SÔÛ GIAÙO DUÏC ÑAØO TAÏO BÌNH PHÖÔÙC

TRÖÔØNG THPT ÑOÀNG XOAØI

SAÙNG KIEÁN KINH NGHIEÄM MOÂN TOAÙN

ÑEÀ TAØI: CAÙC PHÖÔNG PHAÙP TÌM GIAÙ TRÒ LÔÙN NHAÁT –GIAÙ TRÒ NHOÛ NHAÁT CUÛA HAØM SOÁ

A/ PHAÀN MÔÛ ÑAÀU

I/ LYÙ DO CHOÏN ÑEÀ TAØI: *GV : TRAÀC THÒ HUYØNH LIEÂN*

NAÊM HOÏC 2006 -

Trong quaù trình giaûng daïy cho caùc em hoïc sinh nhaát laø hoïc sinh lôùp 12, khi daïy baøi “GIAÙ TRÒ LÔÙN NHAÁT – GIAÙ TRÒ NHOÛ NHAÁT” caùc em thöôøng ñaët vaán ñeà laø:“Coù bao nhieâu caùch tìm GTLN-GTNN cuûa moät haøm soá hay moät bieåu thöùc”. Thöïc teá vaán ñeà GTLN-GTNN caùc em ñaõ baét ñaàu hoïc töø chöông trình lôùp 8, lôùp 9 vaø trong chöông trình ôû baäc THPT.

Caùc baøi toaùn tìm GTLN-GTNN raát phong phuù vaø ña daïng, noù mang moät noäi dung voâ cuøng saâu saéc trong vieäc giaùo duïc tö töôûng qua moân toaùn: ñi tìm caùi toát nhaát, reû nhaát, ngaén nhaát, daøi nhaát … trong moät baøi toaùn, ñeå daàn hình thaønh cho hoïc sinh moät thoùi quen ñi tìm moät giaûi phaùp toái öu cho moät coâng vieäc naøo ñoù cho cuoäc soáng sau naøy .

II/TÍNH CAÁP THIEÁT KHI CHOÏN ÑEÀ TAØI:

Caùc baøi toaùn tìm GTLN-GTNN coù moät vò trí xöùng ñaùng trong chöông trình hoïc vaø daïy ôû caùc tröôøng phoå thoâng. Caùc baøi toaùn naøy ñoøi hoûi vaän duïng nhieàu kieán thöùc vaø vaän duïng moät caùch hôïp lyù, nhieàu khi khaù ñoäc ñaùo. Do ñoù caùc em hoïc sinh thöôøng gaëp nhieàu khoù khaên trong vieäc ñi tìm lôøi giaûi, caùc em khoâng bieát baét ñaàu töø ñaâu, vaän duïng kieán thöùc naøo trong chöông trình ñaõ hoïc ? Maët khaùc trong caùc ñeà thi toát nghieäp THPT, ñeà thi Ñaïi Hoïc vaø ñeà thi HSG thì baøi toaùn tìm GTLN-GTNN raát thöôøng xuyeân xuaát hieän, thí sinh khi laøm caùc baøi thi naøy thöôøng raát luùng tuùng trong vieäc tìm lôøi giaûi .

Ñeå giuùp caùc em bôùt gaëp khoù khaên cuõng nhö coù caùch nhìn chung veà vaán ñeà tìm GTLN-GTNN, baøi vieát sau ñaây nhaèm muïc ñích heä thoáng laïi caùc phöông phaùp tìm GTLN-GTNN cuûa moät haøm soá hay moät bieåu thöùc.

Taùc giaû raát mong nhaän ñöôïc yù kieán ñoùng goùp chaân thaønh cuûa quí thaày coâ cuøng ñoàng nghieäp ñeå baøi vieát ñöôïc toång quaùt hôn, hay hôn.

Ñoàng Xoaøi, ngaøy 28

thaùng 3 naêm 2007

Giaùo vieân

TRAÀC

B/ PHAÀN NOÄI DUNG

I/ PHÖÔNG PHAÙP NGHIEÂN CÖÙU

Baøi toaùn tìm GTLN_GTNN coù raát nhieàu phöông phaùp giaûi, töø nhöõng caùch giaûi ñôn giaûn , deã hieåu , quen thuoäc vôùi caùc em hoïc sinh phoå thoâng maø moïi hoïc sinh hoïc löïc trung bình yeáu vaãn coù theå naém baét ñöôïc , cho ñeán nhöõng phöông phaùp giaûi phöùc taïp hôn , ñoøi hoûi phaûi coù söï suy luaän , logic chaët cheõ daønh cho caùc em hoïc sinh gioûi .Trong phöông phaùp ñoà thò vaø phöông phaùp vectô ñoâi khi ñoøi hoûi hoïc sinh phaûi naém baét ñöôïc daáu hieäu hình hoïc hay vectô aån tìm trong töøng con soá, töøng chöõ cuûa baøi toaùn .Muoán phaùt hieän ra chuùng thì ngöôøi giaûi toaùn phaûi hieåu moät caùch khaù saâu saéc khaùi nieäm vaø tính chaát cuûa hình hoïc vaø vectô cuøng caùc pheùp toaùn cuûa noù, phaûi ñöôïc reøn luyeän nhieàu baøi taäp môùi coù theå laøm quen ñöôïc .

Ñeà taøi naøy toâi ñaõ thöïc hieän töø naêm 1996 cho ñeán nay , trong chöông trình lôùp 12, trong lôùp luyeän thi Ñaïi Hoïc vaø trong lôùp boài döôõng HSG Toaùn cuûa tröôøng THPT Ñoàng Xoaøi

II/ NOÄI DUNG NGHIEÂN CÖÙU VAØ KEÁT QUAÛ NGHIEÂN CÖÙU:

Noäi dung1/OÂn laïi caùc ñònh nghóa veà GTLN-GTNN vaø boå sung caùc tính chaát veà GTLN-GTNN ñeå hoïc sinh khaù,gioûi tham khaûo.

Noäi dung 2/ Heä thoáng laïi caùc phöông phaùp tìm GTLN-GTNN ôû caùc caáp hoïc .

Noäi dung 3/ Neâu moät soá ñeà toaùn tìm GTLN-GTNN trong caùc kyø thi ñeå hoïc sinh tham khaûo.

Noäi dung 4/ Keát quaû nghieân cöùu.

III/ PHAÀN KEÁT LUAÄN

IV/ TAØI LIEÄU THAM KHAÛO

NOÄI DUNG I : ÑÒNH NGHÓA VAØ TÍNH CHAÁT CUÛA GTLN-GTNN

1/ ÑÒNH NGHÓA:

a/ GIAÙ TRÒ LÔÙN NHAÁT:

Cho haøm soá f(x) coù mieàn xaùc ñònh D.Ta noùi M laø giaù trò lôùn nhaát cuûa f(x) treân mieàn D ,neáu nhö ñoàng thôøi thoûa maõn hai ñieàu kieän sau:

1/ f(x) $\le M \quad \forall x\in D$

2/ $\exists x_0\in D: f(x_0)=M$

Kyù hieäu: M = $\max\limits_{x\in D}$ f(x)

b/ GIAÙ TRÒ NHOÛ NHAÁT:

Cho haøm soá f(x) coù mieàn xaùc ñònh D.Ta noùi m laø giaù trò nhoû nhaát cuûa f(x) treân mieàn D ,neáu nhö ñoàng thôøi thoûa maõn hai ñieàu kieän sau:

1/ f(x) $\ge m \quad \forall x\in D$

2/ $\exists x_0\in D: f(x_0)=m$

Kyù hieäu: m = $\min\limits_{x\in D}$ f(x)

Chuù yù: Khi noùi ñeán GTLN-GTNN cuûa moät haøm soá , bao giôø ta cuõng xem noù xaùc ñònh treân taäp hôïp naøo .Cuøng moät haøm soá , nhöng neáu xaùc ñònh treân taäp khaùc nhau , thì noùi chung GTLN –GTNN töông öùng laø khaùc nhau.

2/ CAÙC TÍNH CHAÁT CUÛA GTLN-GTNN CUÛA HAØM SOÁ :

Sau ñaây laø moât soá tính chaát cô baûn cuûa GTLN-GTNN ñeå hoïc sinh tham khaûo cuõng nhö coù theå xem laø nhöõng ví duï cho caùc baøi toaùn veà GTLN-GTNN maø trong saùch giaùo khoa chöa ñeà caäp .

a/ Tính chaát 1: Giaû söû A$\subset$B, khi ñoù ta coù :

*/ $\max\limits_{x\in A} f(x)\le \max\limits_{x\in B} f(x)$

**/ $\min\limits_{x\in A} f(x)\ge \min\limits_{x\in B} f(x)$

b/ Tính chaát 2: Giaû söû D = $D_1\cup D_2$, khi ñoù ta coù:

*/ $\max\limits_{x\in D} f(x)=\max\left\{\max\limits_{x\in D_1} f(x),\max\limits_{x\in D_2} f(x)\right\}$

**/ $\min\limits_{x\in D} f(x)=\min\left\{\min\limits_{x\in D_1} f(x),\min\limits_{x\in D_2} f(x)\right\}$

c/ Tính chaát 3: Neáu f(x) $\ge 0 \quad \forall x\in D$, khi ñoù ta coù:

*/ $\max\limits_{x\in D} f(x)=\sqrt{\max\limits_{x\in D} f^2(x)}$

**/ $\min\limits_{x\in D} f(x)=\sqrt{\min\limits_{x\in D} f^2(x)}$

d/ Tính chaát 4:

*/ $\max\limits_{x\in D}[f(x)+g(x)] \le \max\limits_{x\in D} f(x) + \max\limits_{x\in D} g(x)$

**/ $\min\limits_{x\in D}[f(x)+g(x)] \ge \min\limits_{x\in D} f(x) + \min\limits_{x\in D} g(x)$

e/ Tính chaát 5: $\max\limits_{x\in D} f(x) = -\min\limits_{x\in D}(-f(x))$

f/ Tính chaát 6: Neáu ñaët M = $\max\limits_{x\in D} f(x)$ vaø m = $\min\limits_{x\in D} f(x)$ thì:
$\max\limits_{x\in D}|f(x)| = \max\{|M|,|m|\}$

