

Chương I. PHÉP NHÂN VÀ PHÉP CHIA CÁC ĐA THỨC

Chuyên đề 2. CÁC HẰNG ĐẲNG THỨC ĐÁNG NHỚ

A. Kiến thức cần nhớ

$$\bullet \quad (A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 \quad (1)$$

$$\bullet \quad (A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2 \quad (2)$$

$$\bullet \quad A^2 - B^2 = (A + B)(A - B) \quad (3)$$

$$\bullet \quad (A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 = A^3 + B^3 + 3AB(A + B) \quad (4)$$

$$\bullet \quad (A - B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3 = A^3 - B^3 - 3AB(A - B) \quad (5)$$

$$\bullet \quad A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2) \quad (6)$$

$$\bullet \quad A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2) \quad (7)$$

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1: Rút gọn biểu thức :

$$a) A = (x + 2)^2 + 4(x + 2)(x - 2) + (x - 4)^2$$

$$b) B = (3x^2 - 2x + 1)(3x^2 + 2x + 1) - (3x^2 + 1)^2$$

$$c) C = (x^2 - 5x + 2)^2 + 2.(5x - 2)(x^2 - 5x + 2) + (5x - 2)^2$$

Giải

Tìm cách giải. Rút gọn biểu thức là biến đổi viết biểu thức ấy dưới dạng đơn giản hơn. Trong mỗi biểu thức đều ẩn chứa hằng đẳng thức, vì vậy chúng ta dùng hằng đẳng thức để khai triển và thu gọn các đơn thức đồng dạng.

Trình bày lời giải

a) Ta có:

$$\begin{aligned} A &= (x + 2)^2 + 4(x + 2)(x - 2) + (x - 4)^2 \\ &= x^2 + 4x + 4 + 4(x^2 - 4) + x^2 - 8x + 16 \\ &= 6x^2 - 4x + 4 \end{aligned}$$

b) Ta có :

$$\begin{aligned} B &= (3x^2 - 2x + 1)(3x^2 + 2x + 1) - (3x^2 + 1)^2 \\ &= (3x^2 + 1)^2 - (2x)^2 - (3x^2 + 1)^2 \\ &= - (2x)^2 = -4x^2 \end{aligned}$$

c) Ta có :

$$C = (x^2 - 5x + 2)^2 + 2.(5x - 2)(x^2 - 5x + 2) + (5x - 2)^2$$

$$= \left[(x^2 - 5x + 2) + (5x - 2) \right]^2$$

$$= (x^2)^2 = x^4$$

Ví dụ 2: Cho $x + y = -7$ và $x^2 + y^2 = 11$. Tính $x^3 + y^3$?

Giải

Tìm cách giải. Sử dụng hằng đẳng thức (1) và giả thiết ta có thể tính được tích xy . Mặt khác phân tích kết luận bằng hằng đẳng thức (4), ta chỉ cần biết thêm tích xy là xong. Từ đó ta có lời giải sau.

Trình bày lời giải

$$\text{Từ } x + y = -7 \Rightarrow x^2 + 2xy + y^2 = 49$$

$$\text{Mà } x^2 + y^2 = 11 \Rightarrow 11 + 2xy = 49 \Rightarrow xy = 12$$

$$\text{Ta có: } x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y) = (-7)^3 - 3.12(-7)$$

$$\Rightarrow x^3 + y^3 = -91$$

Ví dụ 3: Tính giá trị biểu thức :

$$a) A = x^2 + 10x + 26 \text{ tại } x = 95$$

$$b) B = x^3 - 3x^2 + 3x + 1 \text{ tại } x = 21$$

Giải

Tìm cách giải. Quan sát kỹ biểu thức, ta nhận thấy có bóng dáng của hằng đẳng thức. Do vậy chúng ta nên vận dụng đưa về hằng đẳng thức. Sau đó thay số vào để tính, bài toán sẽ đơn giản hơn.

Trình bày lời giải

a) Ta có :

$$A = x^2 + 10x + 26$$

$$= x^2 + 10x + 25 + 1 = (x + 5)^2 + 1$$

b) Ta có :

$$B = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$$

$$= x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 2$$

$$= (x - 1)^3 + 2$$

$$\text{Với } x = 21 \Rightarrow B = (21 - 1)^3 + 2 = 8000 + 2 = 8002$$

Ví dụ 4: Tính nhanh:

$$a) A = \frac{2020^3 + 1}{2020^2 - 2019}$$

$$b) B = \frac{2020^3 - 1}{2020^2 + 2021}$$

Giải

Tìm cách giải. Quan sát kỹ đề bài, ta nhận thấy mỗi phân số đều ẩn chứa hằng đẳng thức. Do vậy, việc dùng hằng đẳng thức để phân tích ra thừa số là suy luận tự nhiên.

