 1 \text{ thì } \left(\frac{a}{c}\right)^m < \left(\frac{a}{c}\right)^1; \left(\frac{b}{c}\right)^m < \left(\frac{b}{c}\right)^1$$

$$\text{Từ đó ta có: } \left(\frac{a}{c}\right)^m + \left(\frac{b}{c}\right)^m < \frac{a}{c} + \frac{b}{c} = 1$$

Bài toán 4.40:

a) Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh $a^a \cdot b^b \cdot c^c \geq a^b \cdot b^c \cdot c^a$

b) Cho a, b, c là độ dài các cạnh của tam giác nhọn. Chứng minh:

$$\left(b^2 + b^{\frac{2}{3}}\right) + \left(c^2 + c^{\frac{2}{3}}\right) > a^2 + a^{\frac{2}{3}}$$

Hướng dẫn giải

a) Giả sử $a = \max\{a; b; c\}$.

$$\text{- Xét } a \geq b \geq c: \text{ BĐT } \Leftrightarrow a^{a-b} \cdot b^{b-c} \geq c^{a-c}$$

$$\text{Vì } a \geq b \geq c > 0 \text{ nên } a^{a-b} \cdot b^{b-c} \geq c^{a-b} \cdot b^{b-c} = c^{a-c}$$

$$\text{- Xét } a \geq c \geq b: \text{ BĐT } \Leftrightarrow a^{a-b} \geq b^{c-b} \cdot c^{a-c}$$

$$\text{Vì } a \geq c \geq b > 0 \text{ nên } b^{c-b} \cdot c^{a-c} \leq a^{c-b} \cdot a^{a-c} = a^{a-b}$$

b) Không mất tính tổng quát, ta giả sử a là cạnh lớn nhất trong các cạnh của tam giác. Khi đó, ta có

$$a^2 > b^2 > c^2, a^{\frac{2}{3}} > b^{\frac{2}{3}} > c^{\frac{2}{3}} \text{ nên:}$$

$$\left(a^2 + a^{\frac{2}{3}}\right) + \left(b^2 + b^{\frac{2}{3}}\right) > c^2 + c^{\frac{2}{3}} \text{ và } \left(a^2 + a^{\frac{2}{3}}\right) + \left(c^2 + c^{\frac{2}{3}}\right) > b^2 + b^{\frac{2}{3}}$$

Do a, b, c là độ dài các cạnh của tam giác nhọn nên $b^2 + c^2 > a^2$

$$x = a^{\frac{1}{3}}; y = b^{\frac{1}{3}}; z = c^{\frac{1}{3}} \text{ thì } y^3 + z^3 > x^3$$

$$\text{Ta có: } (y^2 + z^2)^3 = y^6 + z^6 + 3y^2z^2(y^2 + z^2) > y^6 + z^6 + 2y^3z^3 = (y^3 + z^3)^2 > (x^3)^2 = x^6$$

$$\text{Suy ra } y^2 + z^2 > x^2 \text{ hay } b^{\frac{2}{3}} + c^{\frac{2}{3}} > a^{\frac{2}{3}} \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Bài toán 4.41:

a) Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh $(abc)^{\frac{a+b+c}{3}} \leq a^a \cdot b^b \cdot c^c$

b) Cho 4 số $x, y, z, t \in \left(\frac{1}{4}; 1\right)$. Chứng minh:

$$\log_x \left(y - \frac{1}{4}\right) + \log_y \left(z - \frac{1}{4}\right) + \log_z \left(t - \frac{1}{4}\right) + \log_t \left(x - \frac{1}{4}\right) \geq 8.$$

Hướng dẫn giải

$$\text{a) BĐT} \Leftrightarrow \log(abc)^{\frac{a+b+c}{3}} \leq \log(a^a \cdot b^b \cdot c^c)$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)\log(abc) \leq 3(\log a^a + \log b^b + \log c^c)$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)(\log a + \log b + \log c) \leq 3(a\log a + b\log b + c\log c)$$

$$\Leftrightarrow (a-b)(\log a - \log b) + (b-c)(\log b - \log c) + (c-a)(\log c - \log a) \geq 0$$