NOÄI DUNG 2: HEÄ THOÁNG LAÏI CAÙC PHÖÔNG PHAÙP TÌM GTLN-GTNN

PHÖÔNG PHAÙP 1: ÑÖA VEÀ DAÏNG BÌNH PHÖÔNG

KIEÁN THÖÙC CAÀN NHÔÙ: $A^2 \ge 0$, daáu baèng xaõy ra khi A = 0

1/ KIEÁN THÖÙC ÔÛ CAÁP 2:

ÔÛ caáp 2 nhìn chung caùc baøi toaùn thöôøng giaûi baèng caùch ñöa veà daïng bình phöông , chuùng haõn ta nhaéc laïi

Ví duï 1: Vôùi giaù trò naøo cuûa x thì bieåu thöùc : y = x^2 – 2x + 5 coù giaù trò nhoû nhaát (SGK lôùp 8)

moät soá daïng sau ñaây :

Giaûi :

Haøm soá y = x^2 – 2x + 5 xaùc ñònh $\forall x \in R$

Ta coù : y = x^2 – 2x + 5 = $(x – 1)^2$ + 4 $\ge$ 4 $\forall x \in R$

Daáu "=" xaõy ra khi vaø chæ khi x – 1 = 0 $\Leftrightarrow x = 1$

Vaäy $\min\limits_{x\in R} y$ = 4 khi x = 1

Ví duï 2: Vôùi giaù trò naøo cuûa x thì bieåu thöùc : y = 18 – 6x – x^2 coù giaù trò lôùn nhaát(SGK lôùp 8)

Giaûi:

Haøm soá y = 18 – 6x – x^2 xaùc ñònh $\forall x \in R$

Ta coù y = 27 – $(x +3)^2 \le$ 27 $\forall x \in R$

Daáu "=" xaõy ra khi vaø chæ khi x+3 = 0 $\Leftrightarrow x = -3$

Vaäy $\max\limits_{x\in R} y$ = 27 khi x = -3

2/ KIEÁN THÖÙC ÔÛ CAÁP 3: Sang caáp 3 cuõng baèng phöông phaùp bình phöông ta cuõng coù theå giaûi caùc baøi toaùn sau:

Ví duï 3: Goïi α laø moät goùc coá ñònh cho tröôùc .Tìm giaù trò nhoû nhaát cuûa

Giaûi:

Ta coù : y = $\frac{1}{2}$[tan(x+ α) +tan(x - α)]^2+ $\frac{1}{2}$[tan(x+ α) -tan(x - α)]^2

$$=\frac{1}{2}\frac{\sin^2 2x}{\cos^2(x+\alpha)\cos^2(x-\alpha)}+\frac{1}{2}\frac{\sin^2 2\alpha}{\cos^2(x+\alpha)\cos^2(x-\alpha)}$$

$$=\frac{\sin^2 2x+\sin^2 2\alpha}{2\cos^2(x+\alpha)\cos^2(x-\alpha)}$$

$$=\frac{2(\sin^2 2x+\sin^2 2\alpha)}{(\cos 2x+\cos 2\alpha)^2}$$

Nhaän xeùt:

+ Töû soá ñaït giaù trò nhoû nhaát khi sin 2x = 0 , khi ñoù cos 2x = ± 1

+ Maãu soá ñaït giaù trò lôùn nhaát baèng (1 + cos 2α)^2 neáu cos 2α $\geq$0 khi cos 2x = 1

vaø baèng (-1 +cos 2α)^2 neáu cos 2α $\leq$0 khi cos 2x = -1

Vaäy :i/ Neáu cos 2α $\geq$0 thì miny = $\frac{2\sin^2 2\alpha}{(1+\cos 2\alpha)^2}=2\tan^2\alpha$

ii/ Neáu cos 2α < 0 thì miny = $\frac{2\sin^2 2\alpha}{(1-\cos 2\alpha)^2}=2\cot^2\alpha$

Ví duï 4: Cho tam giaùc ABC .Tìm giaù trò lôùn nhaát cuûa:
P = $\sqrt{3}$cosB + 3(cosA + cosC)

Giaûi:

Ta coù : P = $\sqrt{3}$cosB + 6cos$\frac{A+C}{2}$cos$\frac{A-C}{2}$ = $\sqrt{3}$cosB + 6 sin$\frac{B}{2}$cos $\frac{A-C}{2}$

$$= \sqrt{3}(1 - 2\sin^2\frac{B}{2}) + 6\sin\frac{B}{2}\cos\frac{A-C}{2}$$

$$\leq -2\sqrt{3}\sin^2\frac{B}{2} + 6\sin\frac{B}{2} + \sqrt{3}$$

$$\leq -2\sqrt{3}(\sin\frac{B}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2})^2+\frac{5\sqrt{3}}{2}\leq\frac{5\sqrt{3}}{2}$$

Suy ra : maxP = $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ khi $\begin{cases} \cos\frac{A-C}{2}=1 \\ \sin\frac{B}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=C=30^0 \\ B=120^0 \end{cases}$

Ví duï 5: Tìm giaù trò lôùn nhaát , giaù trò nhoû nhaát cuûa f(x,y) = cosx + cosy – cos(x+y) vôùi x;y$\in[-\Pi;\Pi]$

Giaûi: Ta coù :

f(x,y) = cosx + cosy – cos(x+y) = 2cos$\frac{x+y}{2}$cos$\frac{x-y}{2}$ - 2 cos$^2\frac{x+y}{2}$ + 1

= -2 [cos$^2\frac{x+y}{2}$ - cos$\frac{x+y}{2}$cos$\frac{x-y}{2}$] +1

= -2[cos$^2\frac{x+y}{2}$ - 2.$\frac{1}{2}$cos$\frac{x+y}{2}$cos$\frac{x-y}{2}$ + $\frac{1}{4}\cos^2\frac{x-y}{2}$] + $\frac{1}{2}\cos^2\frac{x-y}{2}$ + 1

= -2(cos$\frac{x+y}{2}$ - $\frac{1}{2}$cos$\frac{x-y}{2}$)^2 + $\frac{1}{2}\cos^2\frac{x-y}{2}$ + 1

Suy ra f(x,y) $\le\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$ $\quad\forall x,y\in R$

Daáu "=" xaõy ra khi $\begin{cases} \cos^2\frac{x-y}{2}=1 \\ \cos\frac{x+y}{2}=\frac{1}{2}\cos\frac{x-y}{2} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin\frac{x-y}{2}=0 \\ \cos\frac{x+y}{2}=\frac{1}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} \sin\frac{x-y}{2}=0 \\ \cos\frac{x+y}{2}=-\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{\Pi}{3} \\ y=\frac{\Pi}{3} \end{cases} \vee\ x=y=-\frac{\Pi}{3}$

Maët khaùc x;y$\in[-\Pi;\Pi]$ thì cosx≥-1; cosy≥-1; - cos(x+y)≥-1

$\Rightarrow f(x,y)\ge-3$

Daáu "=" xaõy ra khi $\begin{cases} x=\Pi \\ y=-\Pi \end{cases} \vee \begin{cases} x=-\Pi \\ y=\Pi \end{cases}$

Vaäy max f(x,y)=$\frac{3}{2}$ khi $\begin{cases} x=\frac{\Pi}{3} \\ y=\frac{\Pi}{3} \end{cases} \vee\ x=y=-\frac{\Pi}{3}$

min f(x,y) = -3 khi $\begin{cases} x = \Pi \\ y = -\Pi \end{cases} \vee \begin{cases} x = -\Pi \\ y = \Pi \end{cases}$

PHÖÔNG PHAÙP 2: SÖÛ DUÏNG BAÁT ÑAÚNG THÖÙC

KIEÁN THÖÙC CAÀN NHÔÙ:

1/ Baát ñaúng thöùc Cauchy:

Neáu $a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots, a_n$ laø caùc soá khoâng aâm, ta coù :

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \ldots\ldots a_n}$$

Daáu "=" xaûy ra khi vaø chæ khi $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots\ldots = a_n$

2/ Baát ñaúng thöùc Bunhiacopski:

Neáu $a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots, a_n$ vaø $b_1, b_2, b_3, \ldots\ldots, b_n$ laø 2n soá tuøy yù , ta coù :

$(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \ldots + b_n^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots\ldots + a_nb_n)^2$

Daáu "=" xaûy ra khi vaø chæ khi $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots\ldots = \frac{a_n}{b_n}$

(vôùi quy öôùc raèng trong phaân soá $\frac{a_i}{b_i}$ neáu $b_i = 0$ thì $a_i = 0$)

Ví duï 1: Tìm giaù trò lôùn nhaát , giaù trò nhoû nhaát cuûa haøm soá :

f(x) = $\sqrt{x-1} + \sqrt{5-x}$ xeùt treân mieàn D = [1;5]

Giaûi:

Döïa vaøo tính chaát sau ñaây cuûa baát ñaúng thöùc:

Neáu a,b ≥ 0 thì a $\geq b \Leftrightarrow a^2 \geq b^2$

Theo tính chaát 3 : Neáu f(x) $\geq 0 \quad \forall x \in D$, khi ñoù ta coù ;

1/ $\max\limits_{x \in D} f(x) = \sqrt{\max\limits_{x \in D} f^2(x)}$

2/ $\min\limits_{x \in D} f(x) = \sqrt{\min\limits_{x \in D} f^2(x)}$

Ta thaáy haøm soá f(x) = $\sqrt{x-1} + \sqrt{5-x} \geq 0 \quad \forall x \in D$, neân söû duïng tính chaát 3 ta coù :

$f^2(x) = 4 + 2\sqrt{(x-1)(5-x)}$

Töø ñoù ta coù : $\begin{cases} f^2(x) \ge 4, \forall x \in D \\ f^2(1) = 4 \end{cases}$

Vaäy $\min\limits_{x \in D} f^2(x) = 4 \Rightarrow \min\limits_{x \in D} f(x) = 2$

Theo baát ñaúng thöùc Cauchy , ta coù :

f ^{2}(x) = 4 + 2$\sqrt{(x-1)(5-x)} \le 4 + [(x-1)+(5-x)] \Rightarrow f^2(x) \le 8, \forall x \in D$