Trình bày lời giải

$$a) A = \frac{2020^3 + 1}{2020^2 - 2019} = \frac{(2020 + 1)(2020^2 - 2020 + 1)}{2020^2 - 2020 + 1} = 2021$$

$$b) B = \frac{2020^3 - 1}{2020^2 + 2021} = \frac{(2020 - 1)(2020^2 + 2020 + 1)}{2020^2 + 2020 + 1} = 2019$$

Ví dụ 5: Cho $x - y = 2$. Tính giá trị $A = 2(x^3 - y^3) - 3(x + y)^2$

Giải

Tìm cách giải. Dựa vào giả thiết và kết luận ta nghĩ tới hai hướng sau:

- Biến đổi biểu thức A nhằm xuất hiện $x - y$ để thay bằng số 2.
- Từ giả thiết, suy ra $x = y + 2$ thay vào kết luận, ta được biểu thức chỉ chứa biến y. Sau đó rút gọn biểu thức.

Trình bày lời giải

Cách 1. Ta có :

$$\begin{aligned} A &= 2(x^3 - y^3) - 3(x + y)^2 \\ &= 2(x - y)(x^2 + y^2 + xy) - 3[(x - y)^2 + 4xy] \\ &= 4(x^2 + y^2 - 2xy + 3xy) - 3(x - y)^2 - 12xy \\ &= 4(x - y)^2 - 3(x - y)^2 + 12xy - 12xy = (x - y)^2 = 4 \end{aligned}$$

Cách 2. Từ giả thiết, suy ra $x = y + 2$ thay vào biểu thức A ta có :

$$\begin{aligned} A &= 2((y + 2)^3 - y^3) - 3(y + 2 + y)^2 \\ &= 2(y^3 + 6y^2 + 12y + 8 - y^3) - 3(2y + 2)^2 \\ &= 12y^2 + 24y + 16 - 12y^2 - 12y - 12 = 4 \end{aligned}$$

Ví dụ 6: Tìm các số thực x, y thỏa mãn $x^2 + 26y^2 - 10xy + 14x - 76y + 58 = 0$

Giải

Tìm cách giải. Để tìm số thực x, y thỏa mãn đa thức hai biến bậc hai bằng 0, chúng ta định hướng biến đổi đưa đa thức đó thành tổng bình phương của hai biểu thức. Sau đó áp dụng $A^2 + B^2 = 0$ khi và chỉ khi $A = 0$ và $B = 0$. Từ đó tìm được x, y.

Trình bày lời giải

Ta có :

$$\begin{aligned} x^2 + 26y^2 - 10xy + 14x - 76y + 58 &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 - 10xy + 25y^2 + 14(x - 5y) + 49 + y^2 - 6y + 9 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x - 5y)^2 - 14(x - 5y) + 49 + (y - 3)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x - 5y - 7)^2 + (y - 3)^2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 5y - 7 = 0 \\ y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 22 \\ y = 3 \end{cases}$$

Ví dụ 7: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức : $P = x^2 + xy + y^2 - 2x - 3y + 2015$

Giải

Tìm cách giải. Để tìm giá trị nhỏ nhất của một đa thức bậc hai, chúng ta dùng hằng đẳng thức (1) và (2) để biến đổi đa thức thành tổng các bình phương cộng với một số. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức đạt được khi và chỉ khi tổng các bình phương bằng 0.

Trình bày lời giải

Ta có :

$$\begin{aligned} P &= \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4} - 2x - 3y + 2015 \\ &= \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 - 2\left(x + \frac{y}{2}\right) + 1 + \frac{3y^2}{4} - 2y + 2014 \\ &= \left(x + \frac{y}{2} - 1\right)^2 + \frac{3}{4}\left(y^2 - \frac{8}{3}y + \frac{16}{9}\right) + 2012\frac{2}{3} \\ &= \left(x + \frac{y}{2} - 1\right)^2 + \frac{3}{4}\left(y - \frac{4}{3}\right)^2 + 2012\frac{2}{3} \geq 2012\frac{2}{3} \\ &= 2012\frac{2}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{y}{2} - 1 = 0 \\ y - \frac{4}{3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = \frac{4}{3} \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $P = 2012\frac{2}{3}$ khi và chỉ khi $x = \frac{1}{3}; y = \frac{4}{3}$

