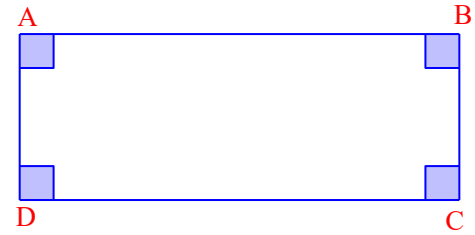


ÔN TẬP HÌNH CHỮ NHẬT

A. Tóm tắt lý thuyết

1. Định nghĩa: Hình chữ nhật là tứ giác có bốn góc vuông

$$\diamond ABCD \text{ là hình chữ nhật} \Leftrightarrow \begin{cases} \diamond ABCD \\ \hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} \end{cases}$$



- Nhận xét: Hình chữ nhật cũng là 1 hình bình hành, 1 hình thang cân

2. Tính chất: Hình chữ nhật có tất cả các tính chất của hình bình hành và hình thang cân

- Tính chất về cạnh: Các cạnh đối bằng nhau, song song với nhau

- Tính chất về góc: Bốn góc bằng nhau

- Tính chất về đường chéo: Hai đường chéo bằng nhau và cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường

3. Dấu hiệu nhận biết

- Tứ giác có ba góc vuông là hình chữ nhật

- Hình thang cân có 1 góc vuông là hình chữ nhật

- Hình bình hành có 1 góc vuông là hình chữ nhật

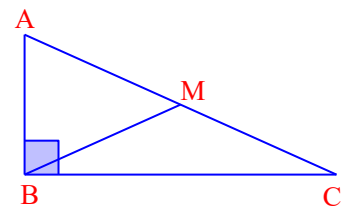
- Hình bình hành có hai đường chéo bằng nhau là hình chữ nhật

4. Ứng dụng vào tam giác vuông

- Trong tam giác vuông, đường trung tuyến ứng với cạnh huyền bằng nửa cạnh huyền, ta có: $BM = \frac{1}{2}AC$

- Nếu một tam giác có đường trung tuyến ứng với 1 cạnh bằng nửa cạnh ấy thì tam giác đó là tam giác vuông

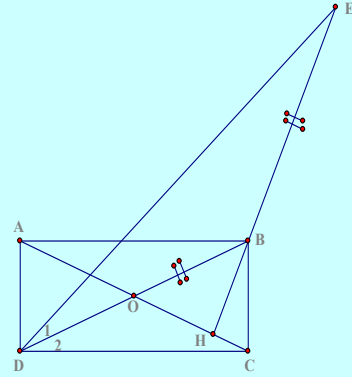
Nếu $BM = \frac{1}{2}AC \Rightarrow \triangle ABC$ vuông



B. Bài tập

Bài 1:

Cho hình chữ nhật $ABCD$. Gọi H là hình chiếu của B lên AC . Trên tia đối của tia BM lấy điểm E sao cho $BE = AC$. Chứng minh rằng $\angle ADE = 45^\circ$



Lời giải

+) Ta có $ABCD$ là hình chữ nhật $\Rightarrow AC = BD = BE \Rightarrow \triangle BED$

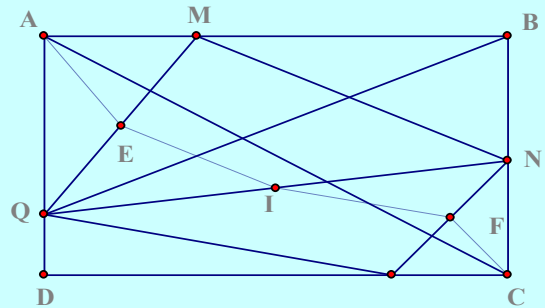
Cân tại $B \Rightarrow D_1 = E$

Mặt khác $OC = OD \Rightarrow \angle OCD = \angle ODC$

+) $\angle ADE = \angle EDB + \angle BDC = \frac{1}{2} \angle OBH + \frac{1}{2} \angle BOH$ (góc ngoài tam giác) $= \frac{1}{2} \cdot 90^\circ = 45^\circ$

Bài 2:

Cho hình chữ nhật $ABCD$. Trên các đoạn AB, BC, CD, DA lần lượt lấy các điểm M, N, P, Q . Chứng minh rằng:
 $MN + NP + PQ + QM \geq 2AC$



Lời giải

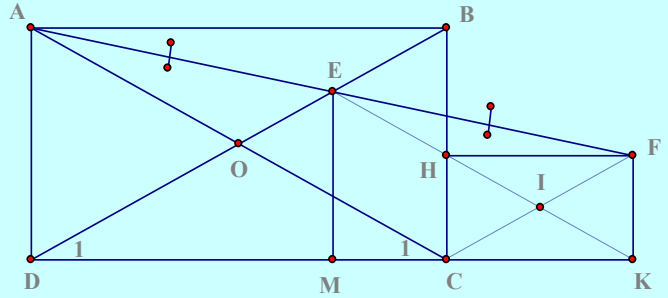
Gọi E, F, I lần lượt là trung điểm của MQ, NP, QN

Vì $\triangle AQN, \triangle CPN$ là các tam giác vuông

$$\left. \begin{array}{l} MQ = 2AE; NP = 2CF \\ IE = \frac{1}{2}MN; FI = \frac{1}{2}PQ \end{array} \right\} \Rightarrow VT = 2(AE + EI + FI + FC) \geq 2AC$$

Bài 3:

Cho hình chữ nhật $ABCD$ và điểm E thuộc đoạn BD , gọi F là điểm đối xứng với A qua E . Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của F lên BC, CD . Chứng minh rằng E, H, K thẳng hàng



Lời giải

Ta có $HKCF$ là hình chữ nhật

$\Rightarrow HK, FC$ cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường

$\Rightarrow EI$ là đường trung bình $\triangle CFA \Rightarrow EI \parallel AC$ (1)

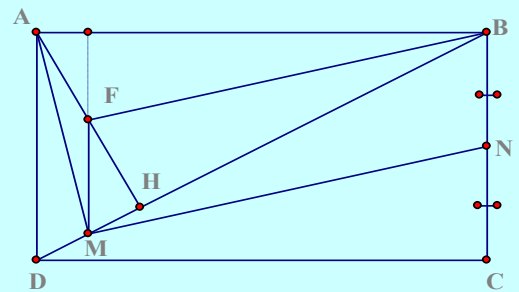
+) Gọi M là trung điểm của DK nên EM là đường trung bình hình thang $ADKF$

$\Rightarrow EM \parallel FK \Rightarrow EM \perp CD \Rightarrow \triangle DEK$ cân tại $E \Rightarrow D_1 = K_1 = C_1 \Rightarrow EK \parallel AC$ (2)

Từ (1)(2) $\Rightarrow \begin{cases} E, I, K : \text{thang hàng} \\ H \in IK \end{cases} \Rightarrow E, H, K \text{ thẳng hàng}$

Bài 4:

Cho hình chữ nhật $ABCD$. Gọi H là hình chiếu của A lên B , gọi M, N lần lượt là trung điểm của HD, BC . CMR: $AM \perp MN$



Lời giải

Gọi E là trung điểm của AH nên ME là đường trung bình của

$$\triangle AHD \Rightarrow ME \parallel AD; ME = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}BC = BN \Rightarrow \diamond BEMN$$

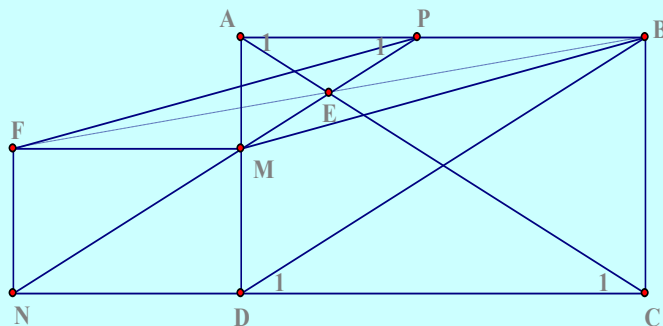
Là hình bình hành $\Rightarrow BE \parallel MN$ (1)

$$+) \begin{cases} ME \parallel AD \\ AD \perp AB \end{cases} \Rightarrow ME \perp AB$$