Maët khaùc $f^2(3)=8$

Vaäy $\max\limits_{x \in D} f^2(x) = 8 \Rightarrow \max\limits_{x \in D} f(x) = 2\sqrt{2}$

Ví duï 2: Tìm giaù trò nhoû nhaát cuûa haøm soá :f(x) = x^{100} –

Giaûi: Aùp duïng baát ñaúng thöùc Cauchy , ta coù :

$x^{100} + \underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{9so} \ge 10\sqrt[10]{x^{100}1^9}$ = $10x^{10}$

Suy ra :x^{100} – $10x^{10}$ + 9 $\ge 0 \Rightarrow f(x) \ge 1, \forall x \in R$

Maët khaùc f(1) = 1

Vaäy $\min\limits_{x \in R} f(x) = 1$

Ví duï 3: Cho tam giaùc ABC nhoïn .Tìm gtnn cuûa P = tgA +

Giaûi :

Ta coù A + B + C = $\Pi \Rightarrow tg(A+B) = tg(\Pi - C) = -tgC$

$\Leftrightarrow tgA + tgB + tgC = tgAtgBtgC$

Aùp duïng baát ñaúng thöùc Cauchy cho ba soá döông tgA , tgB , tgC, ta coù :

P = tgA + tgB + tgC $\ge 3\sqrt[3]{tgAtgBtgC}$

$\Leftrightarrow P \ge 3\sqrt[3]{P} \Leftrightarrow 27P \le P^3$

$\Leftrightarrow P^2 \ge 27 \Leftrightarrow P \ge 3\sqrt{3}$

Daáu "=" xaûy ra khi tgA = tgB = tgC $\Leftrightarrow A = B = C$

Vaäy min P = 3$\sqrt{3}$ khi tam giaùc ABC laø tam giaùc ñeàu

Ví duï 4: Tìm giaù trò nhoû nhaát cuûa y = $\frac{2}{1-x} + \frac{1}{x}$ treân (0;1)

Giaûi :

y = $\frac{2}{1-x} + \frac{1}{x}$ = $\frac{2-2x+2x}{1-x} + \frac{1+x-x}{x}$ = 2 + $\frac{2x}{1-x} + \frac{1-x}{x} + 1$ = 3 + $\frac{2x}{1-x} + \frac{1-x}{x}$

Vì x $\in(0;1) \Rightarrow 1-x > 0$

Theo baát ñaúng thöùc Cauchy , ta coù :

$$\frac{2x}{1-x}+\frac{1-x}{x} \geq 2\sqrt{\frac{2x}{1-x}.\frac{1-x}{x}} = 2\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow y \geq 3+2\sqrt{2}$$

Daáu "=" xaûy ra khi $\frac{2x}{1-x} = \frac{1-x}{x} \Leftrightarrow (1-x)^2 = 2x^2 \Leftrightarrow x^2+2x-1=0 \Leftrightarrow x=\sqrt{2}-1$

Vaäy $\min\limits_{x\in(0;1)} y = 3+2\sqrt{2}$ khi $x=\sqrt{2}-1$

Ví duï 5: Ba ñaïi löôïng bieán thieân x , y , z luoân thoûa maõn ñieàu kieän :

Giaûi:

Aùp duïng baát ñaúng thöùc Bunhiacopxki, ta coù :

16 = (xy + yz + zx)$^2 \leq$(x^2 + y^2 + z^2)(y^2 + z^2 + x^2) = (x^2 + y^2 + z^2)^2

Suy ra : x^2 + y^2 + z^2 ≥ 4

Cuõng theo baát ñaúng thöùc Bunhiacopxki , ta coù :

16 $\leq (x^2+y^2+z^2)^2 \leq$(1^2+1^2+1^2)(x^4+y^4+z^4)=3(x^4+y^4+z^4)

Suy ra :x^4+y^4+z^4 $\geq \frac{16}{3}$

Daáu "=" xaûy ra khi vaø chæ khi x = y = z = $\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$

Vaäy min A = $\frac{16}{3}$ khi x = y = z = $\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$

Ví duï 6: Tìm gtln cuûa haøm soá : y = sinx + $\sqrt{2-\sin^2 x}+\sin x\sqrt{2-\sin^2 x}$

Giaûi:

Theo baát ñaúng thöùc Bunhiacopxki , ta coù :

Sinx + $\sqrt{2-\sin^2 x} \leq \sqrt{(1^2+1^2)(\sin^2 x+2-\sin^2 x)} \leq 2$

Theo baát ñaúng thöùc Cauchy, ta coù:

$$\sin x\sqrt{2-\sin^2 x} \leq |\sin x|\sqrt{2-\sin^2 x} = \sqrt{\sin^2 x(2-\sin^2 x)}$$

$$\leq \frac{1}{2}(\sin^2 x+2-\sin^2 x) = 1$$

Vaäy y = sinx + $\sqrt{2-\sin^2 x}+\sin x\sqrt{2-\sin^2 x} \leq 3$

Daáu "=" xaûy ra khi $\begin{cases} \sin x = \sqrt{2 - \sin^2 x} \\ \sin x = |\sin x| \\ \sin^2 x = 2 - \sin^2 x \end{cases} \Leftrightarrow \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\Pi}{2} + k2\Pi, k \in Z$

Vaäy : max y = 3 khi $\Leftrightarrow x = \frac{\Pi}{2} + k2\Pi, k \in Z$

Ví duï 7: Tìm giaù trò lôùn nhaát cuûa haøm soá : y =

Giaûi : + Taäp xaùc ñònh cuûa haøm soá laø : D = [2;4]

Theo baát ñaúng thöùc Bunhiacopxki , ta coù :

y = 1.$\sqrt{x-2} + 1.\sqrt{4-x} \le \sqrt{1^2+1^2}.\sqrt{x-2+4-x} = 2$

Daáu "=" xaûy ra khi $\sqrt{x-2} = \sqrt{4-x} \Leftrightarrow x = 3$

Vaäy $\max\limits_{[2;4]} y$ = 2 khi x = 3

Nhaän xeùt : ÔÛ ví duï 7 ta chæ caàn tìm giaù trò lôùn nhaát neân ta coù theå söû duïng baát ñaúng thöùc ñeå tìm , nhöng neáu cuõng vôùi haøm soá y = $\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x}$ ta caàn tìm giaù trò lôùn nhaát vaø giaù trò nhoû nhaát thì caùch laøm goïn nhaát laø söû duïng ñaïo haøm ñeå tìm mieàn giaù trò cuûa haøm soá töø ñoù ta tìm ñöôïc GTLN vaø GTNN cuûa haøm soá .

Phöông phaùp söû duïng mieàn giaù trò cuûa haøm soá laø moät phöông phaùp raát hay , raát thuaän lôïi cho hoïc sinh trong vieäc ñi tìm GTLN –GTNN

PHÖÔNG PHAÙP 3 : SÖÛ DUÏNG MIEÀN GIAÙ TRÒ CUÛA HAØM SOÁ :

KIEÁN THÖÙC CAÀN NHÔÙ:

1/Cho haøm soá y = f(x) xaùc ñònh treân D , coù mieàn giaù trò T

$y_0 \in$ T $\Leftrightarrow$ phöông trình y_0 = f(x) coù nghieäm x$\in$D

$\Leftrightarrow m \le y_0 \le M$ (daáu "=" xaûy ra ñöôïc)

Khi ñoù $\min\limits_{x\in D} f(x) = m$ vaø $\max\limits_{x\in D} f(x) = M$

2/ Phöông trình : asinx + bcosx = c coù nghieäm khi vaø chæ khi $a^2 + b^2 \ge c^2$

Nhö vaäy ñeå tìm GTLN –GTNN cuûa haøm soá theo phöông phaùp naøy ta quy veà vieäc tìm ñieàu kieän ñeå moät phöông trình (coù theâm ñieàu kieän phuï) coù nghieäm.

Ví duï 1: Tìm giaù trò lôùn nhaát , giaù trò nhoû nhaát cuûa haøm soá :y = $\frac{2x-1}{\ }$

Giaûi:

+ Taäp xaùc ñònh D = R.Goïi T laø taäp giaù trò cuûa haøm soá

Goïi $y_0 \in T$ ⇔ phöông trình $y_0 = \frac{2x-1}{x^2+x+4}$ coù nghieäm $x \in R$

⇔ phöông trình :$y_0x^2 + (y_0 - 2)x + 4y_0 + 1 = 0$ (1) coù nghieäm $x \in R$

Ta xeùt hai tröôøng hôïp :

- Neáu $y_0 = 0$ thì (1) ⇔ $-2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$
- Neáu $y_0 \neq 0$ thì (1) coù nghieäm $\Leftrightarrow \Delta' = -15{y_0}^2 - 8y_0 + 4 \geq 0$

$$\Leftrightarrow \frac{-4-2\sqrt{19}}{15} \leq y_0 \leq \frac{-4+2\sqrt{19}}{15} (y_0 \neq 0)$$

Keát hôïp hai tröôøng hôïp ta coù pt (1) coù nghieäm ⇔

$$\frac{-4-2\sqrt{19}}{15} \leq y_0 \leq \frac{-4+2\sqrt{19}}{15}$$

Vaäy $\max_{x\in R} y = \frac{-4+2\sqrt{19}}{15}$ vaø $\min_{x\in R} y = \frac{-4-2\sqrt{19}}{15}$

Ví duï 2: Xaùc ñònh caùc tham soá a vaø b sao cho haøm soá : y = $\frac{ax+b}{x^2+1}$ ñaït giaù trò lôùn nhaát baèng 4 vaø ñaït giaù trò nhoû nhaát baèng -1

Giaûi:+ Taäp xaùc ñònh D = R

$$\max_{x\in R} y = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{ax+b}{x^2+1} \leq 4, \forall x \in R \\ pt\,\frac{ax+b}{x^2+1} = 4 \end{cases}$$ Coù nghieäm x

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 - ax + 4 - b \geq 0, \forall x \in R \\ pt: 4x^2 - ax + 4 - b = 0 \end{cases}$$ Coù nghieäm x