Ví dụ 8: Cho a, b, c thỏa mãn đồng thời $a + b + c = 6$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 12$. Tính giá trị của biểu thức :

$$P = (a - 3)^{2020} + (b - 3)^{2020} + (c - 3)^{2020}$$

Giải

Tìm cách giải. Giả thiết cho hai hằng đẳng thức mà lại có ba biến a, b, c có vai trò như nhau. Do vậy chúng ta dự đoán dấu bằng xảy ra khi $a = b = c$ và từ giả thiết suy ra $a = b = c = 2$. Để tìm ra được kết quả này, chúng ta vận dụng tổng các bình phương bằng 0. Do đó nên bắt đầu từ $(a - 2)^2 + (b - 2)^2 + (c - 2)^2 = 0$ và biến đổi tương đương để ra giả thiết. Khi trình bày thì lại bắt đầu từ giả thiết.

Trình bày lời giải

Ta có :

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 = 12 &\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 - 12 = 0 \\ &\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 - 24 + 12 = 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 - 4(a + b + c) + 12 = 0 \\ &\Leftrightarrow a^2 - 4a + 4 + b^2 - 4b + 4 + c^2 - 4c + 4 = 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (a - 2)^2 + (b - 2)^2 + (c - 2)^2 = 0$$

Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c = 2$

$$\Rightarrow P = (-1)^{2020} + (-1)^{2020} + (-1)^{2020} = 3$$

Ví dụ 9: Cho $a^2 - b^2 = 4c^2$. Chứng minh rằng:

$$(5a - 3b - 8c)(5a - 3b + 8c) = (3a - 5b)^2$$

Giải

Tìm cách giải . Quan sát đẳng thức cần chứng minh, chúng ta nhận thấy vế trái có chứa c, vế phải không chứa c. Do vậy chúng ta cần biến đổi vế trái của đẳng thức, sau đó khử c bằng cách thay $4c^2 = a^2 - b^2$ từ giả thiết. Để thực hiện nhanh và chính xác, chúng ta nhận thấy vế trái có dạng hằng đẳng thức (3).

Trình bày lời giải

Biến đổi vế trái :

$$\begin{aligned} & (5a - 3b - 8c)(5a - 3b + 8c) \\ &= (5a - 3b)^2 - 64c^2 = (25a^2 - 30ab + 9b^2) - 64c^2 \\ &= (25a^2 - 30ab + 9b^2) - 16(a^2 - b^2) \quad (\text{do } 4c^2 = a^2 - b^2) \\ &= 9a^2 - 30ab + 25b^2 = (3a - 5b)^2 \end{aligned}$$

Vế trái bằng vế phải. Suy ra điều phải chứng minh.

Ví dụ 10: Phân tích số 27000001 ra thừa số nguyên tố.

Tính tổng các ước số nguyên tố của nó.

Giải

Tìm cách giải . Chúng ta có thể vận dụng hằng đẳng thức để phân tích một số ra thừa số nguyên tố.

Trình bày lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned} 27000001 &= 300^3 + 1 = (300 + 1)(300^2 - 300 + 1) \\ 301 \left[(300 + 1)^2 - 30^2 \right] &= 301(300 + 1 - 30)(300 + 1 + 30) \\ &= 301.271.331 = 7.43.271.331 \end{aligned}$$

Tổng các ước số nguyên tố của nó là : $7 + 43 + 271 + 331 = 652$

Ví dụ 11: Cho các số x, y thỏa mãn đẳng thức $x^4 + x^2y^2 + y^4 = 4$; $x^8 + x^4y^4 + y^8 = 8$

hãy tính giá trị biểu thức $A = x^{12} + x^2y^2 + y^{12}$

Giải

Ta có :

$$(x^4 + x^2y^2 + y^4)(x^4 - x^2y^2 + y^4) = (x^4 + y^4)^2 - x^4y^4$$

$$=x^8 + x^4 y^4 + y^8 = 8 \Rightarrow x^4 - x^2 y^2 + y^4 = 2$$

Kết hợp với giả thiết suy ra $x^4 + y^4 = 3$ và $x^2 y^2 = 1$

$$\text{Ta có : } A = x^{12} + x^2 y^2 + y^{12} = (x^4)^3 + (y^4)^3 + x^2 y^2$$

$$= 3 \left[(x^4 + y^4)(x^8 - x^4 y^4 + y^8) \right] + x^2 y^2$$

$$= 3 \left[(x^4 + y^4)^2 - 3x^4 y^4 \right] + 1$$

$$= 3 \cdot [3^2 - 3] + 1 = 19$$

C. Bài tập vận dụng

2.1. Tìm hệ số x^2 của đa thức sau khi khai triển :

$$a) A = (x - 2)^2 + (x + 2)^2 + (x + 3)^3 + (3x + 1)^3$$

$$b) B = (2x - 1)^2 + (x - 2)^2 + (x - 3)^2 + (3x - 1)^3$$

Hướng dẫn giải – đáp số

$$a) A = x^2 - 4x + 4 + x^2 + 4x + 4 + x^3 + 9x^2 + 27x + 27 + 27x^3 + 27x^2 + 9x + 1$$