BĐT này đúng vì cơ số $10 > 1$ nên $x \geq y > 0 \Rightarrow \log x \geq \log y$ hoặc $0 < x \leq y \Rightarrow \log x \leq \log y$ nên $(x-y)(\log x - \log y) \geq 0, \forall x > 0, \forall y > 0$.

$$\text{b) Ta có: } \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0 \Rightarrow a - \frac{1}{4} \leq a^2 \text{ với mọi } a.$$

Và vì $\frac{1}{4} < x, y, z, t < 1$ nên hàm nghịch biến, do đó:

$$\text{VT} \geq \log_x y^2 + \log_y z^2 + \log_z t^2 + \log_t x^2$$

$$= 2(\log_x y + \log_y z + \log_z t + \log_t x)$$

$$\geq 8 \sqrt[4]{\log_x y \cdot \log_y z \cdot \log_z t \cdot \log_t x} = 8 \sqrt[4]{1} = 8.$$

Bài toán 4.42: Chứng minh:

a) $n^{n+1} > (n+1)^n, \forall n \in \mathbb{N}, n > 3$

b) $\sqrt[n]{x^n + y^n} \geq \sqrt[n+1]{x^{n+1} + y^{n+1}}$ với n nguyên, $n \geq 2$ và $x, y \geq 0$.

Hướng dẫn giải

a) Với $n \in \mathbb{N}, n > 3$, bất đẳng thức tương đương

$$(n+1)\ln n > n\ln(n+1) \Leftrightarrow \frac{n+1}{\ln(n+1)} > \frac{n}{\ln n}$$

Xét $f(x) = \frac{x}{\ln x}$ trên $(3; +\infty)$ thì $f'(x) = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x} > 0$.

Do đó f đồng biến trên $(3; +\infty)$ nên: $n+1 > n > 3 \Rightarrow f(n+1) > f(n)$ (đpcm)

b) Với $x=0$ hoặc $y=0$, bất đẳng thức đúng.

Với $xy > 0$, bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\sqrt[n]{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^n} \geq \sqrt[n+1]{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^{n+1}}. \text{ Xét } f(t) = \frac{\sqrt[n]{1+t^n}}{\sqrt[n+1]{1+t^{n+1}}} \text{ với } t \in (0; +\infty).$$

Ta có $f'(t) = \frac{t^{n-1} \cdot (1-t)}{\sqrt[n+1]{(1+t^{n+1})^{n+2}} \sqrt[n]{(1+t^n)^{n-1}}}$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$.

BBT

x	0	1	$+\infty$	
$f'(t)$	0	+	0	-
$f(t)$				

Suy ra $f(t) \geq 1$ với mọi $t \in (0; +\infty) \Rightarrow$ đpcm.

Bài toán 4.43: Chứng minh các bất đẳng thức sau với mọi $x > 0$

a) $e^x > x + 1$ b) $e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2}$

c) $\ln(1+x) > x - \frac{x^2}{2}$

Hướng dẫn giải

a) Xét hàm số $f(x) = e^x - x - 1, x \geq 0$ thì $f'(x) = e^x - 1 > 0, \forall x > 0$ nên f đồng biến trên $(0; +\infty)$ vì f liên tục trên $[0; +\infty)$ nên f đồng biến trên $[0; +\infty): x > 0 \Rightarrow f(x) > f(0) = 0$: đpcm.

b) Xét $f(x) = e^x - \frac{x^2}{2} - x - 1, x \geq 0$ thì $f'(x) = e^x - x - 1$.

Theo câu a) thì $f'(x) > 0$ nên f đồng biến trên $[0; +\infty)$.

$x > 0 \Rightarrow f(x) > f(0) = 0$: đpcm.

c) BĐT: $\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} > 0, \forall x > 0$

Xét $f(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}, x \geq 0, f'(x) = \frac{x^2}{1+x} \geq 0$

và f liên tục trên $[0; +\infty)$ nên f đồng biến trên $[0; +\infty)$

Do đó: $x > 0 \Rightarrow f(x) > f(0) = 0$: đpcm.

