HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT ĐỀ SỐ 11

Câu 1: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ đồng thời thỏa mãn $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f^2(x)\mathrm{d}x=3\pi,\ \int_0^{\pi}(\sin x-x)f'\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x=-2\pi$ và $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=4$. Giá trị của $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\sin x\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{8+5\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{8+5\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\frac{8-5\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\frac{8-5\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn D

$I=\int_0^{\pi}(\sin x-x)f'\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x=-2\pi$.

ó

C

Đặt $t=\frac{x}{2}\Rightarrow I=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin 2t-2t)f'(t)\mathrm{d}t=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin 2x-2x)f'(x)\mathrm{d}x$.

Tích phân từng phần cho I, ta được:

$$\frac{I}{2}=(\sin 2x-2x)f(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\cos 2x-2)f(x)\mathrm{d}x=-\pi f\left(\frac{\pi}{2}\right)-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos 2x-1)f(x)\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow -\pi=-4\pi+4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 xf(x)\mathrm{d}x\Leftrightarrow 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 xf(x)\mathrm{d}x=3\pi$$

Có $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f^2(x)\mathrm{d}x-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}4\sin^2 xf(x)\mathrm{d}x+16\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x\mathrm{d}x=3\pi-2.3\pi+3\pi=0$

$$\Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}}(f(x)-4\sin^2 x)^2\mathrm{d}x=0$$

$$\Leftrightarrow f(x)-4\sin^2 x=0\Leftrightarrow f(x)=4\sin^2 x,\ \forall x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right].$$

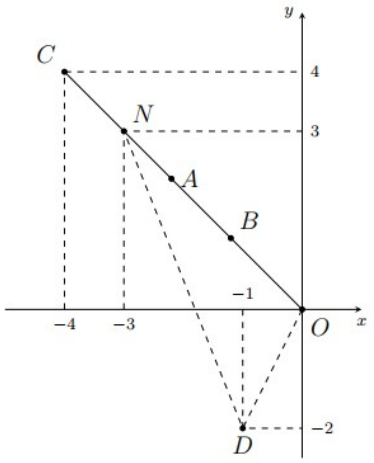
Vậy $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\sin x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}4\sin^3 x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(3\sin x-\sin 3x)\mathrm{d}x=\left(\frac{1}{3}\cos 3x-3\cos x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{8-5\sqrt{3}}{3}$.

Câu 2: Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn: $|z_1-z_2|=\sqrt{2}$ và $|z_1+4-4i|=3\sqrt{2}-|z_2|$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z_2+1+2i|$, giá trị M^2+m^2 bằng

A. 50. **B.** 54. **C.** 34. **D.** $\frac{99}{2}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi A, B lần lượt là điểm biểu diễn của $z_1, z_2 \Rightarrow \begin{cases} |z_1 - z_2| = AB = \sqrt{2} \\ |z_2| = OB \end{cases}$; $C(-4;4)$ là điểm biểu diễn của số phức $-4+4i$.

$$|z_1 + 4 - 4i| = 3\sqrt{2} - |z_2| \Leftrightarrow AC = 3\sqrt{2} - OB \Leftrightarrow AC + OB = 3\sqrt{2}.$$

Có

$$\Rightarrow \begin{cases} OB + AC + AB = 4\sqrt{2} \\ OC = 4\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow OB + BA + AC = OC \Rightarrow O, B, A, C$$ theo thứ tự nằm trên đoạn OC.

Điểm $D(-1;-2)$ biểu diễn cho số phức $-1-2i$.

$$\Rightarrow P = |z_2 + 1 + 2i| = BD \Rightarrow \begin{cases} P_{\min} = OD = \sqrt{5} \\ P_{\max} = DN = \sqrt{29} \end{cases} \Rightarrow M^2 + m^2 = 34.$$

($P_{\max}$ khi A trùng C, B trùng với $N(-3;3)$).

Câu 3: Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $(m^2+1)\log_2^2 x - 10\log_2 x + m = 0$ có hai nghiệm phân biệt không nhỏ hơn 1 là

A. 4. **B.** 2 **.C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $x > 0$

Đặt $t = \log_2 x$. Phương trình trở thành: $(m^2+1)t^2 - 10t + m = 0 \quad (1)$.