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = a^2 - 16(4-b) \leq 0 \\ \Delta = a^2 - 16(4-b) \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 64 + 16b = 0 (1)$$

Coù nghieäm x $\min\limits_{x\in R} y = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{ax+b}{x^2+1} \ge -1, \forall x \in R \\ pt: \dfrac{ax+b}{x^2+1} = -1 \end{cases}$

Coù nghieäm x $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + ax + b + 1 \ge 0, \forall x \in R \\ pt: x^2 + ax + b + 1 = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 4(b+1) \le 0 \\ a^2 - 4(b+1) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow a^2 - 4(b+1) = 0 (2)$$

Vaäy yeâu caàu baøi toaùn $\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 64 + 16b = 0 \\ a^2 - 4 - 4b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -60 + 20b = 0 \\ a^2 - 4 - 4b = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 3 \\ a^2 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} b = 3 \\ a = 4 \end{cases} \\ \begin{cases} b = 3 \\ a = -4 \end{cases} \end{array} \right.$$

Ví duï 3: Tìm giaù trò lôùn nhaát , giaù trò nhoû nhaát cuûa haøm soá y = $\frac{2+\cos x}{\ldots}$

Giaûi:

Vì phöông trình : sinx + cosx – 2 = 0 voâ nghieäm neân taäp xaùc ñònh D = R

Goïi T laø taäp giaù trò cuûa haøm soá

Goïi $y_0 \in T \Leftrightarrow$ phöông trình $y_0 = \dfrac{2+\cos x}{\sin x + \cos x - 2}$ coù nghieäm $x \in R$

$$\Leftrightarrow y_0^2 + (y_0 - 1)^2 \ge 4(1 + y_0)^2$$

$$\Leftrightarrow 2y_0^2 + 10y_0 + 3 \le 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-5-\sqrt{19}}{2} \le y_0 \le \frac{-5+\sqrt{19}}{2}$$

Vaäy : $\max\limits_{x\in R} y = \dfrac{-5+\sqrt{19}}{2}, \min\limits_{x\in R} y = \dfrac{-5-\sqrt{19}}{2}$

PHÖÔNG PHAÙP 4: SÖÛ DUÏNG TAM THÖÙC BAÄC HAI

KIEÁN THÖÙC CAÀN NHÔÙ:

Ñeå tìm GTLN-GTNN cuûa haøm soá baäc hai : $ax^2+bx+c = 0$ ($a \neq 0$) treân $[\alpha, \beta]$ ta coù nhaän xeùt sau: ñoà thò cuûa haøm soá laø Parabol coù hoaønh ñoä ñænh laø $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$

Ta xeùt hai tröôøng hôïp :

1/ a>0: * Neáu $x_0 \in [\alpha, \beta]$ thì $\min\limits_{x\in[\alpha,\beta]} y = f(x_0)$, $\max\limits_{x\in[\alpha,\beta]} y = \max\{ f(\alpha), f(\beta) \}$

* Neáu $x_0 \notin [\alpha,\beta]$ thì $\min\limits_{x\in[\alpha,\beta]} y = \min\{f(\alpha), f(\beta)\}$ vaø $\max\limits_{x\in[\alpha,\beta]} y = \max\{f(\alpha), f(\beta)\}$

2/ a < 0: * Neáu $x_0 \in [\alpha,\beta]$ thì $\max\limits_{x\in[\alpha,\beta]} y = f(x_0)$, $\min\limits_{x\in[\alpha,\beta]} y = \min\{f(\alpha), f(\beta)\}$

* Neáu $x_0 \notin [\alpha,\beta]$ thì $\max\limits_{x\in[\alpha,\beta]} y = \max\{f(\alpha), f(\beta)\}$ vaø

Ví duï 1: Giaû söû (x,y) laø nghieäm cuûa heä phöông trình :

$$\begin{cases} x + y = 2a - 1 \\ x^2 + y^2 = a^2 + 2a - 3 \end{cases}$$

Xaùc ñònh a ñeå tích xy laø nhoû nhaát ?

$\min\limits_{x\in[\alpha,\beta]} y = \min\{f(\alpha), f(\beta)\}$

Giaûi :

Ñaët S = x + y vaø P = xy

Ta coù : S = 2a – 1 , $x^2 + y^2 = S^2 - 2P = a^2 + 2a - 3$

Suy ra P = $\frac{1}{2}(3a^2 - 6a + 4)$

Ñieàu kieän ñeå heä coù nghieäm laø : $S^2 - 4P \geq 0$

$$\Leftrightarrow -2a^2 + 8a - 7 \geq 0 \Leftrightarrow 2 - \frac{\sqrt{2}}{2} \leq a \leq 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Baây giôø ta tìm a ñeå P = $\frac{1}{2}(3a^2 - 6a + 4)$ ñaït giaù trò nhoû nhaát treân $[2-\frac{\sqrt{2}}{2}, 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}]$

Ta coù hoaønh ñoä ñænh parabol : $a_0 = 1 < 2 - \frac{\sqrt{2}}{2}$

Parabol coù beà loõm quay leân , do ñoù minP ñaït ñöôïc khi a = $2-\frac{\sqrt{2}}{2}$

Vaäy vôùi a = $2-\frac{\sqrt{2}}{2}$ thì xy ñaït giaù trò nhoû nhaát

Ví duï 2: Tìm tham soá a ñeå giaù trò nhoû nhaát cuûa haøm soá :

Giaûi:

Ta coù : y = $\begin{cases} x^2+4(a-1)x+3 & khi \left[\begin{array}{l} x\le 1 \\ x\ge 3\end{array}\right. \\ -x^2+4(a+1)x-3 & khi \quad 1<x<3 \end{cases}$

Khi ñoù miny = min $\{y(2-2a); y(1); y(3)\} = \min\{-4a^2+8a-1; 4a; 12a\}$

Vaäy : min y > 2 $\Leftrightarrow \begin{cases} -4a^2+8a-1>2 \\ 4a>2 \\ 12a>2 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{2}<a<\frac{3}{2}$

Ví duï 3: Tìm giaù trò lôùn nhaát vaø giaù trò nhoû nhaát cuûa haøm soá : y = $\cos\frac{2x}{1+x^2}+\cos\frac{4x}{1+x^2}+1$

Giaûi :

Ñaët u = $\frac{2x}{1+x^2}$ vôùi x $\in$R thì -1 $\le u\le 1$ khi ñoù

y = cos u + cos2u + 1 = cos u + 2cos^{2}u

Ñaët t =cosu $\Rightarrow u\in[-1,1] \quad thì \quad \cos 1\le t\le 1$

Khi ñoù y = 2t^2 + t coù ñoà thò laø parabol vôùi hoaønh ñoä ñænh : t_0 < - $\frac{1}{4}$ < cos1

Vaäy : max y = y(1) = 3 taïi x = 0, Min y = y(cos1) = 2 cos^{2}1 + cos1 taïi x = ± 1

PHÖÔNG PHAÙP 5: DUØNG ÑAÏO HAØM:

KIEÁN THÖÙC CAÀN NHÔÙ:

Trong chöông trình lôùp 12 , ôû phaàn ñaïo haøm chuùng ta ñaõ söû duïng tính ñôn ñieäu vaø cöïc trò cuûa haøm soá ñeå tìm GTLN-GTNN.

Ñaëc bieät neáu D = [a;b] vaø haøm soá y = f(x) lieân tuïc vaø coù ñaïo haøm treân (a;b) thì

$\max\limits_{x\in D} f(x)=\max\{f(x_0),f(x_1),....,f(a),f(b)\}$

$\min\limits_{x\in D} f(x)=\min\{f(x_0),f(x_1),....,f(a),f(b)\}$ vôùi x_0 , x_1 ,...$\in(a;b)$ laønghieäm cuûa pt y$'$= 0

ÔÛ ñaây ta xeùt theâm moät soá baøi toaùn tìm GTLN-GTNN baèng phöông phaùp ñaïo haøm.

Ví duï 1: Tìm giaù trò nhoû nhaát cuûa haøm soá : y = $\frac{2}{1-x}+\frac{1}{x}$

Nhaän xeùt: Ví duï 1 ta ñaõ giaûi baèng pp söû duïng baát ñaúng thöùc , nhöng ñoái vôùi hoïc sinh yeáu thì caùc em khoâng söû duïng baát ñaúng thöùc thaønh thaïo .

Maët khaùc ôû chöông trình lôùp 12 caùc em ñaõ hoïc ñaïo haøm vaø bieát caùch laäp baûng bieán thieân ,do ñoù khi giaûi ví duï 1 thì phöông phaùp ñaïo haøm chieám öu theá hôn vì moïi hoïc sinh ñeàu coù theå giaûi ñöôïc

Giaûi : Ta xeùt haøm soá treân khoaûng (0;1)

y/ = $\frac{x^2+2x-1}{(-x^2+x)^2}$, y/ = 0 $\Leftrightarrow x^2+2x-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1-\sqrt{2} \\ x=-1+\sqrt{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=3-2\sqrt{2} \\ y=3+2\sqrt{2} \end{array}\right.$

BBT:

x	$-\infty$	$-1-\sqrt{2}$	0		$-1+\sqrt{2}$		1	$+\infty$
y/		+	0	-	0	+		+
y				$+\infty$ ↘	↗		$+\infty$	

Vaäy :

$\min_{(0;1)} y=3+2\sqrt{2} \quad khi \quad x=-1+\sqrt{2}$

Ví duï 2: Tìm giaù trò lôùn nhaát , giaù trò nhoû nhaát cuûa haøm soá :

Nhaän xeùt: Ví duï 2 ta cuõng ñaõ giaûi baèng phöông phaùp baát ñaúng thöùc , baây giôø ta giaûi ví duï naøy theo phöông phaùp ñaïo haøm ñeå thaáy tính öu vieät cuûa phöông phaùp ñaïo haøm.