Bài toán 4.44: Chứng minh:

a) $4^{\sin x} + 2^{\tan x} > \sqrt{2^{3x+2}}, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

b) $e^x > \frac{x}{x^2 - 2x + 2}$ với mọi x

Hướng dẫn giải

a) Áp dụng bất đẳng thức Côsi:

$$4^{\sin x} + 2^{\tan x} \geq 2\sqrt{4^{\sin x} \cdot 2^{\tan x}} = \sqrt{2^{2\sin x + \tan x + 2}}$$

Ta cần chứng minh: $2^{2\sin x + \tan x + 2} > 2^{3x+2} \Leftrightarrow 2\sin x + \tan x > 3x$

Xét $f(x) = 2\sin x + \tan x - 3x, 0 \leq x < \frac{\pi}{2}$

$$f'(x) = 2\cos x + \frac{1}{\cos^2 x} - 3 > 2\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x} - 3 \geq 2\sqrt{2} - 3 > 0$$

nên f đồng biến trên $\left[0; \frac{\pi}{2}\right): x > 0 \Rightarrow f(x) > f(0) = 0$: đpcm.

b) Nếu $x \leq 0$ thì BĐT đúng. Nếu $x > 0$, vì $x^2 - 2x + 2 > 0, \forall x$ nên

BĐT $\Leftrightarrow x^2 - 2x + 2 > \frac{x}{e^x}$. Xét $f(x) = x^2 - 2x + 2, x > 0$

$$f'(x) = 2x - 2, f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1. \text{ Lập BBT thì } \min f(x) = f(1) = 1$$

$$\text{Xét } g(x) = \frac{x}{e^x}, x > 0, g'(x) = \frac{e^x - xe^x}{e^{2x}} = \frac{1-x}{e^x}; g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$\text{Lập BBT thì } \max g(x) = g(1) = \frac{1}{e}. \text{ Vì } \min f(x) > \max g(x) \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Bài toán 4.45: Chứng minh các bất đẳng thức sau:

$$\text{a) } e^x + \cos x \geq 2 + x - \frac{x^2}{2}, \forall x$$

$$\text{b) } e^x - e^{-x} \geq 2 \ln(x + \sqrt{1+x^2}), \forall x \geq 0.$$

Hướng dẫn giải

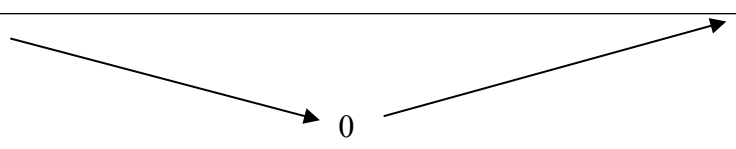
$$\text{a) Xét hàm số } f(x) = e^x + \cos x - 2 - x + \frac{x^2}{2}, D = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = e^x - \sin x - 1 + x; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$f''(x) = e^x + 1 - \cos x > 0, \forall x \text{ nên } f'(x) \text{ đồng biến trên } \mathbb{R}, \text{ ta có:}$$

$$f'(x) < f'(0) = 0, \forall x < 0; f'(x) > f'(0) = 0, \forall x > 0.$$

BBT:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$			

$$\text{Vậy } f(x) = e^x + \cos x - 2 - x + \frac{x^2}{2} \geq 0, \forall x$$

$$\text{b) Xét hàm số } f(x) = e^x - e^{-x} - 2 \ln(x + \sqrt{1+x^2}), D = [0; +\infty)$$

$$f'(x) = e^x + e^{-x} - \frac{2}{\sqrt{1+x^2}}; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

$$\text{Vì } e^x + e^{-x} > 2 \text{ và } \frac{2}{\sqrt{1+x^2}} < 2 \text{ nên } f'(x) > 0, \forall x > 0.$$

$$\text{Do đó } f(x) \text{ đồng biến trên } [0; +\infty) \text{ nên } f(x) \geq f(0) = 0 \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Bài toán 4.46: Cho $0 < x < 1; 0 < y < 1$ và $x \neq y$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{y-x} \left(\ln \frac{y}{1-y} - \ln \frac{x}{1-x} \right) > 4$$