$$= 28x^3 + 38x^2 + 36x + 36$$

Vậy hệ số của x^2 là 38.

$$b) B = 4x^2 - 4x + 1 + x^2 - 4x + 4 + x^3 - 9x^2 + 27x - 27 + 27x^3 - 27x^2 + 9x - 1$$

$$= 28x^3 - 31x^2 + 28x - 23$$

Vậy hệ số của x^2 là -31.

2.2. Tính giá trị biểu thức

$$a) A = x^2 + 0,2x + 0,01 \text{ tại } x = 0,9.$$

$$b) B = x^3 + 3x^2 + 3x + 2 \text{ tại } x = 19.$$

$$c) C = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 2 \text{ tại } x^2 - x = 8$$

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Ta có :

$$A = x^2 + 0,2x + 0,01$$

$$= x^2 + 0,2x + (0,1)^2$$

$$= (x + 0,1)^2$$

$$\text{Với } x = 0,9 \Rightarrow A = (0,9 + 0,1)^2 = 1$$

b) Ta có:

$$B = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$$

$$= x^3 + 3x^2 + 3x + 1 + 1 = (x + 1)^3 + 1$$

Với $x = 19$ thì $B = (19 + 1)^3 + 1 = 8000 + 1 = 8001$

c) Ta có :

$$\begin{aligned}C &= x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 2 \\&= x^4 - 2x^3 + x^2 + 2x^2 - 2x + 2 \\&= (x^2 - x)^2 + 2.(x^2 - x) + 1 + 1 \\&= (x^2 - x + 1)^2 + 1\end{aligned}$$

Với $x^2 - x = 8 \Rightarrow C = (8 + 1)^2 + 1 = 81 + 1 = 82$.

2.3. Tính hợp lý :

$$a) A = \frac{356^2 - 144^2}{256^2 - 244^2}$$

$$b) B = 253^2 + 94.253 + 47^2$$

$$c) C = 136^2 - 92.136 + 46^2$$

$$d) D = (100^2 + 98^2 + \dots + 2^2) - (99^2 + 97^2 + \dots + 1^2)$$

Hướng dẫn giải – đáp số

$$a) A = \frac{356^2 - 144^2}{256^2 - 244^2} = \frac{(356 + 144)(356 - 144)}{(256 + 244)(256 - 244)} = \frac{500.212}{500.12} = \frac{53}{3}$$

$$b) B = 253^2 + 94.253 + 47^2 = 253^2 + 2.47.253 + 47^2 = (253 + 47)^2 = 300^2 = 90000$$

$$c) C = 136^2 - 92.136 + 46^2 = 136^2 - 2.46.136 + 46^2 = (136 - 46)^2 = 90^2 = 8100$$

$$\begin{aligned}d) D &= (100^2 + 98^2 + \dots + 2^2) - (99^2 + 97^2 + \dots + 1^2) \\&= (100^2 - 99^2) + (98^2 - 97^2) + \dots + (2^2 - 1^2) \\&= (100 - 99)(100 + 99) + (98 - 97)(98 + 97) + \dots + (2 - 1)(2 + 1) \\&= 1.(100 + 99) + 1.(98 + 97) + \dots + 1.(2 + 1) \\&= 100 + 99 + \dots + 1 = (100 + 1) + (99 + 2) + \dots + (51 + 50) \\&= 101 + 101 + \dots + 101 = 101.50 = 5050\end{aligned}$$

2.4. Tính giá trị biểu thức :

$$A = \frac{2021^2 (2020 - 2019)}{(2020 - 1)(2020^3 + 1)} \cdot \frac{2019^2 (2020^2 + 2021)}{2020^3 - 1}$$