Giaûi: Taäp xaùc ñònh : D = [1;5]

f/(x) = $\frac{1}{2\sqrt{x-1}} - \frac{1}{2\sqrt{5-x}} = \frac{\sqrt{5-x}-\sqrt{x-1}}{2\sqrt{5-x}\sqrt{x-1}}$

f/(x) = 0 $\Leftrightarrow \sqrt{5-x} = \sqrt{x-1} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \le x \le 5 \\ 5-x = x-1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3$

BBT:

x	-∞	1		3		5	+∞
f/(x)			+	0	-		
f(x)		2	↗	$2\sqrt{2}$	↘	2	

Suy ra : $\forall x \in [1;5] \quad \Rightarrow 2 \le f(x) \le 2\sqrt{2}$

Vaäy: $\min_{x\in[1;5]} f(x) = 2 \quad khi \quad \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 5 \end{array}\right.$, $\max_{x\in[1;5]} f(x) = 2\sqrt{2} \quad khi \quad x = 3$

Ví duï 3: Tìm giaù trò lôùn nhaát cuûa haøm soá :y = sinx + 3 sin 2x

Giaûi: Mieàn xaùc ñònh: D = R

y/ = cosx + 6cos 2x = 12cos^{2}x + cosx – 6

y/ = 0 ⇔ $\left[\begin{array}{l} \cos x = \frac{2}{3} \\ \cos x = -\frac{3}{4} \end{array}\right.$

1/ Vôùi cosx = $\frac{2}{3}$ thì sinx = $\pm\frac{\sqrt{5}}{3} \Rightarrow y = \sin x + 6\sin x\cos x = \pm\frac{5\sqrt{5}}{3}$

2/ Vôùi cosx = $-\frac{3}{4}$ thì sinx = $\pm\frac{\sqrt{7}}{4} \Rightarrow y = \sin x + 6\sin x\cos x = \pm\frac{7\sqrt{7}}{8}$

Vaäy : $\max_{x\in D} y = \frac{5\sqrt{5}}{3} \quad khi \quad \cos x = \frac{2}{3}, \sin x = \frac{\sqrt{5}}{3}$

Chuù yù : Trong caùc ví duï sau neáu xeùt haøm soá ñaõ cho theo bieán x thì ta khoù xeùt tính ñôn ñieäu cuûa haøm soá , nhöng neáu ñaët aån phuï t thì ta coù theå ñöa haøm soá treân veà daïng haøm soá theo bieán t quen thuoäc vôùi hoïc sinh lôùp 12 vì ñoù laø moät trong caùc daïng haøm soá maø caùc em ñaõ khaûo saùt vaø veõ ñoà thò trong chöông trình lôùp 12.

Ví duï 4: Vôùi giaù trò naøo cuûa x ,haøm soá sau ñaït giaù trò nhoû nhaát:

y = lg^{2}x + $\frac{1}{\ldots}$

Giaûi:

Mieàn xaùc ñònh D = (0;+∞)

Ñaët t = $\lg^2 x$, t ≥ 0.Khi ñoù y = t + $\frac{1}{t+2}$

$y' = 1 - \frac{1}{(t+2)^2} = \frac{(t+1)(t+3)}{(t+2)^2} > 0, \forall t \geq 0$

Do ñoù haøm soá luoân ñoàng bieán treân [0;+∞)

Suy ra y(t) $\geq y(0) = \frac{1}{2}$, $\forall t \geq 0$

Vaäy : $\min_{x \in D} y = \frac{1}{2} \quad khi \quad x = 1$

Giaûi: Haøm soá xaùc ñònh vôùi moïi x $\in$R

Ñaët t = sinx , t $\in [-1;1]$

Khi ñoù y = $\frac{t+1}{t^2+t+1}$ xaùc ñònh treân $[-1;1]$

$y' = \frac{-t^2-2t}{(t^2+t+1)^2}$, $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = -2 \notin (-1;1) \end{array}\right.$

y(0) = 1 , y(1) = $\frac{2}{3}$, y(-1) = 0

Vaäy : $\max_{x \in R} y = 1 \quad khi \quad t = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\Pi$ (k$\in$Z)

$\min_{x \in R} y = 0 \quad khi \quad t = -1 \Leftrightarrow \sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\Pi}{2} + k2\Pi$ (k$\in$Z)

Ví duï 6: Tìm giaù trò nhoû nhaát cuûa haøm soá : y = $x^2 + \frac{1}{x^2} + 2(x + \frac{1}{x}) + 5$

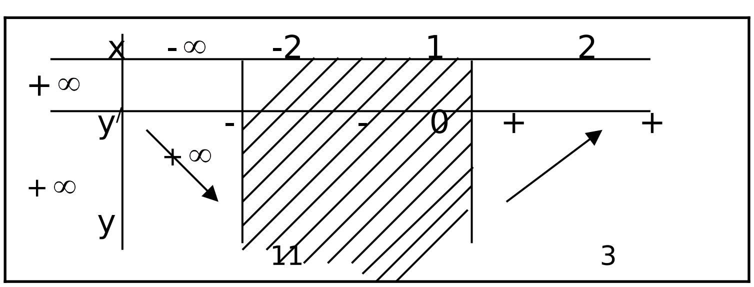
Giaûi:

Haøm soá xaùc ñònh vôùi moïi x $\neq 0$

Ñaët t = x + $\frac{1}{x}$, ñieàu kieän : $|t| \geq 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t \geq 2 \\ t \leq -2 \end{array}\right.$

Khi ñoù y = t^2 – 2t + 3 = g(t) $y' = 2t - 2 = 0 \Leftrightarrow t = 1$

BBT:



Vaäy: $\min\limits_{x\neq 0} y = \min\limits_{|t|\geq 2} y = g(2) = 3 \quad khi \quad t = 2 \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} = 2 \Leftrightarrow x = 1$

Ví duï 7: Tìm giaù trò lôùn nhaát , giaù trò nhoû nhaát cuûa haøm soá :

y= $\frac{\cos x + 2\sin x + 3}{2\cos x - \sin x + 4} \quad khi \quad x \in (-\Pi;\Pi)$

Nhaän xeùt : ÔÛ baøi toaùn naøy neáu ta giaûi theo phöông phaùp mieàn giaù trò cuûa haøm soá thì ta khoâng theå chæ ra ñöôïc x baèng bao nhieâu khi haøm soá ñaït GTLN , GTNN.Nhö vaäy ta khoâng traû lôøi ñöôïc ñuùng yeâu caàu cuûa ñeà baøi .Vì vaäy ôû baøi naøy ta phaûi giaûi baèng caùch ñaët aån phuï.

Giaûi:

Ñaët t = tg $\frac{x}{2}$, vì $x \in (-\Pi;\Pi)$ neân $t \in R$

Khi ñoù : cosx = $\frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$

Suy ra y = $\frac{t^2+2t+2}{t^2-t+3}$

y/ = $\frac{-3t^2+2t+8}{(t^2-t+3)^2}$, $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = -\frac{4}{3} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = 2 \\ y = \frac{2}{11} \end{array}\right.$

BBT:

x	$-\infty$		$-\frac{4}{3}$		2		$+\infty$
y/		-	0	+	0	-	
y	1	↘	$\frac{2}{11}$	↗	2	↘	

Vaäy:

$\max\limits_{(-\Pi;\Pi)} y = 2 \quad khi \quad t = 2 \Leftrightarrow tg\frac{x}{2} = 2 \Leftrightarrow x = 2\alpha$ vôùi $tg\alpha = 2$

$\min\limits_{(-\Pi;\Pi)} y = \frac{2}{11} \quad khi \quad t = \frac{-4}{3} \Leftrightarrow tg\frac{x}{2} = \frac{-4}{3} \Leftrightarrow x = 2\beta$ vôùi $tg\beta = -\frac{4}{3}$

Ví duï 8: Tìm giaù trò lôùn nhaát , giaù trò nhoû nhaát cuûa haøm soá :

Giaûi:

Haøm soá coù chu kyø T = 2Π

Vì y $\geq$0 vaø tính chaát chaün , leû cuûa haøm soá sinx , cosx neân ta chæ caàn xeùt haøm soá

y= $\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}$ treân mieàn xaùc ñònh D = [0;$\frac{\Pi}{2}$]

Ñaët t = cosx + sinx = $\sqrt{2}\cos(x-\frac{\Pi}{4})$

Vì $0\leq x\leq\frac{\Pi}{2}\Rightarrow 1\leq t\leq\sqrt{2}$

Ta coù : y^2 = t + $\sqrt{2t^2-2}=f(t)$

y$^{/}$ (t) = 1 + $\frac{2t}{\sqrt{2t^2-2}}>0\ ,\ \ \forall t\in[1;\sqrt{2}]$

Do ñoù vôùi t $\in[1;\sqrt{2}]$ thì haøm soá y= $\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}$ laø haøm ñoàng bieán

Vaäy : $\min\limits_{x\in D} y=y(1)=1\ ,\ \ \max\limits_{x\in D} y=y(\sqrt{2})=2\sqrt{2}$

PHÖÔNG PHAÙP 6: PHÖÔNG PHAÙP ÑOÀ THÒ VAØ HÌNH HOÏC

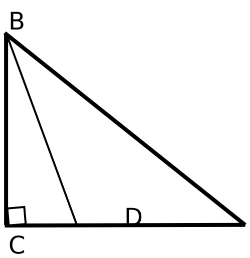
KIEÁN THÖÙC CAÀN NHÔÙ:

- Trong taát caû caùc ñöôøng gaáp khuùc noái hai ñieåm A , B cho tröôùc thì ñöôøng thaúng noái hai ñieåm A , B coù ñoä daøi nhoû nhaát .
- Trong moät tam giaùc , toång hai caïnh luoân lôùn hôn caïnh thöù ba .
- Cho ñieåm M ôû ngoaøi moät ñöôøng thaúng d cho tröôùc , khi ñoù ñoä daøi ñoaïn vuoâng goùc keû töø M xuoáng d ngaén hôn moïi ñöôøng xieân keû töø M xuoáng cuøng ñöôøng thaúng aáy .
- Trong caùc tam giaùc cuøng noäi tieáp moät ñöôøng troøn thì tam giaùc ñeàu coù chu vi vaø dieän tích lôùn nhaát.