Hướng dẫn giải

Do $x \neq y$, không giảm tổng quát, giả sử $y > x$. Xét hàm số

$$f(t) = \frac{t}{1-t} - 4t, \text{ với } 0 < t < 1 \Rightarrow f'(t) = \frac{(2t-1)^2}{t(1-t)} \geq 0$$

Vậy $f(t)$ là hàm đồng biến trên $(0;1)$ mà $y > x$ nên ta có $f(y) > f(x)$ hay

$$\ln \frac{y}{1-y} - 4y > \ln \frac{x}{1-x} - 4x \text{ và do } y-x > 0 \text{ nên suy ra:}$$

$$\frac{1}{y-x} \left(\ln \frac{y}{1-y} - \ln \frac{x}{1-x} \right) > 4 \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Bài toán 4.47: Cho $a > b > 0$. Chứng minh $\left(2^a + \frac{1}{2^a} \right)^b \leq \left(2^b + \frac{1}{2^b} \right)^a$

Hướng dẫn giải

Với $a > b > 0$, bất đẳng thức tương đương

$$\left(\frac{4^a + 1}{2^a} \right)^b \leq \left(\frac{4^b + 1}{2^b} \right)^b \leq (4^a + 1)^b \leq (4^b + 1)^a$$

$$\Leftrightarrow b \cdot \ln(4^a + 1) \leq a \cdot \ln(4^b + 1) \Leftrightarrow \frac{\ln(1 + 4^a)}{a} \leq \frac{\ln(1 + 4^b)}{b}$$

$$\text{Xét } f(x) = \frac{\ln(1 + 4^x)}{x}, x > 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{x^2} \left(\frac{4^x \ln 4}{1 + 4^x} \cdot x - \ln(1 + 4^x) \right) = \frac{1}{x^2} (4^x \cdot \ln 4 - (1 + 4^x) \cdot \ln(1 + 4^x)) < 0$$

nên f nghịch biến: $a > b > 0 \Rightarrow f(a) < f(b)$: đpcm.

Bài toán 4.48: Cho $p > 1, q > 1$ thỏa $p + q = pq$ và $a, b > 0$.

$$\text{Chứng minh } ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

Hướng dẫn giải

Xét hàm số $f(a) = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} - ab$ với $a > 0$.

$$f'(a) = a^{p-1} - b, f'(a) = 0 \Leftrightarrow a^{p-1} = b \Leftrightarrow a = b^{\frac{1}{p-1}}$$

Mà $p+1=pq \Rightarrow (p-1)(q-1)=1$ nên $a = b^{q-1}$

Lập BBT thì min $f = f(b^{q-1}) = 0 \Rightarrow$ đpcm.

Bài toán 4.49: Cho $a, b > 0$ và $a + b = 1$. Chứng minh bất đẳng thức

$$e^{ax+by} \leq a.e^x + b.e^y, \forall x, \forall y$$

Hướng dẫn giải

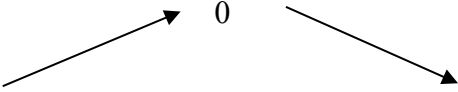
Ta có $b = 1 - a$ do đó $0 < a < 1$ nên BĐT:

$$e^{ax+(1-a)y} \leq a.e^x + (1-a)e^y$$

$$\Leftrightarrow e^y.e^{a(x-y)} \leq e^y + a(e^{x-y} - 1) \quad e^{a(x-y)} - a.e^{x-y} + a - 1 \leq 0$$

Xét $f(t) = e^{at} - a.e^t + a - 1, t \in \mathbb{R}$. $f'(t) = a(e^{at} - e^t), f'(t) \Leftrightarrow t = 0$

BBT

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	+	0	-
f			

Suy ra $f(t) \leq 0, \forall t \Rightarrow$ đpcm.