Để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt không nhỏ hơn 1 thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt

$$t_1 > t_2 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S \geq 0 \\ P \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m^3 - m + 25 > 0 \\ \dfrac{10}{m^2+1} \geq 0 \\ \dfrac{m}{m^2+1} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m^3 - m + 25 > 0 \\ m \geq 0 \end{cases}$$

Vì m nguyên nên $m \in \{0;1;2\}$.

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \dfrac{x+2}{4} = \dfrac{y-1}{-4} = \dfrac{z+2}{3}$ và mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z + 1 = 0$. Đường thẳng Δ song song với (P) đồng thời tạo với d góc bé nhất. Biết rằng Δ có một véc tơ chỉ phương $u = (m;n;1)$. Giá trị biểu thức $T = m^2 + n^2$ bằng

A. $T = 5$. **B.** $T = 2$. **C.** $T = 3$. **D.** $T = 4$.

Lời giải

Chọn D

Véc tơ chỉ phương $d: u_d = (4;-4;3)$, véc tơ pháp tuyến $(P): n_P = (2;-1;2)$.

Ta có $u.n_P = 0 \Leftrightarrow 2m - n + 2 = 0 \Leftrightarrow n = 2m + 2$.

$$\cos(\Delta, d) = \frac{|\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u_d}|}{|u|.|u_d|} = \frac{|4m - 4n + 3|}{\sqrt{4^2 + (-4)^2 + 3^2}\sqrt{m^2 + n^2 + 1^2}} = \frac{|4m - 4(2m+2) + 3|}{\sqrt{41}\sqrt{m^2 + (2m+2)^2 + 1}}$$

$$= \frac{|4m+5|}{\sqrt{41}\sqrt{5m^2 + 8m + 5}} = \frac{1}{\sqrt{41}}\sqrt{\frac{(4m+5)^2}{5m^2 + 8m + 5}} = \frac{1}{\sqrt{41}}\sqrt{\frac{16m^2 + 40m + 25}{5m^2 + 8m + 5}}.$$

Đặt $f(m) = \dfrac{16m^2 + 40m + 25}{5m^2 + 8m + 5}$; $f'(m) = \dfrac{-72m^2 - 90m}{(5m^2 + 8m + 5)^2}$.

$$f'(m) = 0 \Leftrightarrow -72m^2 - 90m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = -\dfrac{5}{4}. \end{cases}$$

Có $\lim\limits_{m \to \pm\infty} \dfrac{16m^2 + 40m + 25}{5m^2 + 8m + 5} = \dfrac{16}{5}$.

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\frac{5}{4}$		0		$+\infty$
$f'(m)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(m)$	$\frac{16}{5}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	5	$\searrow$	$\frac{16}{5}$

Góc giữa d và Δ bé nhất khi $f(m)$ lớn nhất. Khi đó dựa vào bảng biến thiên ta thấy $m=0 \Rightarrow n=2$. Vậy $T=m^2+n^2=0+4=4$.

Cách khác:

Gọi Δ' là hình chiếu của d lên (P), khi đó góc của (P) và d là góc của d và Δ. Mà $\Delta//(P)$ nên góc Δ và d nhỏ nhất khi $\Delta//\Delta'$.

Véc tơ chỉ phương $d: u_d=(4;-4;3)$, véc tơ pháp tuyến $(P): n_P=(2;-1;2)$. Gọi (Q) là mặt phẳng chứa d và vuông góc với $(P) \Rightarrow$ véc tơ pháp tuyến $n_Q=\left[u_d, n_P\right]=(-5;-2;4)$, Δ' là hình chiếu của d lên $(P) \Rightarrow \Delta'=(P)\cap(Q) \Rightarrow u_{\Delta'}=\left[u_P, n_Q\right]=(0;-18;-9)=-2(0;2;1)$.

$T=m^2+n^2=0+4=4$.

Câu 5: Biết phương trình $z^2+mz+8-m^2=0$ (m là tham số thực) có hai nghiệm z_1, z_2. Gọi A, B, C lần lượt là điểm biểu diễn của các số phức z_1, z_2 và $z_0=2$. Có bao nhiêu giá trị của m để ΔABC đều ?