Trong thöïc teá phöông phaùp tìm GTLN-GTNN baèng phöông phaùp hình hoïc , chuùng ta cuõng ñaõ laøm quen raát nhieàu ôû caáp 2 , chaúng haïn : “ Trong caùc tam giaùc coù cuøng caïnh ñaùy vaø cuøng dieän tích , tam giaùc naøo coù chu vi

nhoû nhaát"hay " Chöùng minh raèng trong caùc tam giaùc coù cuøng caïnh ñaùy vaø cuøng dieän tích , tam giaùc caân coù baùn kính ñöôøng troøn noäi tieáp lôùn nhaát."
Nhö vaäy neáu nhö moät baøi toaùn naøo ñoù tìm GTLN-GTNN baèng moät pheùp bieán ñoåi naøo ñoù coù theå quy veà söï kieän hình hoïc maø baèng phöông phaùp ñoà thò vaø hình hoïc ta coù theå deã daøng giaûi ñöôïc thì chuùng ta söû duïng phöông phaùp naøy .

Ví duï 1: Tìm giaù trò lôùn nhaát cuûa haøm soá :
y= f(x)= $\sqrt{x^2 - 6x + 34} - \sqrt{x^2 - 6x + 10}$ treân mieàn xaùc ñònh D = R



Giaûi:

Ta vieát f (x) = $\sqrt{|x-3|^2 + 5^2} - \sqrt{|x-3|^2 + 1^2}$

Khi ñoù : f(3) = 4

Döïng tam giaùcABC vuoâng taïi A, AC = 5 , AB = $|x-3|$

Treân caïnh AC laáy ñieåm D sao cho AD = 1.

Theo ñònh lyù Pitago, ta coù :

BC = $\sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{|x-3|^2 + 5^2}$

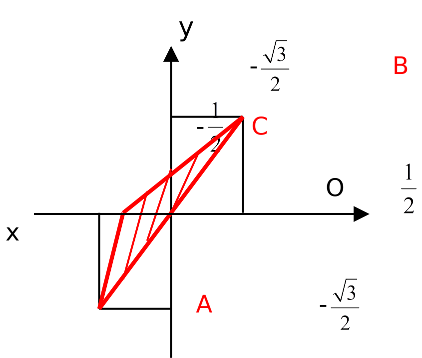
BD = $\sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{|x-3|^2 + 1^2}$

Trong tam giaùc BCD ta luoân coù: BC – BD < DC

Töùc laø : $\sqrt{|x-3|^2 + 5^2} - \sqrt{|x-3|^2 + 1^2}$ < 4

Vaäy : f(x) < 4 , $\forall x \neq 3$, f(3) = 4 .Töø ñoù suy ra : $\max_{x \in R} f(x) = 4$

Ví duï 2: Tìm giaù trò nhoû nhaát cuûa haøm soá:
f(x) = $\sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - x + 1}$ treân mieàn xaùc ñònh D = R



Giaûi :

Ta coù :

f(x) = $\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}+\sqrt{(x-\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}$

$=\sqrt{[x-(-\frac{1}{2})]^2+[0-(-\frac{\sqrt{3}}{2})]^2}+\sqrt{(x-\frac{1}{2})^2+(0-\frac{\sqrt{3}}{2})^2}\ (1)$

Xeùt caùc ñieåm A($-\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}$) , B($\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}$) vaø C (0;x) treân maët phaúng toïa ñoä Oxy.

Töø (1) ta coù : f(x) = CA + CB

Roõ raøng : CA + CB $\geq$AB vôùi AB = $\sqrt{1+(\sqrt{3})^2}=2$

Vaäy : f(x) $\geq$2 $\quad \forall x\in R$

Daáu "=" xaûy ra $\Leftrightarrow$ ba ñieåm A , B , C thaúng haøng $\Leftrightarrow C\equiv O$

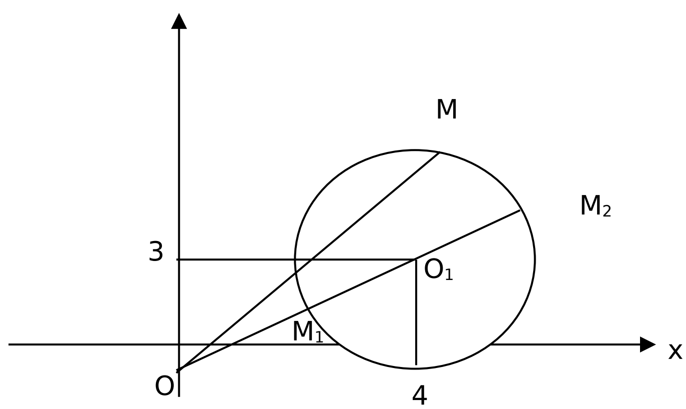
Vaäy : $\min\limits_{x\in R} f(x)=2$

Ví duï 3: Tìm giaù trò lôùn nhaát vaø giaù trò nhoû nhaát cuûa haøm soá :

Giaûi:

Neáu (x,y) $\in$D ta coù : x^2 + y^2 +16 = 8x + 6y $\Leftrightarrow (x-4)^2+(y-3)^2=9$

Vaäy D chính laø ñöôøng troøn taâm O_1(4; 3), baùn kính R = 3



Khi (x,y) $\in$D ta coù : f(x,y) = 4x + 3y = $\frac{x^2+y^2+16}{2}=8+\frac{1}{2}(x^2+y^2)\quad(1)$

Xeùt ñieåm M(x;y) treân D .Noái OO_1 caét ñöôøng troøn D taïi M_1 , M_2.

Khi ñoù : $\min\limits_{M(x;y)\in D} OM=OM_1=OO_1-MO_1=5-3=2$

$$\max_{M(x;y)\in D} OM = OM_2 = OO_1 + O_1M_2 = 5 + 3 = 8$$

Vì $x^2 + y^2 = OM^2$ neân töø (1) ta suy ra :

$\max_{M(x;y)\in D} f(x,y) = 40$ vaø $\min_{M(x;y)\in D} f(x,y) = 10$

PHÖÔNG PHAÙP 7: PHÖÔNG PHAÙP VECTÔ

KIEÁN THÖÙC CAÀN NHÔÙ:

1/ Caùc ñaúng thöùc vectô:

Trong khoâng gian n chieàu , cho hai vectô : $a = (a_1; a_2; ....; a_n)$, $b = (b_1; b_2; ....; b_n)$

Khi ñoù : * $a + b = (a_1 + b_1; a_2 + b_2; ....; a_n + b_n)$

* $a - b = (a_1 - b_1; a_2 - b_2; ....; a_n - b_n)$

* $k.a = (ka_1; ka_2; ....; ka_n)$ vôùi $k \in R$

* $a.b = a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n$

* $a.b = |a|.|b|\cos(a,b)$

* $|a| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}$

2/ Caùc baát ñaúng thöùc :

* $|a.b| \le |a|.|b|$

* $|a + b| \le |a| + |b|$

* $|a - b| \ge \big||a| - |b|\big|$

Daïng 1: söû duïng baát ñaúng thöùc : $a.b \le |a|.|b|$

Ví duï 1: Tìm giaù trò lôùn nhaát cuûa haøm soá : y = $\left|\dfrac{x}{x^2+1}\right|$

Giaûi:

Xeùt hai vectô: $a = (0;1) \Rightarrow |a| = 1$ vaø $\vec{b} = \left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}; \dfrac{2x}{1+x^2}\right) \Rightarrow |b| = 1$

Maët khaùc : $\vec{a}.\vec{b} = 0.\dfrac{1-x^2}{1+x^2} + 1.\dfrac{2x}{1+x^2} = \dfrac{2x}{1+x^2}$

Do $|a.b| \le |a|.|b| \Rightarrow \left|\dfrac{x}{x^2+1}\right| \le 1$

Daáu "=" xaûy ra $\Leftrightarrow a$ cuøng phöông vôùi b

$$\Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \end{array}\right.$$

Vaäy : max y = $\dfrac{1}{2}$ khi $\left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \end{array}\right.$

Ví duï 2: Cho $x^2 + y^2 = 1$.Tìm giaù trò lôùn nhaát cuûa bieåu thöùc : A = $\left|\sqrt{3}x\right|$

Giaûi:

Xeùt hai vectô : $\vec{a} = (0;1) \quad \Rightarrow \left|\vec{a}\right| = 1$

vaø $\vec{b} = (\frac{2y+1}{2+y}; \frac{\sqrt{3}x}{2+y}) \quad \Rightarrow \left|\vec{b}\right| = \sqrt{(\frac{2y+1}{2+y})^2 + (\frac{\sqrt{3}x}{2+y})^2}$

$\Rightarrow \left|\vec{b}\right| = \sqrt{\frac{y^2+4y+4}{(2+y)^2}} = 1$

Maët khaùc : $\vec{a}.\vec{b} = 0.\frac{2y+1}{2+y} + 1.\frac{\sqrt{3}x}{2+y} = \frac{\sqrt{3}x}{2+y} \quad \left|\vec{a}.\vec{b}\right| \le \left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right| \quad \Rightarrow \left|\frac{2x}{1+x^2}\right| \le 1$

$\Rightarrow y = \left|\frac{x}{1+x^2}\right| \le \frac{1}{2}$

Do $\left|\vec{a}.\vec{b}\right| \le \left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right| \quad \Rightarrow \left|\frac{\sqrt{3}x}{2+y}\right| \le 1 \quad \Rightarrow A = \left|\frac{\sqrt{3}x}{2+y}\right| \le 1$

Daáu “=” xaûy ra $\Leftrightarrow \vec{a}$ cuøng phöông vôùi $\vec{b}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2y+1 = 0 \\ \frac{\sqrt{3}x}{2+y} \ne 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{1}{2} \\ x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Vaäy : max A = 1 khi $\begin{cases} y = -\frac{1}{2} \\ x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

Ví duï 3: Tìm giaù trò lôùn nhaát cuûa bieåu thöùc :A = sinx.siny.sinz +cosx.cosy.cosz

Giaûi:

Xeùt hai vectô: $\vec{a} = (\sin x.\sin y; \cos x.\cos y)$ vaø $\vec{b} = (\sin z; \cos z)$

$\Rightarrow \vec{a}.\vec{b}$ = sinx.siny.sinz + cosx.cosy.cosz

$\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right| = \sqrt{\sin^2 x.\sin^2 y + \cos^2 x.\cos^2 y}.\sqrt{\sin^2 z + \cos^2 z}$

$= \sqrt{\sin^2 x.\sin^2 y + \cos^2 x.\cos^2 y}$.