$\triangle AMB$ có E là trực tâm $\Rightarrow BE \perp AM(2) \Rightarrow AM \perp MN$ (dpcm)

Bài 5:

Cho hình chữ nhật $ABCD$. Qua điểm E thuộc đoạn AC kẻ đường thẳng song song với BD nó cắt AD, CD ở M và N . Dựng hình chữ nhật $NDMF$. Chứng minh E là trung điểm của BF



Lời giải

$+) A_1 = P_1 = B_1 = D_1 = C_1 \Rightarrow \triangle AEP$ cân tại $E \Rightarrow AE = EP$

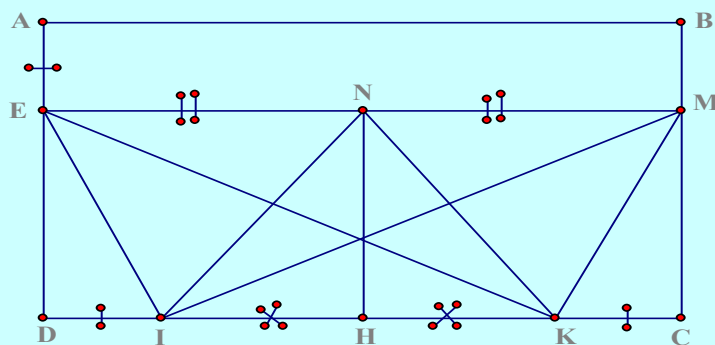
$+) \text{ Tương tự: } AE = EM \Rightarrow EM = MP$

$+) BPND$ là hình bình hành

$$\Rightarrow \begin{cases} ND = PB \\ ND = FM \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} PBMF : \text{hình bình hành} \\ EM = MP \end{cases} \Rightarrow \dots$$

Bài 6:

Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB > AD$. Lấy điểm E thuộc đoạn AD , các điểm I, K thuộc đoạn CD sao cho $DI = CK = AE$. Đường thẳng qua K và vuông góc với EK cắt đoạn BC tại M . Chứng minh rằng: $IM \perp IE$



Lời giải

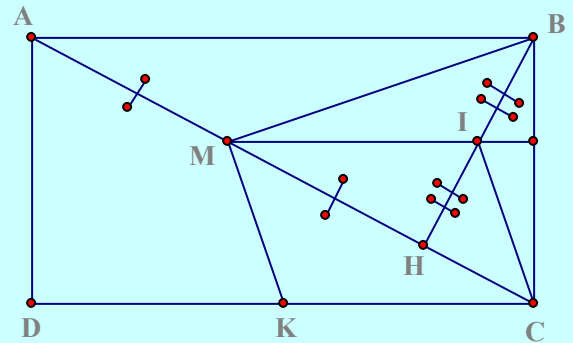
+) Gọi N, H là trung điểm của $EM, CD \Rightarrow NH$ là đường trung bình hình thang $EDCM$
 $\Rightarrow NH \perp CD$

$$\left. \begin{array}{l} HD = HC \\ +) DI + IH = HK + KC \\ DI = KC \end{array} \right\} \Rightarrow HI = HK \rightarrow \Delta NIK \text{ cân tại } N \Rightarrow \begin{cases} NI = NK \\ NK = \frac{1}{2} EM \end{cases} \Rightarrow NK = \frac{1}{2} NM \Rightarrow NI = \frac{1}{2} NM$$

$\Rightarrow \Delta EIM$ vuông tại $I \Rightarrow EI \perp MI$

Bài 7:

Cho hình chữ nhật $ABCD$, kẻ $BH \perp AC$, gọi M là trung điểm của AH, K là trung điểm của CD . Chứng minh rằng $BM \perp MK$