A. 1. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Để tồn tại ΔABC thì z_1, z_2 phải là hai nghiệm không thuần thực của phương trình $z^2+mz+8-m^2=0$.

Suy ra $\Delta<0 \Leftrightarrow 5m^2-32<0 \Leftrightarrow m^2<\frac{32}{5} \Leftrightarrow -\sqrt{\frac{32}{5}}<m<\sqrt{\frac{32}{5}}$.

Khi đó $z_{1,2}=\frac{-m \pm i\sqrt{-\Delta}}{2}$. Suy ra $A\left(\frac{-m}{2};\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}\right), B\left(\frac{-m}{2};-\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}\right), C(2;0)$.

Ta có $\begin{cases} AB^2=|z_1-z_2|^2=(z_1+z_2)^2-4z_1z_2=m^2-4(8-m^2)=5m^2-32 \Rightarrow AB=\sqrt{32-5m^2} \\ AC=BC=\sqrt{\left(2+\frac{m}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{-4m^2+8m+48} \end{cases}$.

Để ΔABC đều thì $AB=AC \Leftrightarrow \sqrt{32-5m^2}=\frac{1}{2}\sqrt{-4m^2+8m+48}$

$\Leftrightarrow 32-5m^2=-m^2+2m+12 \Leftrightarrow -4m^2-2m+20=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-\frac{5}{2}(n) \\ m=2(n) \end{array}\right.$.

Vậy có 2 giá trị của m để ΔABC đều.

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta : \frac{x+2}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1}$ và mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z + 6 = 0$. Đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (P) sao cho d cắt đồng thời vuông góc với đường thẳng Δ. Khi đó đường thẳng d đi qua điểm nào trong các điểm sau đây?

A. $(-2;2;0)$. **B.** $(2;2;-2)$. **C.** $(0;4;1)$. **D.** $(-2;3;1)$.

Lời giải

Chọn C

Gọi $A = d \cap \Delta \Rightarrow A = \Delta \cap (P)$

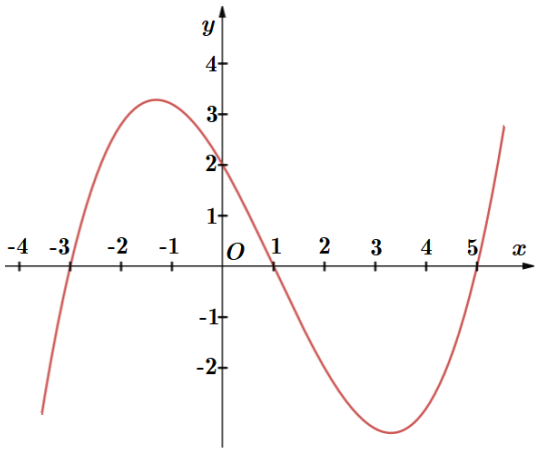
Tọa độ A thỏa mãn hệ $\begin{cases} \frac{x+2}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1} \\ x - 2y + 2z + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = -2 \end{cases} \Rightarrow A(0;1;-2)$.

Do $d \subset (P)$ và $d \perp \Delta$ nên nhận $\frac{1}{3}\vec{u} = \frac{1}{3}.[n_P; u_\Delta] = (0;1;1)$ là một vectơ chỉ phương.

Đường thẳng Δ đi qua $A(0;1;-2)$ nên Δ có dạng $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 + t \\ z = -2 + t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$.

Nhận thấy Δ đi qua điểm $(0;4;1)$.

Câu 7: Cho hàm số đa thức bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ:



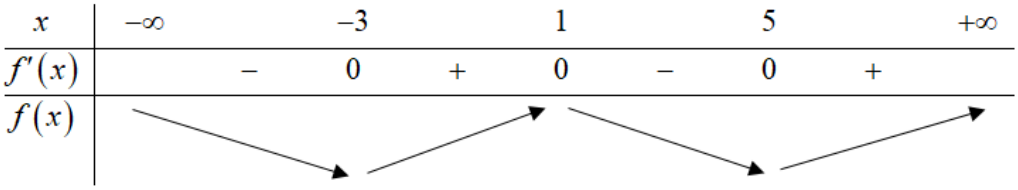
Tổng các giá trị nguyên của m để hàm số $y = f(|x-1| + m - 9)$ có đúng 3 điểm cực tiểu là

A. 40. **B.** 34. **C.** 24. **D.** 30.

Lời giải

Chọn D

Từ hình vẽ ta có bảng biến thiên của hàm số $f(x)$:



Từ bảng biến thiên ta thấy được để hàm số $y=f\left(\left|x-1\right|+m-9\right)$ có đúng 3 điểm cực tiểu khi và chỉ khi $-3\le m-9<1\Leftrightarrow 6\le m<10\Rightarrow m\in\left\{6;7;8;9\right\}$.