Do $|a.b| \le |a|.|b|$ ⇒ sinx.siny.sinz + cosx.cosy.cosz ≤ $\sqrt{\sin^2 x.\sin^2 y + \cos^2 x.\cos^2 y}$.

$\Rightarrow A \le \sqrt{\sin^2 x.\sin^2 y + \cos^2 x.\cos^2 y}$.

$\le \sqrt{\sqrt{(\sin^4 x + \cos^4 x).(\sin^4 y + \cos^4 y)}}$

$= \sqrt{\sqrt{(1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x).(1 - \frac{1}{2}\sin^2 2y)}} \le 1$

Daáu "=" xaûy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 1 \\ \cos y = 1 \\ \cos z = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} \cos x = -1 \\ \cos y = -1 \\ \cos z = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} \cos x = -1 \\ \cos y = 1 \\ \cos z = -1 \end{cases} \vee \begin{cases} \cos x = 1 \\ \cos y = -1 \\ \cos z = -1 \end{cases}$

Vaäy : max A = 1

Ví duï 4: Tìm giaù trò lôùn nhaát cuûa haøm soá : y= sinx + $\sqrt{2 - \sin^2 x} + (\sin x)\sqrt{2 - \sin^2 x}$

Giaûi:

Xeùt hai vectô : $u = (\sin x; 1; \sqrt{2 - \sin^2 x}) \quad \Rightarrow |u| = \sqrt{\sin^2 x + 1 + 2 - \sin^2 x} = \sqrt{3}$

$v = (1; \sqrt{2 - \sin^2 x}; \sin x) \quad \Rightarrow |v| = \sqrt{1 + 2 - \sin^2 x + \sin^2 x} = \sqrt{3}$

Maët khaùc : $u.v = \sin x + \sqrt{2 - \sin^2 x} + (\sin x)\sqrt{2 - \sin^2 x}$

Do $|u.v| \le |u|.|v|$ ⇒ sinx + $\sqrt{2 - \sin^2 x} + (\sin x)\sqrt{2 - \sin^2 x} \le 3 \quad \Rightarrow y \le 3$

Daáu "=" xaûy ra $\Leftrightarrow u, v$ cuøng höôùng

$$\Leftrightarrow \frac{\sin x}{1} = \frac{1}{\sqrt{2 - \sin^2 x}} = \frac{\sqrt{2 - \sin^2 x}}{\sin x}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 1 \\ \sqrt{2 - \sin^2 x} = \sin^2 x = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\Pi}{2} + k2\Pi \qquad (k \in Z)$$

Vaäy : max y= 3 khi x= $\frac{\Pi}{2} + k2\Pi \qquad (k \in Z)$

Ví duï 5: Goïi α, β, γ laø ba goùc taïo bôûi ñöôøng cheùo cuûa hình hoäp chöõ nhaät vôùi ba caïnh phaùt xuaát töø moät ñænh vaø $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.Tìm giaù trò lôùn nhaát cuûa bieåu thöùc : A = $\sqrt{4\cos^2\alpha + 1} + \sqrt{4\cos^2\beta + 1} + \sqrt{4\cos^2\gamma + 1}$

Giaûi:

Xeùt hai vectô : $u = (\sqrt{4\cos^2\alpha + 1}; \sqrt{4\cos^2\beta + 1}; \sqrt{4\cos^2\gamma + 1})$

$$\Rightarrow |u| = \sqrt{4\cos^2\alpha + 1 + 4\cos^2\beta + 1 + 4\cos^2\gamma + 1} = \sqrt{7}$$

vaø $\vec{v}=(1;1;1) \Rightarrow |\vec{v}|=\sqrt{3}$

Maët khaùc : $\vec{u}.\vec{v} = \sqrt{4\cos^2\alpha+1}+\sqrt{4\cos^2\beta+1}+\sqrt{4\cos^2\gamma+1}$

Do $|\vec{u}.\vec{v}| \le |\vec{u}|.|\vec{v}| \Rightarrow \sqrt{4\cos^2\alpha+1}+\sqrt{4\cos^2\beta+1}+\sqrt{4\cos^2\gamma+1} \le \sqrt{21}$

$\Rightarrow A \le \sqrt{21}$

Daáu "=" xaûy ra $\Leftrightarrow \vec{u},\vec{v}$ cuøng höôùng

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{4\cos^2\alpha+1}}{1}=\frac{\sqrt{4\cos^2\beta+1}}{1}=\frac{\sqrt{4\cos^2\gamma+1}}{1}$$

$$\Leftrightarrow \cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Vaäy : max A = $\sqrt{21}$

Daïng 2: Söû duïng baát ñaúng thöùc : $|\vec{a}+\vec{b}| \le |\vec{a}|+|\vec{b}|$

Nhaän xeùt chung : Phaân tích ñeà baøi moät caùch kheùo leùo ñeå choïn toïa ñoä vectô thích hôïp thì giaûi ñöôïc baøi toaùn nheï nhaøng

Ví duï 1: Tìm giaù trò nhoû nhaát cuûa haøm soá : y =

Giaûi:

Nhaän xeùt : $x^2 - 2x + 5 = (1-x)^2 + 2^2$, $x^2 + 2x + 5 = (x+1)^2 + 2^2$

Suy ra ta choïn hai vectô coù toïa ñoä thích hôïp sao cho y baèng toång ñoä lôùn cuûa hai vectô ñoù.

Xeùt hai vectô: $\vec{a}=(1-x;2) \Rightarrow |\vec{a}|=\sqrt{(1-x)^2+4}=\sqrt{x^2-2x+5}$

$\vec{b}=(x+1;2) \Rightarrow |\vec{b}|=\sqrt{(x+1)^2+4}=\sqrt{x^2+2x+5}$

Maø : $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}=(2;4) \Rightarrow |\vec{c}|=|\vec{a}+\vec{b}|=2\sqrt{5}$

Do : $|\vec{a}|+|\vec{b}| \ge |\vec{a}+\vec{b}| \Rightarrow \sqrt{x^2-2x+5}+\sqrt{x^2+2x+5} \ge 2\sqrt{5}$

$\Rightarrow y \ge 2\sqrt{5}$

Daáu "=" xaûy ra $\Leftrightarrow \vec{a},\vec{b}$ cuøng höôùng

$\Leftrightarrow 1-x=1+x \Leftrightarrow x=0$

Vaäy : min y = $2\sqrt{5}$ khi x = 0

Ví duï 2: Tìm giaù trò nhoû nhaát cuûa bieåu thöùc :

A = $\sqrt{4\cos^2x.\cos^2y+\sin^2(x-y)}+\sqrt{4\sin^2x.\sin^2y+\sin^2(x-y)}$

Giaûi:

Nhaän xeùt : Ta choïn hai vectô coù toïa ñoä thích hôïp sao cho A baèng toång ñoä lôùn cuûa hai vectô ñoù

Xeùt hai vectô: $a=(2\cos x.\cos y;\sin(x-y)) \quad \Rightarrow |a|=\sqrt{4\cos^2 x.\cos^2 y+\sin^2(x-y)}$

$b=(2\sin x.\sin y;\sin(x-y)) \quad \Rightarrow |b|=\sqrt{4\sin^2 x.\sin^2 y+\sin^2(x-y)}$

Maø : $c=a+b=(2\sin x.\sin y+2\cos x.\cos y;2\sin(x-y))=(2\cos(x-y);2\sin(x-y))$

$\Rightarrow |c|=|a+b|=\sqrt{4[\cos^2(x-y)+\sin^2(x-y)]}=2$

Aùp duïng baát ñaúng thöùc : $|a|+|b|\geq|a+b|$

$\Rightarrow \sqrt{4\cos^2 x.\cos^2 y+\sin^2(x-y)}+\sqrt{4\sin^2 x.\sin^2 y+\sin^2(x-y)}\geq 2$

$\Rightarrow A\geq 2$

Daáu "=" xaûy ra $\Leftrightarrow x=y+k\Pi \qquad (k\in Z)$

Vaäy : min A = 2 khi $x=y+k\Pi \qquad (k\in Z)$

Ví duï 3 : Tìm giaù trò nhoû nhaát cuûa bieåu thöùc : A =

Giaûi:

Nhaän xeùt : Ta choïn ba vectô coù toïa ñoä thích hôïp sao cho A baèng toång ñoä lôùn cuûa ba vectô ñoù

Xeùt ba vectô : $a=(\cos^2 x;\cos^2 y) \quad \Rightarrow |a|=\sqrt{\cos^4 x+\cos^4 y}$

$b=(\sin^2 x;0) \quad \Rightarrow |b|=\sin^2 x$

$c=(0;\sin^2 y) \quad \Rightarrow |c|=\sin^2 y$

Maø : $a+b+c=(\cos^2 x+\sin^2 x;\cos^2 y+\sin^2 y)=(1;1)$

$\Rightarrow |a+b+c|=\sqrt{2}$

Aùp duïng baát ñaúng thöùc : $|a|+|b|+|c|\geq|a+b+c|$

$\Rightarrow \sqrt{\cos^4 x+\cos^4 y}+\sin^2 x+\sin^2 y\geq\sqrt{2} \qquad \Rightarrow A\geq\sqrt{2}$

Daáu "=" xaûy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x=k\Pi \\ y=m\Pi \end{cases} \quad (k,m\in Z)$

Vaäy : min A = $\sqrt{2}$ khi $\begin{cases} x=k\Pi \\ y=m\Pi \end{cases} \quad (k,m\in Z)$

Ví duï 4: Tìm giaù trò nhoû nhaát cuûa bieåu thöùc :

A = $\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x^2-2xy+y^2+1}+\sqrt{y^2-6y+10}$

Giaûi:

Xeùt ba vectô :

