**CHỦ ĐỀ 2: CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ**

**LÝ THUYẾT**

### **Định nghĩa**

* Giả sử hàm số  xác định trên tập K và . Ta nói:
*  là **điểm cực tiểu** của hàm số  nếu tồn tại một khoảng  chứa  sao cho và . Khi đó  được gọi là **giá trị cực tiểu** của hàm số.
*  là **điểm cực đại** của hàm số  nếu tồn tại một khoảng  chứa  sao cho và . Khi đó  được gọi là **giá trị cực đại** của hàm số.
* Điểm cực đại và điểm cực tiểu gọi chung là **điểm cực trị**.
* Giá trị cực đại và giá trị cực tiểu gọi chung là **cực trị**.
* Điểm cực đại và điểm cực tiểu được gọi chung là **điểm cực trị của hàm số** và điểm cực trị phải là một điểm trong tập hợp K.
* Giá trị cực đại và giá trị cực tiểu được gọi chung là **giá trị** **cực trị (hay cực trị)** củahàmsố.
* Nếu  là điểm cực trị của hàm số thì điểm  được gọi là **điểm cực trị của đồ thị** hàm số .

### **Quy tắc tìm cực trị**

* **Quy tắc 1:**
* **Bước 1:** Tìm tập xác định. Tìm 
* **Bước 2:** Tìm các điểm   mà tại đó đạo hàm của hàm số bằng 0 hoặc hàm số liên tục nhưng không có đạo hàm.
* **Bước 3:** Lập bảng biến thiên hoặc bảng xét dấu . Nếu đổi dấu khi đi qua  thì hàm số đạt cực trị tại .
* **Định lý**
* Giả sử  có đạo hàm cấp 2 trong khoảng  với  Khi đó:
* Nếu  thì hàm số  đạt cực đại tại 
* Nếu  thì hàm số  đạt cực tiểu tại 

Từ định lí trên, ta có một quy tắc khác để tìm cực trị của hàm số

* **Quy tắc 2:**
* **Bước 1:** Tìm tập xác định. Tìm 
* **Bước 2:** Tìm các nghiệm   của phương trình 
* **Bước 3:** Tính  và tính 

Nếu  thì hàm số  đạt cực đại tại điểm 

Nếu  thì hàm số  đạt cực tiểu tại điểm 

**VÍ DỤ MINH HỌA**

**Lời giải**

**VÍ DỤ 1.** Hàm sốđạt cực tiểu tại điểm

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Chọn B**

Ta có hàm sốcó tập xác định .

;  .

; ; .

Suy ra hàm số đạt cực tiểu tại điểm .

**VÍ DỤ 2.** Cho hàm số . Gọi  là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số  để hàm số không có cực trị. Số phần tử của  là

**A.** 2. **B.** 4. **C.** 0. **D.** Vô số.

**Lời giải**

**Chọn B**

Xét hàm số  (1).

Ta có:  (2)

Hàm số đã cho không có cực trị

 Phương trình  vô nghiệm hoặc có nghiệm kép

.

Do  là số nguyên nên . Vậy tập  có 4 phần tử.

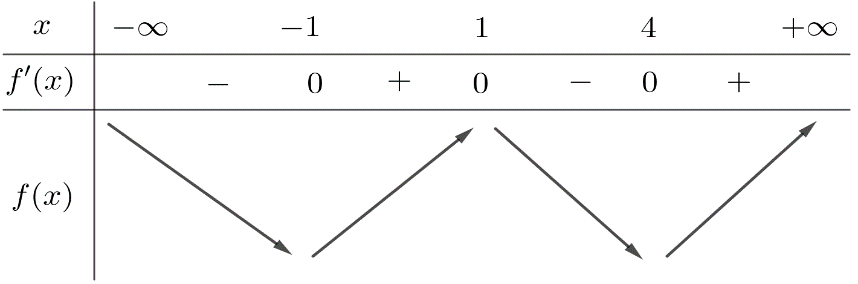
**VÍ DỤ 3.** Cho hàm số  có đạo hàm  với mọi . Hàm số  có bao nhiêu điểm cực đại?