Lời giải

Qua M kẻ đường thẳng vuông góc với BC , cắt BH tại I

Ta có: $MI \parallel AB \parallel CD$

M là trung điểm của AH nên MI là đường trung bình của

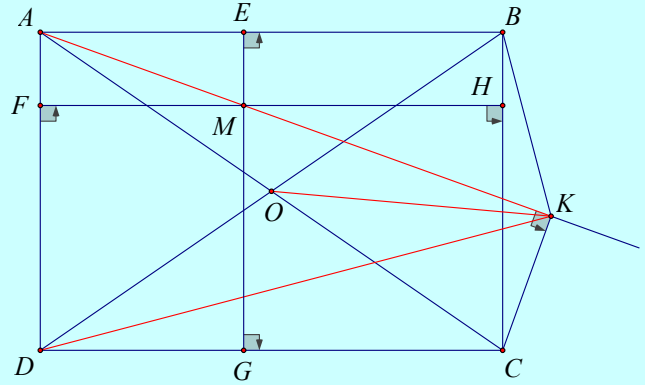
$$\Delta ABH \Rightarrow \begin{cases} MI = \frac{1}{2} AB \\ IH = IB \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} MI \parallel CK \\ MI = CK = \frac{1}{2} CD \end{cases} \Rightarrow \diamond MICK \text{ là hình bình hành} \Rightarrow MK \parallel CI \quad (1)$$

Trong ΔMBC có I là trực tâm $\Rightarrow CI \perp MB(2) \Rightarrow BM \perp MK \Rightarrow dpcm$

Bài 8:

Cho hình chữ nhật $ABCD$, M là điểm bất kỳ nằm trong hình chữ nhật, vẽ $ME \perp AB$ tại E , $MF \perp AD$ tại F , $CK \perp AM$ tại K . Chứng minh rằng:

- $ME^2 + MF^2 = MA^2$
- $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$
- $BKD = 90^\circ$



Lời giải

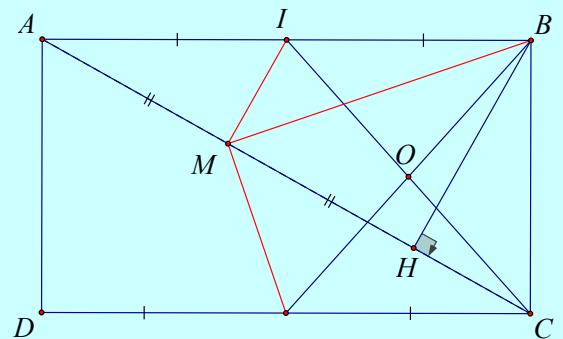
- Tứ giác $AEMF$ là hình chữ nhật $\Rightarrow MA = EF \Rightarrow ME^2 + MF^2 = EF^2 = AM^2$
- Gọi G là giao điểm của EM và CD , H là giao điểm của F và BC
 $\Rightarrow$ Tứ giác $DFMG, GMHC, EBHM$ là hình chữ nhật,
 Do vậy $MC^2 = MH^2 + MG^2$; $MB^2 = ME^2 + MH^2$; $MD^2 = MG^2 + MF^2 \Rightarrow$ đpcm
- Gọi O là giao của 2 đường chéo AC và BD

$$\Rightarrow KO = \frac{AC}{2} = \frac{BD}{2} \Rightarrow BK \perp DK \Rightarrow BKD = 90^\circ$$

Bài 9:

Cho H là hình chiếu của B trên đường chéo AC của hình chữ nhật $ABCD$, M và K theo thứ tự là trung điểm của AH và CD

- Gọi I và O theo thứ tự là trung điểm của AB và IC . Chứng minh rằng $MO = \frac{1}{2}IC$
- Tính số đo BMK ?



Lời giải

Ta có: $BIKC$ là hình chữ nhật nên O là trung điểm của IC và BK

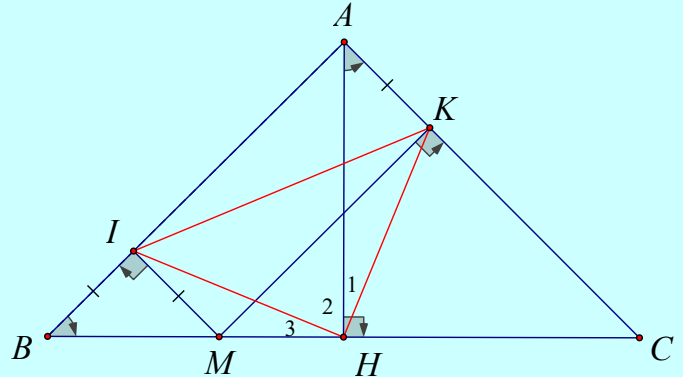
Xét $\triangle IMC$ vuông, Ta có $OM = \frac{1}{2}IC$