Hướng dẫn giải – đáp số

$$\begin{aligned}A &= \frac{2021^2 (2020^2 - 2019)}{(2020^2 - 1)(2020^3 + 1)} \cdot \frac{2019^2 (2020 + 2021)}{2020^3 - 1} \\&= \frac{2021^2 (2020^2 - 2020 + 1)}{(2020 + 1)(2020 - 1)(2020 + 1)(2020^2 - 2020 + 1)} \cdot \frac{2019^2 (2020^2 + 2020 + 1)}{(2020 - 1)(2020^2 + 2020 + 1)}\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2019} \cdot 2019 = 1$$

2.5. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$a) A = 5x^2 + 5y^2 + 8xy + 2y - 2x + 2020$$

$$b) M = 5x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2xy - z - 1$$

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Ta có :

$$A = 4x^2 + 8xy + 4y^2 + x^2 - 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 + 2018$$

$$= 4(x + y)^2 + (x - 1)^2 + (y + 1)^2 + 2018 \geq 2018$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $A = 2018$ tại $x = 1; y = -1$

b) Ta có :

$$B = 4x^2 + 4xy + y^2 + x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 + 2015$$

$$= (2x + y)^2 + (x - 1)^2 + (y + 2)^2 + 2015 \geq 2015$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của B là 2015 tại $x = 1; y = -2$.

$$c) M = x^2 - 2xy + y^2 + 4x^2 - 4x + 1 + z^2 - z + \frac{1}{4} - 2\frac{1}{4}$$

$$= (x + y)^2 + (2x - 1)^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{4} \geq -2\frac{1}{4}$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi } \begin{cases} x - y = 0 \\ 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = y = z = \frac{1}{2} \\ z - \frac{1}{2} = 0 \end{cases}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của M là $-2\frac{1}{4}$ khi $x = y = z = \frac{1}{2}$

2.6. Tìm x, biết :

$$a) (x + 2)^2 + (x + 3)^2 - 2(x - 2)(x - 3) = 19$$

$$b) (x + 2)(x^2 - 2x + 4) - x(x^2 - 5) = 15$$

$$c) (x - 1)^3 + (2 - x)(4 + 2x + x^2) + 3x(x + 2) = 17$$

Hướng dẫn giải – đáp số

$$a) (x + 2)^2 + (x + 3)^2 - 2(x - 2)(x - 3) = 19$$

$$\Leftrightarrow (x - 2)^2 + 8x + (x - 3)^2 + 12x - 2(x - 2)(x - 3) = 19$$

$$\Leftrightarrow 20x + [(x-2) - (x-3)]^2 = 19$$

$$\Leftrightarrow 20x + 1 = 19$$

$$\Leftrightarrow 20x = 18 \Leftrightarrow x = \frac{9}{10}$$

$$b)(x+2)(x^2 - 2x + 4) - x(x^2 - 5) = 15$$

$$\Leftrightarrow x^3 + 8 - x^3 + 5x = 15$$

$$\Leftrightarrow 5x + 8 = 15 \Leftrightarrow 5x = 7 \Leftrightarrow x = \frac{7}{5}$$

$$c)(x-1)^3 + (2-x)(4-2x+x^2) + 3x(x+2) = 17$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^3 + 8 - x^3 + 3x^2 + 6x = 17$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 8 - x^3 + 6x = 17$$

$$\Leftrightarrow 9x + 7 = 17$$

$$\Leftrightarrow 9x = 10 \Leftrightarrow x = \frac{10}{9}$$

2.7. Biết $xy = 11$ và $x^2y + xy^2 + x + y = 2016$. Hãy tính giá trị : $x^2 + y^2$

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có: $x^2y + xy^2 + x + y = 2016$

$$xy(x+y) + x + y = 2016$$

$$11(x+y) + (x+y) = 2016$$

$$12(x+y) = 2016 \Rightarrow x+y = 168$$

$$\text{Mà } x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy = 168^2 - 2.11 = 28202$$

2.8. Cho $a - b = 7$. Tính giá trị biểu thức :

$$A = a^2(a+1) - b^2(b-1) - 3ab(a-b+1) + ab$$

Hướng dẫn giải – đáp số

$$\text{Ta có : } A = a^3 + a^2 - b^3 + b^2 - 3ab(a-b) - 3ab + ab$$

$$= a^3 - 3ab(a-b) - b^3 + a^2 + b^2 - 2ab$$

$$= (a-b)^3 + (a-b)^2 = 7^3 + 7^2 = 392$$

2.9. Chứng minh rằng với mọi x ta có :

$$a)x(x-6)+10 > 0$$

$$b)(x-3)(x-5)+3 > 0$$

$$c)x^2 + x + 1 > 0$$

Hướng dẫn giải – đáp số

$$a)x(x - 6) + 10 > 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 + 1 > 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 3)^2 + 1 > 0 \text{ (luôn đúng)}$$

$$b)(x - 3)(x - 5) + 3 > 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 8x + 18 > 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 + 2 > 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 4)^2 + 2 > 0 \text{ (luôn đúng)}$$

$$c)x^2 + x + 1 > 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} > 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \text{ (luôn đúng)}$$