$a=(x;2) \qquad \Rightarrow |a|=\sqrt{x^2+4}$

$$b=(y-x;1)\quad\Rightarrow\ |b|=\sqrt{(y-x)^2+1}=\sqrt{x^2-2xy+y^2+1}$$

$$c=(3-y;1)\quad\Rightarrow\ |c|=\sqrt{(3-y)^2+1}=\sqrt{y^2-6y+10}$$

Maø : $d=a+b+c=(3;4)\quad\Rightarrow\ |d|=|a+b+c|=5$

Aùp duïng baát ñaúng thöùc : $|a|+|b|+|c|\ge|a+b+c|$

$\Rightarrow\ \sqrt{x^2+4}+\sqrt{x^2-2xy+y^2+1}+\sqrt{y^2-6y+10}\ge5$

$\Rightarrow\ A\ge5$

Daáu "=" xaûy ra $\Leftrightarrow a,b,c$ cuøng höôùng

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=2(y-x)\\y-x=3-y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{3}{2}\\y=\dfrac{9}{4}\end{cases}$$

Vaäy : min A = 5 khi $\begin{cases}x=\dfrac{3}{2}\\y=\dfrac{9}{4}\end{cases}$

Ví duï 5: Tìm giaù trò lôùn nhaát cuûa haøm soá : y =

Nhaän xeùt : Ta choïn hai vectô coù toïa ñoä thích hôïp sao cho y baèng giaù trò tuyeät ñoái cuûa hieäu ñoä lôùn cuûa hai vectô ñoù

Giaûi:

Xeùt hai vectô : $a=(x-1;2)\quad\Rightarrow\ |a|=\sqrt{(x-1)^2+4}=\sqrt{x^2-2x+5}$

$$b=(x-6;10)\quad\Rightarrow\ |b|=\sqrt{(x-6)^2+100}=\sqrt{x^2-12x+136}$$

Maø : $c=a-b=(5;-8)\quad\Rightarrow\ |c|=|a-b|=\sqrt{89}$

Aùp duïng baát ñaúng thöùc : $\big||a|-|b|\big|\le|a-b|=|c|$

$$\Rightarrow\ \left|\sqrt{x^2-2x+5}-\sqrt{x^2-12x+136}\right|\le\sqrt{89}$$

$\Rightarrow\ y\le\sqrt{89}$

Daáu "=" xaûy ra $\Leftrightarrow a,b$ cuøng höôùng

$$\Leftrightarrow\ x-6=5(x-1)$$

$$\Leftrightarrow\ x=-\frac{1}{4}$$

Vaäy : max y = $\sqrt{89}$ khi $x=-\dfrac{1}{4}$

Ví duï 6: Cho n soá thöïc : a_1, a_2 , …., a_n. Tìm giaù trò nhoû nhaát cuûa bieåu thöùc :

$A=\sqrt{(1-a_1)^2+1}+\sqrt{(a_1-a_2)^2+1}+\dots+\sqrt{(a_{n-1}-a_n)^2+1}+\sqrt{(n+2-a_n)^2+1}$

Giaûi:

Xeùt (n + 1) vectô : $\vec{v_1} = (a_1 - 1;1) \quad \Rightarrow \left|\vec{v_1}\right| = \sqrt{(a_1 - 1)^2 + 1} = \sqrt{(1 - a_1)^2 + 1}$

$$\vec{v_k} = (a_k - a_{k-1};1) \quad \Rightarrow \left|\vec{v_k}\right| = \sqrt{(a_k - a_{k-1})^2 + 1} \quad (k = \overline{2,n})$$

$$\vec{v_{n+1}} = (n + 2 - a_n;1) \quad \Rightarrow \left|\vec{v_{n+1}}\right| = \sqrt{(n + 2 - a_n)^2 + 1}$$

Khi ñoù : $\vec{d} = \vec{v_1} + \vec{v_2} + ... + \vec{v_{n+1}} = (n+1;n+1)$

$$\Rightarrow \left|\vec{d}\right| = \left|\vec{v_1} + \vec{v_2} + ... + \vec{v_{n+1}}\right| = (n+1)\sqrt{2}$$

Aùp duïng baát ñaúng thöùc :

$$\left|\vec{v_1}\right| + \left|\vec{v_2}\right| + ... + \left|\vec{v_{n+1}}\right| \ge \left|\vec{v_1} + \vec{v_2} + ... + \vec{v_{n+1}}\right|$$

$$\Rightarrow \sqrt{(1 - a_1)^2 + 1} + \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + 1} + ... + \sqrt{(a_{n-1} - a_n)^2 + 1} + \sqrt{(n + 2 - a_n)^2 + 1} \ge (n+1)\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow A \ge (n+1)\sqrt{2}$$

Daáu “=” xaûy ra $\Leftrightarrow \vec{v_1}, \vec{v_2}, ..., \vec{v_{n+1}}$ cuøng höôùng

$$\Leftrightarrow a_1 - 1 = a_2 - a_1 = ... = a_n - a_{n-1} = n + 2 - a_n$$

$$\Leftrightarrow a_k = k + 1 \ , \ \forall k = \overline{1,n}$$

Vaäy : min A = (n +1) $\sqrt{2}$

NOÄI DUNG 3: MOÄT SOÁ ÑEÀ THI ÑEÅ HOÏC SINH THAM KHAÛO

Ñeà 1: Cho ba soá döông a, b, c thoûa abc = 1 .Tìm giaù trò nhoû nhaát cuûa :

$$P = \frac{bc}{a^2b + a^2c} + \frac{ac}{b^2a + b^2c} + \frac{ab}{c^2a + c^2b}$$

Ñeà 2: Cho f(x) = $\cos^2 2x + 2(\sin x + \cos x)^3 - 2\sin 2x + m$
Tính theo m giaù trò lôùn nhaát cuûa f(x) .Töø ñoù tìm m sao cho $f^2(x) \le 3, \forall x$

Ñeà 3: Tìm giaù trò lôùn nhaát , giaù trò nhoû nhaát cuûa haøm soá :

$$y = 2\sin^8 x + \cos^4 2x$$

Ñeà 4: Tìm giaù trò lôùn nhaát , giaù trò nhoû nhaát cuûa haøm soá :

$$y = x + \sqrt{4 - x^2}$$ (Khoái B : 2003)

Ñeà 5: Tìm giaù trò lôùn nhaát , giaù trò nhoû nhaát cuûa haøm soá :

$$y = x^6 + 4(1 - x^2)^3$$ (döï bò khoái B : 2003)

Ñeà 6: Tìm giaù trò lôùn nhaát , giaù trò nhoû nhaát cuûa haøm soá :

$$y = \sin^5 x + \sqrt{3}\cos x$$ (döï bò khoái A : 2003)

Ñeà 7: Tìm giaù trò lôùn nhaát , giaù trò nhoû nhaát cuûa haøm soá :

$$y = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$$ treân ñoaïn [-1; 2] (Khoái D : 2003)

Ñeà 8: Tìm giaù trò lôùn nhaát , giaù trò nhoû nhaát cuûa haøm soá :

$$y = \frac{\ln^2 x}{x}$$ treân ñoaïn [1 ; e^2] (Khoái B : 2004)

Ñeà 9: Goïi (x;y) laø nghieäm cuûa heä phöông trình : $\begin{cases} x - my = 2 - 4m \\ mx + y = 3m + 1 \end{cases}$ vôùi m laø tham soá .Tìm giaù trò lôùn nhaát cuûa bieåu thöùc : A = $x^2 + y^2 - 2x$ khi m thay ñoåi .
(döï bò khoái A:2004)

Ñeà 10: Cho haøm soá f(x) = $e^x - \sin x + \frac{x^2}{2}$.Tìm giaù trò nhoû nhaát cuûa haøm soá f(x).
Chöùng minh raèng phöông trình f(x) = 3 coù ñuùng ba nghieäm .
(döï bò khoái B:2004)

III/ PHAÀN KEÁT LUAÄN

Caùc baøi toaùn veà GTLN-GTNN laø caùc baøi toaùn raát phong phuù , ña daïng , do ñoù ñoøi hoûi ngöôøi giaûi phaûi bieát caùch nhìn , nhieàu baøi toaùn coù ñöôïc lôøi giaûi hoaëc lôøi giaûi hay laø nhôø vieäc khai thaùc ñuùng ñaén caùc ñaëc ñieåm veà daïng cuûa baøi toaùn .

Nhìn veà löôïng vaø chaát thì baøi taäp trong saùch giaùo khoa raát ít , khoâng ñuû cho caùc em hoïc sinh reøn luyeän .Do ñoù baøi vieát naøy laø caàu noái giuùp caùc em nhìn vaán ñeà moät caùch heä thoáng hôn , khaùi quaùt hôn , laøm haønh trang cho caùc em trong caùc kyø thi .

Khi toâi daïy cho hoïc sinh chuyeân ñeà naøy , toâi thaáy caùc em raát thích thuù , khi gaëp moät ñeà baøi töông töï caùc em ñaõ vaän duïng caùch giaûi moät caùch linh hoaït , coù khi cuøng moät ñeà caùc em laïi giaûi ñöôïc nhieàu caùch khaùc nhau .Maët khaùc trong caùc daïng toaùn luyeän thi caùc em raát thöôøng xuyeân ñuïng ñeán baøi toaùn tìm GTLN-GTNN (ví duï : tìm tham soá m ñeå phöông trình coù nghieäm, tìm m ñeå haøm soá f(x) ñôn ñieäu treân khoaûng (a;b),…)khi ñoù chuyeân ñeà naøy raát höõu ích cho caùc em vaø caùc em ñaõ giaûi caùc baøi toaùn luyeän thi ñaït keát quaû toát .

IV/ TAØI LIEÄU THAM KHAÛO:

1/ Saùch giaùo khoa Giaûi Tích 12 cuûa Ngoâ Thuùc Lanh
2/ Saùch Giaûi Tích naâng cao cuûa Phan Huy Khaûi
3/ Chuyeân ñeà khaûo saùt haøm soá cuûa Ngoâ Taán Löïc
4/ Giaù trò lôùn nhaát , giaù trò nhoû nhaát cuûa Ngueãy vaên Nho
5/ Caùc phöông phaùp vaø kyõ thuaät ñaëc bieät giaûi toaùn THPT cuûa Nguyeãn vaên Quí
6/ Caùc baøi toaùn veà phöông phaùp vectô cuûa Nguyeãn Moäng Hy

NHAÄN XEÙT VAØ ÑAÙNH GIAÙ CUÛA TOÅ TOAÙN