b) ΔMBK có $MD = \frac{1}{2}IC = \frac{1}{2}BK \Rightarrow BMK = 90^\circ$

ΔMBK có $MD = \frac{1}{2}IC = \frac{1}{2}BK \Rightarrow BMK = 90^\circ$

Bài 10:

Cho ΔABC vuông cân tại A có AH là đường cao, Gọi M là 1 điểm bất kỳ trên cạnh BC , I và K là hình chiếu vuông góc của M trên AB, AC . Chứng minh rằng ΔIHK vuông cân.



Lời giải

Chứng minh $AIMK$ là hình chữ nhật

Vì ΔABC vuông cân tại $A \Rightarrow AK = IM = BI$

Mà $BH = HA \Rightarrow HBI = HAK = 45^\circ$

$\Rightarrow \Delta BHI = \Delta AHK$ (cgc) $\Rightarrow IH = HK$

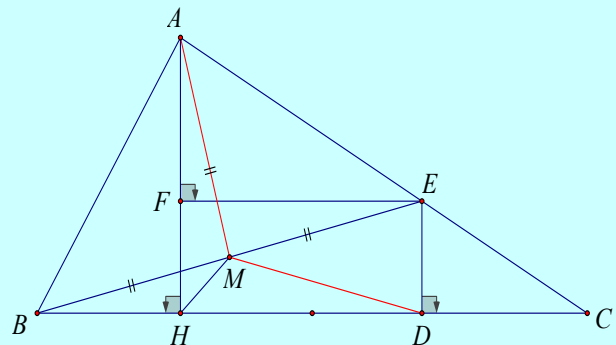
Mà $H_3 + H_2 = 90^\circ \Rightarrow H_1 + H_2 = 90^\circ$

Bài 11:

Cho ΔABC vuông tại A ($AC > AB$), đường cao AH , trên HC lấy $HD = HA$, đường $\perp$ BC tại D cắt AC tại E

a) Chứng minh rằng $AE = AB$

b) M là trung điểm của BE , Tính $\angle AHM$



Lời giải

a) Chứng minh $AE = AB$

Kẻ $EF \perp AH \Rightarrow \diamond HDEF$ là hình chữ nhật

$\Rightarrow \Delta HBA = \Delta FAE (g.c.g) \Rightarrow AB = AE$

b) ΔABE vuông cân tại $A \Rightarrow AM = \frac{BE}{2}$

ΔBDE vuông cân tại $D \Rightarrow MD = \frac{BE}{2}$

Từ đó ta có: $AM = MD$

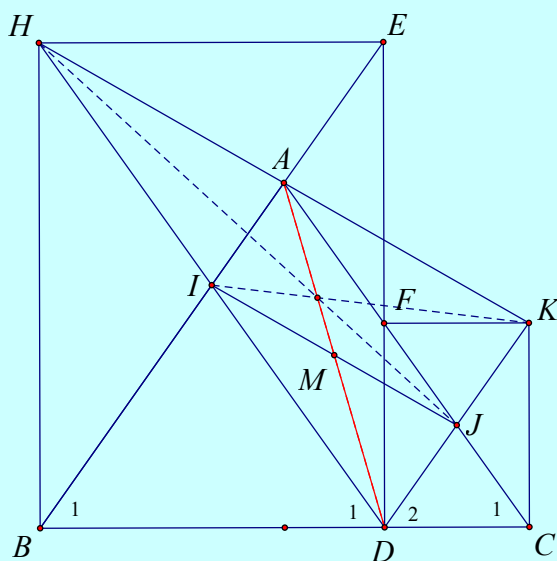
Xét $\Delta AHM = \Delta DHM (c.g.c) \Rightarrow H_1 = H_2 = 45^\circ$

Bài 12:

Cho ΔABC cân tại A , từ 1 điểm D bất kỳ trên đáy BC , vẽ đường thẳng vuông góc với BC cắt các đường thẳng AB, AC ở E và F , Vẽ các hình chữ nhật $BDEH, CDFK$. Gọi I, J lần lượt là tâm các hình chữ nhật $BDEH$ và $CDFK$, M là trung điểm của AD

a) CMR: Trung điểm HK là 1 điểm có định không phụ thuộc vào vị trí của D trên BC

b) CMR: 3 điểm I, J, M thẳng hàng và 3 đường thẳng AD, HJ, KI đồng quy



Lời giải

a) Ta có: $B_1 = D_1$ mà $B_1 = C_1 \Rightarrow D_1 = C_1 \Rightarrow ID \parallel AC$

Chứng minh tương tự ta có: $JD \parallel AB$

Khi đó $AIDJ$ là hình bình hành $\Rightarrow AJ \parallel ID, AJ = ID$

$\Rightarrow$ Chứng minh $AHIJ$ là hình bình hành

$\Rightarrow IJ \parallel AH; IJ = AH; IJ \parallel AK; IJ = AK$

Khi đó 3 điểm A, H, K thẳng hàng và A là trung điểm của HK

b) Tứ giác $AIDJ$ là hình bình hành

$\Rightarrow M$ là trung điểm của AD thì M nằm trên đường chéo của hình bình hành.

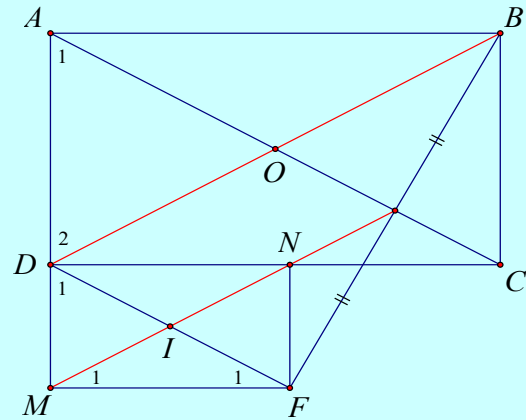
Bài 13:

Cho hình chữ nhật $ABCD$ và E là điểm nằm trên đường chéo AC , trên tia đối của tia EB lấy F sao cho $EF = BE$, Gọi M, N là hình chiếu của F trên 2 đường thẳng AD, DC .

Chứng minh rằng

a) $DF \parallel AC; MN \parallel BD$

b) 3 điểm E, M, N thẳng hàng



Lời giải

a) Dễ thấy OE là đường trung bình của $\triangle BDF \Rightarrow DF \parallel OE \Rightarrow DF \parallel AC$

$\Rightarrow \angle A_1 = \angle D_1$ (Đồng vị) $\Rightarrow \triangle OAD$ cân $\Rightarrow \angle A_1 = \angle D_2 = \angle D_1$

$\Rightarrow \triangle IDM$ cân $\Rightarrow \angle D_1 = \angle M_1$

$\Rightarrow \angle D_2 = \angle M_1$ (đồng vị) $\Rightarrow MN \parallel BD$

b) I là trung điểm $DF \Rightarrow IE$ là trung bình $\Rightarrow IE \parallel BD$ mà $MN \parallel BD$

Vậy M, N, E thẳng hàng

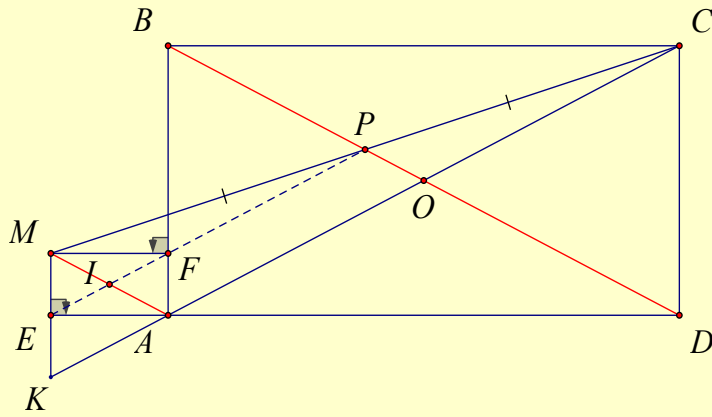
Bài 14:

Cho hình chữ nhật $ABCD$, điểm P thuộc đường chéo BD (P khác B và D), Gọi M là điểm đối xứng của C qua P

a) Chứng minh AM song song với BD

b) Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của M trên AD và AB . Chứng minh ba điểm E, F, P thẳng hàng

c) Chứng minh tỉ số độ dài hai đoạn thẳng MF và FA không phụ thuộc vào vị trí của P



Lời giải

a) Ta có: O là trung điểm của AC ($ABCD$ là hình chữ nhật)

P là trung điểm của CM (Vì M đối xứng với C qua P)

Nên OP là đường trung bình của $\triangle ACM$, do đó $OP \parallel AM \Rightarrow AM \parallel BD$

b) Vì OP là đường trung bình của $\triangle ACM$ nên $OP \parallel AM$ và $OP = \frac{1}{2} AM$

Do đó $OP \parallel AI; OP = AI \Rightarrow$ tứ giác $AIPO$ là hình bình hành $\Rightarrow PI \parallel AC$ (1)

Kẻ $ME \parallel AB$ cắt AC tại K , ta có $KAE = EAM (= KDA)$

Nên AE là phân giác KAM , mặt khác $AE \perp KM \Rightarrow \triangle AKM$ cân

E là trung điểm của KM , do đó EI là đường trung bình của $\triangle AMK \Rightarrow EI \parallel OA \Rightarrow EI \parallel AC$ (2)

Ta lại có E, I, F thẳng hàng (3)

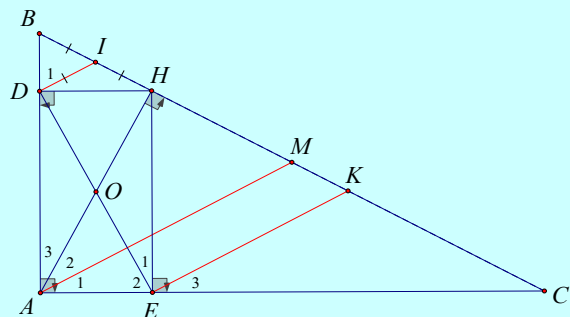
Từ (1), (2) và (3) ta có E, F, P thẳng hàng.

Bài 15:

Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH , trung tuyến AM , Gọi D và E theo thứ tự là chân đường vuông góc kẻ từ H đến AB, AC , . Chứng minh rằng

a) $AH = DE$

b) $HAB = MAC$



c) $AM \perp DE$

d, $DI // EK$, với I là trung điểm của HB, K ,
là trung điểm của HC .

Lời giải

a) Tứ giác $ADHE$ có 3 góc vuông nên là hình chữ nhật $\Rightarrow AH = DE$

b) $\triangle ABC$ vuông tại A , Có AM là đường trung tuyến $\Rightarrow AM = MB = MC$

$\Rightarrow \triangle ACM$ cân tại $M \Rightarrow MAC = C$

Mặt khác $HAB = C$ Vì cùng phụ với $HAC \Rightarrow HAB = MAC (= C)$

c) Chứng minh $AM \perp DE$, ta có $A_1 + E_2 = 90^\circ$,

Ta có: $E_2 + A_1 = E_2 + A_3 = E_2 + E_1 = 90^\circ$

d) Ta có $\triangle HEC$ có $EK = HK = CK \Rightarrow \triangle EKC$ cân tại $K \Rightarrow E_3 = C = A_1$

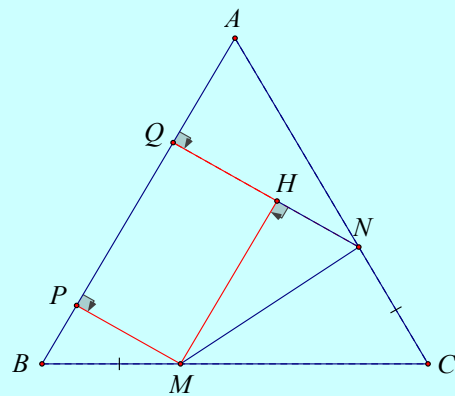
$\Rightarrow EK // AM \Rightarrow KE \perp DE$. Chứng minh tương tự $\Rightarrow DI \perp DE \Rightarrow DI // EK$