**A.** 0. **B.** 1**. C.** 2. **D.** 3.

**Lời giải**

**Chọn B**

Từ giả thiết, ta có bảng biến thiên của hàm số 

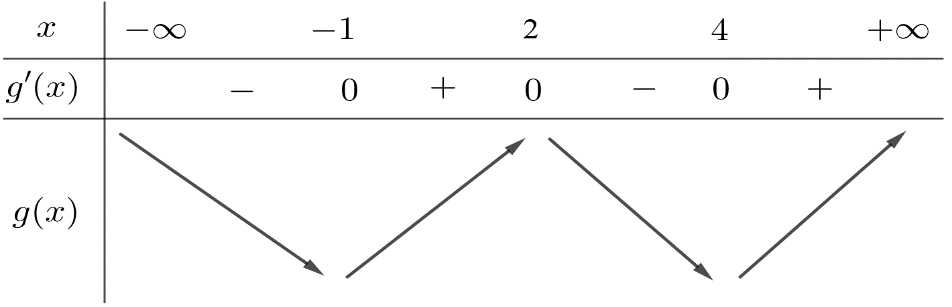


Ta có .

Từ bảng biến thiên của hàm số ta có

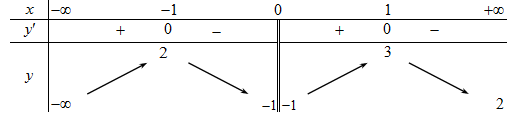
.

Như thế ta có bảng biến thiên của hàm số 



Từ bảng biến thiên, ta nhận thấy hàm số  có một điểm cực đại.

**VÍ DỤ 4.** Cho hàm số  có bảng biến thiên như sau



Số điểm cực trị của hàm số  là

**A.** . **B.** **. C.** . **D.** .

**Lời giải**

**Chọn B**

Gọi đồ thị của hàm số  là .

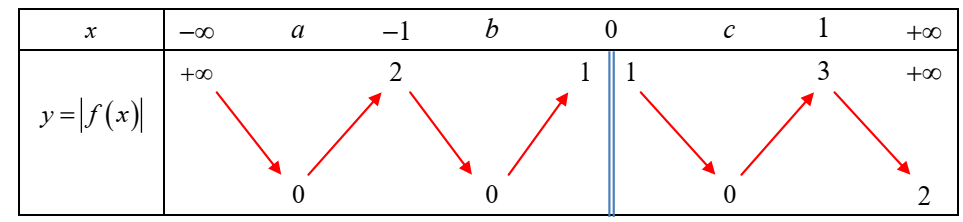
Đặt  và gọi  là đồ thị của hàm số . Đồ thị  được suy ra từ đồ thị  như sau:

Giữ nguyên phần đồ thị của  phía trên  ta được phần I.

Với phần đồ thị của  phía dưới  ta lấy đối xứng qua , ta được phần II.

Hợp của phần I và phần II ta được .

Từ cách suy ra đồ thị của  từ , kết hợp với bảng biến thiên của hàm số ta có bảng biến thiên của hàm số  như sau:



Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số  có 5 điểm cực trị.

**VÍ DỤ 5.** Cho hàm số . Có bao nhiêu giá trị của tham số để hàm số đạt cực tiểu tại ?

**A.**Vô số . **B.**1 . **C.**2 . **D.**0 .

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có .

Dễ thấy  là một nghiệm của đạo hàm . Do đó hàm số đạt cực tiểu tại  khi và chỉ khi đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua nghiệm . Ta thấy dấu của  là dấu của hàm số . Hàm số  đổi dấu khi đi qua giá trị khi là nghiệm của . Khi đó .

Thử lại, với  thì  đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua giá trị .