2.10. Tìm x, y biết :

$$a)x^2 - 2x + 5 + y^2 - 4y = 0$$

$$b)4x^2 + y^2 - 20x - 2y + 26 = 0$$

$$c)9x^2 + 4y^2 + 4y - 12x + 5 = 0$$

Hướng dẫn giải – đáp số

$$a)x^2 - 2x + 5 + y^2 - 4y = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 4y + 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)^2 = 0; (y - 2)^2 = 0 \text{ (vì } (x - 1)^2, (y - 2)^2 \geq 0)$$

$$\Leftrightarrow x = 1; y = 2$$

$$b)4x^2 + y^2 - 20x - 2y + 26 = 0$$

$$\Leftrightarrow (4x^2 - 20x + 25) + (y^2 - 2y + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x - 5)^2 + (y - 1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x - 5)^2 = 0 \text{ và } (y - 1)^2 = 0 \text{ (vì } (2x - 5)^2, (y - 1)^2 \geq 0)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5}{2}; y = 1$$

$$c)9x^2 + 4y^2 + 4y - 12x + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow (9x^2 - 12x + 4) + (4y^2 + 4y + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (3x - 2)^2 + (2y + 1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (3x - 2)^2 = 0 \text{ và } (2y + 1)^2 = 0 \text{ (vì } (3x - 2)^2, (2y + 1)^2 \geq 0)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2}{3}; y = -\frac{1}{2}$$

2.11. Chứng minh không tồn tại x; y thỏa mãn:

$$a) x^2 + 4y^2 + 4x - 4y + 10 = 0$$

$$b) 3x^2 + y^2 + 10x - 2xy + 29 = 0$$

$$c) 4x^2 + 2y^2 + 2y - 4xy + 5 = 0$$

Hướng dẫn giải – đáp số

$$a) x^2 + 4y^2 + 4x - 4y + 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 + 4y^2 - 4y + 1 + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 2)^2 + (2y - 1)^2 + 5 = 0$$

$$\text{Mà } (x + 2)^2 + (2y - 1)^2 + 5 \geq 5 > 0$$

Suy ra không có x, y thỏa mãn đề bài.

$$b) 3x^2 + y^2 + 10x - 2xy + 29 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2xy + y^2 + 2x^2 + 10x + 29 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - y)^2 + 2(x + 2,5)^2 + 16,5 = 0$$

$$\text{Mà } (x - y)^2 + 2(x + 2,5)^2 + 16,5 \geq 16,5 > 0$$

Suy ra không có x, y thỏa mãn đề bài.

$$c) 4x^2 + 2y^2 + 2y - 4xy + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow (4x^2 - 4xy + y^2) + (y^2 + 2y + 1) + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x - y)^2 + (y + 1)^2 + 4 = 0$$

$$\text{Mà } (2x - y)^2 + (y + 1)^2 + 4 \geq 4 > 0$$

Suy ra không có x, y thỏa mãn đề bài.

2.12. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức :

$$a) A = 15 - 8x - x^2$$

$$b) B = 4x - x^2 + 2$$

$$c) C = x^2 - y^2 + 4x - 4y + 2$$

Hướng dẫn giải – đáp số

$$a) \text{ Ta có : } A = 15 - 8x - x^2 = 31 - (16 + 8x + x^2) = 31 - (4 + x)^2 \leq 31$$

Vậy giá trị lớn nhất của A là 31 khi $x = -4$

$$b) \text{ Ta có } B = 6 - (4 - 4x + x^2) = 6 - (2 - x)^2 \leq 6$$

Vậy giá trị lớn nhất của B là 6 khi $x = 2$

$$c) \text{ Ta có : } C = 10 - (x^2 - 4x + 4) - (y^2 + 4y + 4) = 10 - (x - 2)^2 - (y + 2)^2 \leq 10$$