Câu 8: Có bao nhiêu số nguyên dương x, sao cho ứng với mỗi giá trị của x có đúng 11 số nguyên y thỏa mãn bất phương trình $\left(2^y-x^2\right)\left(5^y-x-1\right)\le 0$?

A. 55. **B.** 34. **C.** 130. **D.** 88.

Lời giải

Chọn D

Đặt $\left(2^y-x^2\right)\left(5^y-x-1\right)\le 0\quad (*)$

Xét phương trình $\left(2^y-x^2\right)\left(5^y-x-1\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} y=2\log_2 x\\ y=\log_5(x+1)\end{array}\right.$

Với $x=1$ $(*)\Leftrightarrow 0\le y\le\log_5 2$, không thỏa mãn.

Với $x\ge 2$ thì $2\log_2 x>\log_5(x+1)$, khi đó $(*)\Leftrightarrow\log_5(x+1)\le y\le 2\log_2 x$

TH1: Với $x\in\left[2;24\right]$, $\begin{cases}\log_5 3<\log_5(x+1)\le 2\\ 2<2\log_2 x<2\log_2 24\end{cases}$

$\Rightarrow 2\log_2 x-\log_5(x+1)<10,\forall x\in\left[2;24\right]$

Nên không tồn tại đủ 11 số nguyên thuộc $\left[\log_5(x+1);2\log_2 x\right]\Rightarrow$ Không thỏa mãn.

TH2: $\begin{cases}2<\log_5(x+1)\le 3\\ 13\le 2\log_2 x<14\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}24<x\le 124\\ 2^{\frac{13}{2}}\le x<2^7\end{cases}\Rightarrow x\in\left\{91;92;...;124\right\}$.

TH3: $\begin{cases}3<\log_5(x+1)\le 4\\ 14\le 2\log_2 x<15\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}124<x\le 624\\ 2^7\le x<2^{\frac{15}{2}}\end{cases}\Rightarrow x\in\left\{128;129;...;181\right\}$.

TH4: $\begin{cases}n<\log_5(x+1)\le n+1\\ n+11\le 2\log_2 x<n+12\end{cases}(n>4)\Leftrightarrow\begin{cases}5^n-1<x\le 5^{n+1}-1\\ 2^{\frac{n+11}{2}}<x<8.2^{\frac{n}{2}}\end{cases}(1)$

Do $5^n-1>2^n2^n>8.2^{\frac{n}{2}},\forall n>4$ nên $(1)\Leftrightarrow x\in\varnothing\Rightarrow$ Không thỏa mãn.

Vậy $x\in\left\{91;92;...;124\right\}\cup\left\{128;129;...;181\right\}$.

Câu 9: Cho hình nón (H) có đỉnh S và đáy là hình tròn tâm O, bán kính R, chiều cao $2R$. Một mặt phẳng đi qua đỉnh và cắt đường tròn đáy theo dây cung AB có độ dài bằng bán kính đáy. Tính sin của góc tạo bởi OA và mặt phẳng (SAB).

A. $\frac{2\sqrt{57}}{19}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{57}}{19}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải

Chọn A

Ta thấy ΔOAB đều cạnh bằng R, ΔSAB cân tại S, gọi M là trung điểm của AB thì $OM = \frac{R\sqrt{3}}{2}$.

Ta có $OM \perp AB, SM \perp AB \Rightarrow AB \perp (SOM) \Rightarrow (SAB) \perp (SOM)$ và $(SAB) \cap (SOM) = SM$

Trong mặt phẳng (SOM), kẻ $OH \perp SM$ tại H thì $OH \perp (SAB)$ nên H là hình chiếu của O trên mặt phẳng (SAB). Suy ra góc tạo bởi OA và mặt phẳng (SAB) là góc $\widehat{OAH}$.