Vậy có 1 giá trị  thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**VÍ DỤ 6.** Tìm tất cả các giá trị của  để đường thẳng đi qua điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số  cắt đường tròn tâm , bán kính  tại hai điểm phân biệt  sao cho diện tích tam giác  đạt giá trị lớn nhất?

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Lời giải**

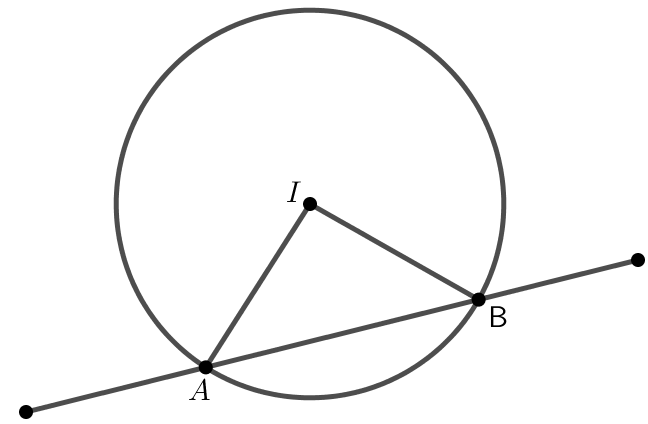
**Chọn B**

Ta có . Hàm số có 2 điểm cực trị

 phương trình có hai nghiệm phân biệt  

Ta có: .

Suy ra phương trình đường thẳng  đi qua hai điểm cực đại và cực tiểu là 



Đường thẳng  cắt đường tròn tâm , bán kính  tại hai điểm phân biệt 

  luôn đúng do 

Ta có . Dấu bằng xảy ra  .

Khi đó tam giác  vuông cân tại  có  nên

  thỏa mãn đk 

Vậy diện tích tam giác  đạt giá trị lớn nhất khi .

**VÍ DỤ 7.** Tìm tất cả giá trị của tham số  để hàm số  có ba điểm cực trị.

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có: ; 



Để hàm số có ba điểm cực trị ⇔ phương trình  có ba nghiệm phân biệt

⇔ phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác ⇔ .

**VÍ DỤ 8.** Cho hàm số  có đạo hàm .Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số  để hàm số  có đúng 5 điểm cực trị ?

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Lời giải.**

**Chọn B**

Ta có : , trong đó  là nghiệm kép.

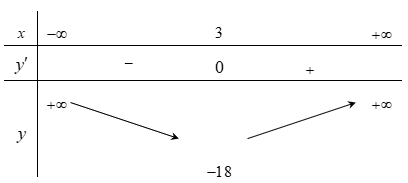


Xét  (\*)



*( Điểm cực trị của hàm số*  *là nghiệm bội lẻ của phương trình (\*) nên ta loại phương trình*  *).* Xét hàm số  có đồ thị (C) có 

Ta có bảng biến thiên



Để  có đúng 5 điểm cực trị thì mỗi phương trình  đều có hai nghiệm phân biệt 

Do đó, mỗi đường thẳng  và  phải cắt đồ thị (C) tại 2 điểm phân biệt có hoành độ khác 3. Nhận xét: đường thẳng  luôn nằm trên đường thẳng  .

Ta có:  . Vậy có  giá trị  nguyên dương .

**VÍ DỤ 9.** Cho hàm số  với . Tập hợp tất cả các giá trị của để hàm số  có 5 cực trị là khoảng . Tích  bằng

**A.** 12. **B.** 16. **C.** 10. **D.** 14.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có .

Vì  là hàm chẵn , nên đồ thị hàm đối xứng qua trục . Do đó, khi hàm có hai cực trị dương thì hàm sẽ có thêm hai cực trị đối xứng qua trục và một cực trị còn lại chính là giao điểm của đồ thị hàm và trục .

Yêu cầu bài toán tương đương vớiphương trình có 2 nghiệm dương phân biệt.

Điều kiện tương đương là

. Vậy ,  và .