Bài toán 4.50: Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh

a) $a^b + b^a > 1$

b) $(a+b)^c + (b+c)^a + (c+a)^b > 2$

Hướng dẫn giải

a) Nếu $a \geq 1$ hoặc $b \geq 1$ thì $a^b + b^a > 1$

Nếu $0 < a, b < 1$. Xét $f(x) = (1+x)^\alpha - 1 - \alpha x, x > 0, 0 < \alpha < 1$

$$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1} - \alpha = \alpha \left(\frac{1}{(1+x)^{1-\alpha}} - 1 \right) < 0$$

nên $x > 0 \Rightarrow f(x) < f(0) = 0 \Rightarrow (1+x)^\alpha < 1 + \alpha x$ (*)

Áp dụng $a = \frac{1}{1+x}, x > 0 \Rightarrow a^b > \frac{1}{1+xb} = \frac{a+1}{a+b+ab}$

Tương tự: $b^a > \frac{1}{1+ya} = \frac{b+1}{a+b+ab} \Rightarrow a^b + b^a > 1$

- b) Trong 3 số $a+b, b+c, c+a$ nếu có một số, chẳng hạn $a+b \geq 1$ thì $(a+b)^c \geq 1$ và $(b+c)^a + (c+a)^b > b^a + a^b > 1$ suy ra đpcm. Còn nếu cả 3 số đó bé hơn 1 thì dùng bất đẳng thức (*).

3. BÀI LUYỆN TẬP

Bài tập 4.1: Thực hiện phép tính

$$A = 27^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75} - 25^{0,5} \quad B = (-0,5)^{-4} - 625^{0,25} - \left(2\frac{1}{4}\right)^{-1\frac{1}{2}} + 19(-3)^{-3}$$

Hướng dẫn

Dùng 5 quy tắc về mũ. Kết quả $A=12, B=10$.

Bài tập 4.2: Rút gọn các biểu thức:

a) $R = \left(\frac{\sqrt[4]{ax^3} - \sqrt[4]{a^3x}}{\sqrt{a} - \sqrt{x}} + \frac{1 + \sqrt{ax}}{\sqrt[4]{ax}} \right)^{-2} \cdot \sqrt{1 + 2\sqrt{\frac{a}{x}} + \frac{a}{x}}$ với $a > 0, x > 0, a \neq x$.

b) $S = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$, với $a, b > 0, a^2 \geq b$.

Hướng dẫn

a) Kết quả $R = \sqrt{ax} \left(1 + \sqrt{\frac{a}{x}} \right) = \sqrt{a}(\sqrt{x} + \sqrt{a})$

b) Kết quả $S = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} - \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$

Bài tập 4.3: Tính gọn

a) $\sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{4-2\sqrt{3}} = 2$

b) $\sqrt[3]{9+\sqrt{80}} + \sqrt[3]{9-\sqrt{80}} = 3$

Hướng dẫn

- a) Viết bình phương đủ trong căn thức hay đặt ẩn phụ VT rồi bình phương. Kết quả $\sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{4-2\sqrt{3}} = 2$.

- b) Viết lập phương đủ trong căn thức hay đặt ẩn phụ VT rồi lập phương. Kết quả $\sqrt[3]{9+\sqrt{80}} + \sqrt[3]{9-\sqrt{80}} = 3$

Bài tập 4.4: Trong khai triển nhị thức: $\left(\sqrt[3]{\frac{a}{\sqrt{b}}} + \sqrt{\frac{b}{\sqrt[3]{a}}}\right)^{21}$, tìm hệ số của số hạng chứa a và b có số mũ bằng nhau.

Hướng dẫn

Dùng nhị thức Niuton: $(a+b)^2 = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k$

Kết quả $C_{21}^9 = \frac{21!}{9!12!} = 293\ 930$.

Bài tập 4.5:

a) Tính $\log_{\sqrt{3}} 50$ theo $\log_3 15 = a, \log_3 10 = b$.

b) Tính $\ln 6,25$ theo $c = \ln 2, d = \ln 5$.