Ta có $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OM^2} = \frac{1}{4R^2} + \frac{4}{3R^2} = \frac{19}{12R^2} \Rightarrow OH^2 = \frac{12R^2}{19} \Rightarrow OH = \frac{2\sqrt{3}R}{\sqrt{19}}$

Ta thấy ΔOHA vuông tại H nên $\sin \widehat{OAH} = \frac{OH}{OA} = \frac{\frac{2\sqrt{3}R}{\sqrt{19}}}{R} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{19}} = \frac{2\sqrt{57}}{19}$

Câu 10: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m sao cho hàm số $y = \left| -x^4 + mx^3 + 2m^2x^2 + m - 1 \right|$ đồng biến trên $(1; +\infty)$. Tổng tất cả các phần tử của S là

A. 0. **B.** 2. **C.** -1. **D.** -2.

Lời giải

Chọn C

Gọi $g(x) = -x^4 + mx^3 + 2m^2x^2 + m - 1$.

$$g'(x) = -4x^3 + 3mx^2 + 4m^2x = x.(-4x^2 + 3mx + 4m^2) = -4x.\left(x - \frac{3-\sqrt{73}}{8}m\right).\left(x - \frac{3+\sqrt{73}}{8}m\right).$$

Gọi $a = \frac{3-\sqrt{73}}{8}m, b = \frac{3+\sqrt{73}}{8}m$, $b - a = \frac{2\sqrt{73}}{8}m$.

Nếu $m > 0$ thì $b > a$, nếu $m < 0$ thì $b < a$.

Ta có $\lim\limits_{x \to +\infty} g'(x) = -\infty$ nên không xảy ra trường hợp hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

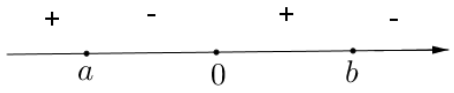
Để thỏa mãn yêu cầu đề bài thì phải có $g(x)$ nghịch biến trên $(1; +\infty)$ và $g(1) \le 0$.

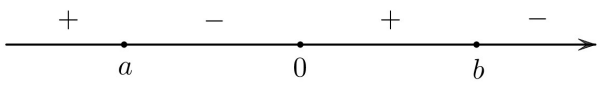
$$g(1) \le 0 \Leftrightarrow 2m^2 + 2m - 2 \le 0 \Leftrightarrow \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \le m \le \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \quad (1).$$

$g(x)$ nghịch biến trên $(1;+\infty) \Leftrightarrow g'(x) \le 0, \forall x \in (1;+\infty)$ (2).

+) Nếu $m=0$: $g'(x)=-4x^3$. Điều kiện (1) và (2) đều thỏa mãn, do đó giá trị $m=0$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

+) Nếu $0<m\le\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ (3): Dấu $g'(x)$ trên trục số như sau:

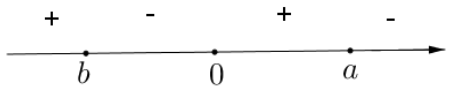


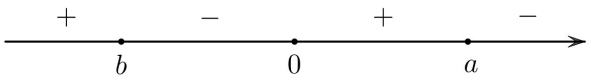


Để thỏa mãn điều kiện (2) thì $b=\frac{3+\sqrt{73}}{8}m\le 1 \Leftrightarrow m\le\frac{-3+\sqrt{73}}{8}$ (4).

Kết hợp (3) và (4) có: $0<m\le\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

+) Nếu $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\le m<0$ (5): Dấu $g'(x)$ trên trục số như sau:





Để thỏa mãn điều kiện (2) thì $a=\frac{3-\sqrt{73}}{8}m\le 1 \Leftrightarrow m\ge\frac{-3-\sqrt{73}}{8}$ (6).

Kết hợp (5) và (6) có: $\frac{-3-\sqrt{73}}{8}\le m<0$.

Vậy các giá trị của m thỏa mãn yêu cầu đề bài là $\frac{-3-\sqrt{73}}{8}\le m\le\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, suy ra các giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu đề bài là $m=-1, m=0$, do đó $S=-1$.