Bài 16:

Cho $\triangle ABC$ đều có cạnh bằng 4cm, M và N
là các điểm lần lượt chuyển động trên hai
cạnh BC và AC sao cho $BM = CN$

a) Tính diện tích $\triangle ABC$

b) Xác định vị trí của M và N để độ dài
 MN nhỏ nhất. Tìm độ dài nhỏ nhất đó?



Lời giải

a) Tính được độ dài đường cao: $h = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} (cm)$

Suy ra diện tích: $S_{ABC} = \frac{1}{2} a.h = \frac{1}{2} 4.2\sqrt{3} = 4\sqrt{3} (cm^2)$

b) Gọi P và Q là chân đường vuông góc kẻ từ M và N xuống AB

Ta có: $\triangle ANQ$ vuông ở Q , có $A = 60^\circ \Rightarrow AQ = \frac{1}{2} AN$

Tương tự đối với $\triangle MPB$ có $PB = \frac{1}{2}BM$

Cộng theo vế ta được: $AQ + PB = \frac{1}{2}AN + \frac{1}{2}BM = \frac{1}{2}(AN + NC) = \frac{1}{2}AC$

Kẻ $MH \perp QN$. Tứ giác $MPQH$ là hình chữ nhật

Ta có: $MN \geq MH = PQ = AB - (AQ + BP) = AB - \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}AB$

Như vậy khi M, N di chuyển ta luôn có: $MN \geq \frac{1}{2}AB$

Và $MN = \frac{1}{2}AB$, Khi M, N lần lượt là trung điểm của BC và AC

Suy ra vị trí của M, N cần xác định lần lượt là trung điểm BC và AC

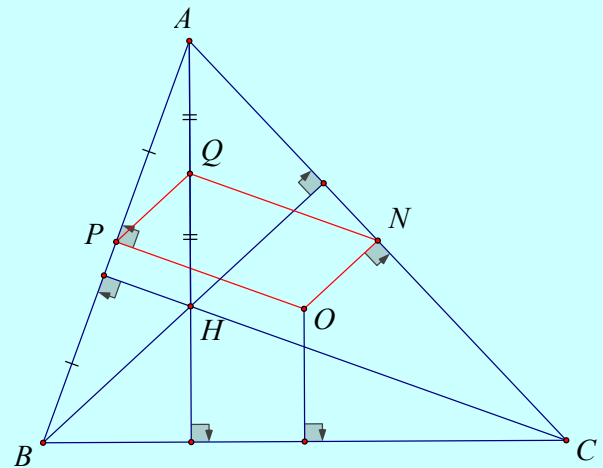
Khi đó độ dài nhỏ nhất của MN là: $MN = \frac{1}{2}AB = 2cm$

Bài 17:

Cho $\triangle ABC$ nhọn, trực tâm H , giao điểm của các đường trung trực là O , Gọi P, Q, N theo thứ tự là trung điểm của các đoạn thẳng AB, AH, AC

a) Chứng minh $OPQN$ là hình bình hành

b) $\triangle ABC$ cần có điều kiện gì để $OPQN$ là hình chữ nhật



Lời giải

a) Gọi O là giao của 3 đường trung trực nên $OP \perp AB, ON \perp AC$

Trong $\triangle AHC$, QN là đường trung bình nên $QN \parallel CH$

Và $PO \parallel CH$ (cùng vuông góc với AB)

Chứng minh tương tự ta có $OPQN$ là hình bình hành

b) Tứ giác $BCQN$ là hình chữ nhật có 2 đường chéo là NC và $BQ \Rightarrow NC = BQ$

$$\Rightarrow MP = \frac{1}{2} NC = \frac{1}{2} BQ$$

Xét $\triangle MQB$ có MP là đường trung tuyến nên $MP = \frac{1}{2} BQ$

Nên $\triangle MBQ$ vuông tại $M \Rightarrow MB \perp MQ$.