Hướng dẫn

a) Đưa về cơ số 3. Kết quả $2a + 2b - 2$

b) Đưa về cơ số e . Kết quả $2d - 2c$.

Bài tập 4.6: Trong điều kiện có nghĩa, chứng minh:

a) Nếu $a^2 + b^2 = 7ab$ thì $\log_7 \frac{a+b}{3} = \frac{1}{2}(\log_7 a + \log_7 b)$

b) Nếu $\log_{12} 18 = a, \log_{24} 54 = b$, thì $ab + 5(a-b) = 1$.

Hướng dẫn

a) $a^2 + b^2 = 7ab \Rightarrow (a+b)^2 = 9ab$ hoặc biến đổi tương đương điều cần chứng minh.

b) Đưa về cơ số 2: $\log_2 3 = \frac{2a-1}{2-a}$ và $\log_2 3 = \frac{3b-1}{3-b}$.

Bài tập 4.7: Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{e^{2x} - 7^x}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+2x} - \sqrt[4]{1+x}}{\tan x}$

Hướng dẫn

a) Chia tử và mẫu thức cho x . Kết quả $\frac{4}{3 - \ln 7}$

b) Thêm bớt 1 trên tử thức rồi chia tử và mẫu thức cho x . Kết quả $\frac{5}{12}$

Bài tập 4.8: Tìm đạo hàm của các hàm số sau:

$$a) y = \sqrt{x^2 + 1} \cdot \log_3 x^2$$

$$b) y = \frac{\ln(x^2 + 1)}{x}$$

Hướng dẫn

$$a) \text{ Kết quả } y' = \frac{x \log_3 x^2}{\sqrt{x^2 + 1}} + \frac{2\sqrt{x^2 + 1}}{x} \ln 3$$

$$b) \text{ Kết quả } y' = \frac{2}{x^2 + 1} - \frac{\ln(x^2 + 1)}{x^2}$$

Bài tập 4.9: Cho f liên tục trên $\mathbb{R}$: $\begin{cases} f(x) \geq 1 + x \\ f(x + y) \geq f(x) \cdot f(y) \end{cases}, \forall x, y \in \mathbb{R}$. Tính $f'(x)$.

Dùng định nghĩa và kẹp giới hạn. Kết quả $f'(x) = e^x$.

Bài tập 4.10: So sánh các số:

$$a) \sqrt{3} + \sqrt[3]{30} \text{ và } \sqrt[3]{63}$$

$$b) (\sqrt{3})^{-\frac{7}{6}} \text{ và } \sqrt[3]{3^{-1} \sqrt[4]{\frac{1}{3}}}$$

Hướng dẫn

$$a) \text{ So trung gian. Kết quả } \sqrt{3} + \sqrt[3]{30} > 1 + \sqrt[3]{27} = 4 = \sqrt[3]{64} > \sqrt[3]{63}$$

$$b) \text{ Kết quả } (\sqrt{3})^{-\frac{5}{6}} < \sqrt[3]{3^{-1} \sqrt[4]{\frac{1}{3}}}$$

Bài tập 4.11:

a) Không dùng bảng số và máy tính, hãy so sánh:

$$\log \frac{5 + \sqrt{7}}{2} \text{ và } \frac{\log 5 + \log \sqrt{7}}{2}$$

b) Cho 3 số không âm x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 3$. Tìm GTNN của

$$K = \frac{1}{4 + 2 \ln(1 + x) - y} + \frac{1}{4 + 2 \ln(1 + y) - z} + \frac{1}{4 + 2 \ln(1 + z) - x}$$

Hướng dẫn

$$a) \text{ Đặt } a = \log \frac{5 + \sqrt{7}}{2} \text{ và } b = \frac{\log 5 + \log \sqrt{7}}{2}$$

$$\text{Suy ra } \frac{5 + \sqrt{7}}{2} = 10^a \text{ và } \sqrt{5\sqrt{7}} = 10^b.$$

$$\text{Kết quả } \log \frac{5 + \sqrt{7}}{2} > \frac{\log 5 + \log \sqrt{7}}{2}.$$

b) Dùng bất đẳng thức AM-GM.