Vậy giá trị lớn nhất của C là 10 khi $x = 2; y = -2$

2.13. Cho các số thực x, y thỏa mãn điều kiện $x + y = 3; x^2 + y^2 = 17$. Tính giá trị biểu thức $x^3 + y^3$.

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có:

$$(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = 17 + 2xy = 9$$

$$\Leftrightarrow xy = \frac{9 - 17}{2} = -4$$

$$x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y) = 27 - 3(-4).3 = 63$$

2.14. Cho $x + y = a + b$ (1) và $x^3 + y^3 = a^3 + b^3$ (2)

Chứng minh rằng : $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có hằng đẳng thức : $(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$ (1)

$$(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b) \quad (2)$$

Kết hợp với (1) và (2) suy ra $xy = ab$ (3)

Mặt khác, từ (1) suy ra $(x + y)^2 = (a + b)^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2xy = a^2 + b^2 + 2ab$

Kết hợp với (3) suy ra : $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$

2.15. Cho $a + b + c = 2p$. Chứng minh rằng:

$$a) 2bc + b^2 + c^2 - a^2 = 4p(p - a)$$

$$b) (p - a)^2 + (p - b)^2 + (p - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - p^2$$

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Ta có: $2bc + b^2 + c^2 - a^2 = (b + c)^2 - a^2$

$$= (b + c + a)(b + c - a) = 2p(2p - a) = 4p(p - a)$$

Về trái bằng về phải. Điều phải chứng minh

b) Ta có : $(p - a)^2 + (p - b)^2 + (p - c)^2$

$$= p^2 - 2ap + a^2 + p^2 - 2pb + b^2 + p^2 - 2pc + c^2$$

$$= 3p^2 - 2p(a + b + c) + a^2 + b^2 + c^2$$

$$= 3p^2 - 2p.2p + a^2 + b^2 + c^2 = a^2 + b^2 + c^2 - p^2$$

Về trái bằng về phải. Điều phải chứng minh

2.16. Cho $A = \frac{99 \dots 9}{2020 \text{ ch÷sè } 9}$. Hãy so sánh tổng các chữ số của A^2 với tổng các chữ số của A .

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có :

$$A = \underbrace{99 \dots 9}_{2020 \text{ chữ số } 9} = 10^{2020} - 1 \text{ nên } A^2 = (10^{2020} - 1)^2$$

$$= 10^{4040} - 2 \cdot 10^{2020} + 1 = \underbrace{99 \dots 98}_{2019} \underbrace{00 \dots 01}_{2019}$$

Tổng các chữ số của A^2 là : $9 \times 2019 + 8 + 1 = 18180$

Tổng các chữ số của A là : $9 \times 2020 = 18180$

Vậy tổng các chữ số của A^2 và tổng các chữ số của A bằng nhau.

2.17. Chứng minh rằng:

$$\text{Nếu } (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = (a + b - 2c)^2 + (b + c - 2a)^2 + (c + a - 2b)^2$$

thì $a = b = c$.

Hướng dẫn giải – đáp số

Từ giả thiết ta có :

$$(a + b - 2c)^2 - (a - b)^2 + (b + c - 2a)^2 - (b - c)^2 + (c + a - 2b)^2 - (c - a)^2 = 0(*)$$

Áp dụng hằng đẳng thức : $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$ ta có :

$$(a + b - 2c)^2 - (a - b)^2 = (2a - 2c)(2b - 2c) = 4(a - c)(b - c)$$

$$(b + c - 2a)^2 - (b - c)^2 = (2b - 2a)(2c - 2a) = 4(b - a)(c - a)$$

$$(c + a - 2b)^2 - (c - a)^2 = (2c - 2b)(2a - 2b) = 4(c - b)(a - b)$$

Kết hợp với (*) ta có :

$$4(a - c)(b - c) + 4(b - a)(c - a) + 4(c - b)(a - b) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a - c)(b - c) + (b - a)(c - a) + (c - b)(a - b) = 0$$

$$\Leftrightarrow ab - ac - bc + c^2 + bc - ba - ac + a^2 + ac - bc - ab + b^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac = 0$$

$$\Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ac = 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 + b^2 - 2bc + c^2 + c^2 - 2ca + a^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 0$$

$$\begin{cases} a - b = 0 \\ b - c = 0 \Leftrightarrow a = b = c \\ c - a = 0 \end{cases}$$

2.18. Cho n là số tự nhiên lớn hơn 1. Chứng minh rằng $n^4 + 4^n$ là hợp số

(Thi học sinh giỏi toán 9, tỉnh Quảng Bình, năm học 2012-2013)

Hướng dẫn giải – đáp số

- Với n là số chẵn $\Rightarrow n = 2k (k \in \mathbb{N}^+)$ thì $n^4 + 4^n = 16k^4 + 4^{2k} : 4$ nên $n^4 + 4^n$ là hợp số

- Với n là số lẻ. Đặt $n = 2k - 1 (k \in \mathbb{N}^*, k > 1)$ thì ta có:

$$\begin{aligned} n^4 + 4^n &= n^4 + 2 \cdot n^2 \cdot 2^n + 4^n - n^2 \cdot 2^{n+1} \\ &= (n^2 + 2^n)^2 - n^2 \cdot 2^{2k} = (n^2 + 2^n - 2^k \cdot n)(n^2 + 2^n + 2^k \cdot n) \end{aligned}$$

Ta có:

$$\begin{aligned} n^2 + 2^n - 2^k \cdot n &= n^2 - 2^k \cdot n + 2^{2k-2} + 2^n - 2^{2k-2} = (n - 2^{k-1})^2 + 2^{2k-1} - 2^{2k-2} \\ &= (n - 2^{k-1})^2 + 2^{2k-2} > 1 \end{aligned}$$

mà $n^2 + 2^n + 2^k \cdot n > n^2 + 2^n - 2^k \cdot n$ suy ra $n^4 + 4^n$ là hợp số

Vậy $n^4 + 4^n$ là hợp số với n là số tự nhiên lớn hơn 1.

2.19.

a) Cho $a + b = 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = a^2 + b^2$

b) Cho $x + 2y = 8$. Tìm giá trị lớn nhất của $B = xy$

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Ta có: $(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2)$

$$\Rightarrow 4 + (a - b)^2 = 2A$$

$$\Rightarrow 4 \leq 2A \Rightarrow A \geq 2$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là 2 khi $a = b = 1$

b) Từ $x + 2y = 8 \Rightarrow x = 8 - 2y$ suy ra

$$B = (8 - 2y)y = 8y - 2y^2 = 8 - 8 + 8y - 2y^2$$

$$B = 8 - 2(2 - y)^2 \leq 8$$

Vậy giá trị lớn nhất của B là 8 khi $y = 2; x = 4$

2.20. Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = 3(x^2 + y^2)$ biết $x^2 + y^2 = xy + 12$

(Tuyển sinh vào lớp 10, THPT chuyên Bình Dương, năm học 2014-2015)

Hướng dẫn giải – đáp số

Từ giả thiết, ta có $(x + y)^2 = 3xy + 12 \Leftrightarrow 6xy = 2(x + y)^2 - 24$

Ta có :

$$A = 3(x^2 + y^2) = 3(x + y)^2 - 6xy = 3(x + y)^2 - 2(x + y)^2 + 24 = (x + y)^2 + 24$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là 24 khi $x + y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \end{cases}; \begin{cases} x = -2 \\ y = 2 \end{cases}$

2.21. Cho các số nguyên a, b, c thỏa mãn: $(a - b)^3 + (b - c)^3 + (c - a)^3 = 2010$. Tính giá trị của biểu thức

$$A = |a - b| + |b - c| + |c - a|$$

Hướng dẫn giải – đáp số

Đặt $a - b = x; b - c = y; c - a = z \Rightarrow x + y + z = 0 \Rightarrow z = -(x + y)$

Ta có : $x^3 + y^3 + z^3 = 210 \Leftrightarrow x^3 + y^3 - (x + y)^3 = 210 \Leftrightarrow -3xy(x + y) = 210$

$\Leftrightarrow xyz = 70$. Do x, y, z là số nguyên có tổng bằng 0 và $xyz = 70 = (-2)(-5).7$

nên $x, y, z \in \{-2; -5; 7\} \Rightarrow A = |a - b| + |b - c| + |c - a| = 14$

2.22. Chứng minh không tồn tại hai số nguyên x, y thỏa mãn $x^2 - y^2 = 2020$

Hướng dẫn giải – đáp số

Từ $x^2 - y^2 = 2020$ suy ra x, y cùng chẵn hoặc cùng lẻ

TH1: Nếu x, y cùng chẵn. Đặt $x = 2m; y = 2n$

$$4m^2 - 4n^2 = 2018 \Rightarrow 2m^2 - 2n^2 = 1009$$

Vế trái chẵn, còn vế phải lẻ. Vô lí

TH2: Xét x, y cùng lẻ. Đặt $x = 2k + 1; y = 2q + 1$

$$\text{Ta có : } (2m + 1)^2 - (2n + 1)^2 = 2018 \Leftrightarrow 4m^2 + 4m - 4n^2 - 4n = 2018$$

Vế trái chia hết cho 4, vế phải không chia hết cho 4, vô lí

Vậy không tồn tại số nguyên x, y thỏa mãn $x^2 - y^2 = 2020$.