

NGUYÊN HÀM

LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa

- Cho hàm số $f(x)$ xác định trên K . Hàm số $F(x)$ được gọi là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K nếu $F'(x) = f(x)$ với mọi x thuộc K .
- Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x)$ ký hiệu là $\int f(x) = F(x) + C$.
- Chú ý:** Mọi hàm số liên tục trên K đều có nguyên hàm trên K .

2. Tính chất

- Nếu f, g là hai hàm số liên tục trên K thì $\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$.
- $\int kf(x) dx = k \int f(x) dx$ (với $k \neq 0$) $\Rightarrow \int [k \cdot f(x) + l \cdot g(x)] dx = k \int f(x) dx + l \int g(x) dx$
- $\left(\int f(x) dx \right)' = f(x) + C$

3. Công thức đổi biến số: $\int f[u(x)]u'(x) dx = F[u(x)] + C$ 4. Công thức nguyên hàm từng phần: $\int u dv = uv - \int v du$

5. Bảng nguyên hàm và vi phân

Hàm số sơ cấp	Hàm hợp $u = u(x)$	Thường gặp
$\int dx = x + C$	$\int du = u + C$	Vi phân $\frac{1}{a} d(ax + b) = dx$
$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$	$\int u^\alpha du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$	$\int (ax+b)^\alpha dx = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{\alpha+1} (ax+b)^{\alpha+1} + C$
$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C \quad (x \neq 0)$	$\int \frac{du}{u} = \ln u + C \quad (u(x) \neq 0)$	$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \ln ax+b + C \quad (a \neq 0)$
$\int \cos x dx = \sin x + C$	$\int \cos u du = \sin u + C$	$\int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + C$
$\int \sin x dx = -\cos x + C$	$\int \sin u du = -\cos u + C$	$\int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + C$
$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$	$\int \frac{1}{\cos^2 u} du = \tan u + C$	$\int \frac{dx}{\cos^2(ax+b)} = \frac{1}{a} \tan(ax+b) + C$
$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$ Với $x \neq k\pi$	$\int \frac{1}{\sin^2 u} du = -\cot u + C$ Với $u(x) \neq k\pi$	$\int \frac{dx}{\sin^2(ax+b)} = \frac{-1}{a} \cot(ax+b) + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int e^u du = e^u + C$	$\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + C$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (0 < a \neq 1)$	$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C \quad (0 < a \neq 1)$	$\int a^{px+q} dx = \frac{1}{p \cdot \ln a} a^{px+q} + C \quad (0 < a \neq 1)$

❖ **Một số nguyên tắc tính nguyên hàm cơ bản**

- Tích của đa thức hoặc lũy thừa $\xrightarrow{PP}$ khai triển.
- Tích các hàm mũ $\xrightarrow{PP}$ khai triển theo công thức mũ.
- Bậc chẵn của $\sin$ hoặc $\cos \xrightarrow{PP}$ hạ bậc: $\sin^2 a = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2a$; $\cos^2 a = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2a$
- Chứa tích các căn thức của $x \xrightarrow{PP}$ chuyển về lũy thừa.

❖ **Phương pháp đổi biến số**

- Nếu $\int f(x)dx = F(x) + C$ thì $\int f[u(x)] \cdot u'(x)dx = F[u(x)] + C$
- Giả sử ta cần tìm họ nguyên hàm $I = \int f(x)dx$, trong đó ta có thể phân tích hàm số đã cho $f(x) = g[u(x)] \cdot u'(x)$ thì ta thực hiện phép đổi biến đặt $t = u(x) \Rightarrow dt = u'(x)dx$. Khi đó, ta thấy $I = \int g(t)dt = G(t) + C = G[u(x)] + C$.
- **Chú ý:** Sau khi ta tìm được họ nguyên hàm theo t thì ta phải thay $t = u(x)$.

❖ **Phương pháp tính nguyên hàm, tích phân của hàm số hữu tỷ $I = \int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$.**

- Nếu bậc của tử số $P(x) \geq$ bậc của mẫu số $Q(x) \xrightarrow{PP}$ Chia đa thức.
- Nếu bậc của tử số $P(x) <$ bậc của mẫu số $Q(x) \xrightarrow{PP}$ phân tích mẫu $Q(x)$ thành tích số, rồi sử dụng phương pháp chia để đưa về công thức nguyên hàm số.
- Nếu mẫu không phân tích được thành tích số $\xrightarrow{PP}$ thêm bớt để đổi biến hoặc lượng giác hóa bằng cách đặt $X = a \tan t$, nếu mẫu đưa được về dạng $X^2 + a^2$.

❖ **Nguyên hàm từng phần**

- Cho hai hàm số u và v liên tục trên $[a; b]$ và có đạo hàm liên tục trên $[a; b]$. Khi đó ta có được $\int u dv = uv - \int v du$ (*)
 - Để tính nguyên hàm $\int u dv = uv - \int v du$ bằng phương pháp từng phần ta làm như sau:
 - **Bước 1:** Chọn u, v sao cho $f(x)dx = u dv$ (Chú ý: $dv = v'(x)dx$ và)
 - Tính $v = \int dv$ và $du = u'dx$.
 - **Bước 2:** Thay vào công thức (*) và tính $\int v du$.
 - Cần phải lựa chọn u và dv hợp lý sao cho ta dễ dàng tìm được v và tích phân $\int v du$ dễ tính hơn $\int u dv$.
- Mẹo nhớ: “**Nhất lô, nhì đa, tam lượng, tứ mũ**”

VÍ DỤ MINH HỌA

VÍ DỤ 1. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $\sin 3x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x).e^x$, họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f'(x).e^x$ là

A. $3\cos 3x - \sin 3x + C$.

B. $-3\cos 3x - \cos 3x + C$.

C. $3\sin 3x - \cos 3x + C$.

D. $3\cos 3x - \cos 3x + C$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\sin 3x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x).e^x$ suy ra $f(x).e^x = (\sin 3x)' = 3\cos 3x$.

Xét $I = \int f'(x).e^x dx$. Đặt $\begin{cases} u = e^x \\ dv = f'(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = e^x dx \\ v = f(x) \end{cases}$.

Khi đó ta có $I = \int f'(x).e^x dx = f(x).e^x - \int f(x).e^x dx = 3\cos 3x - \sin 3x + C$.

VÍ DỤ 2. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $x^2 - 3x + 1$ là một nguyên hàm của hàm số $\frac{f(x)}{x}$, họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f'(x).e^{2x}$ là

A. $\frac{4x - 11e^{2x}}{2} + C$.

B. $2x - 2e^{2x} + C$.

C. $\frac{4x - 5e^x}{2} + C$.

D. $\frac{4x - 5e^{2x}}{2} + C$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $x^2 - 3x + 1$ là một nguyên hàm của hàm số $\frac{f(x)}{x}$ suy ra $\frac{f(x)}{x} = (x^2 - 3x + 1)' = 2x - 3$.

Suy ra $f(x) = 2x^2 - 3x$ suy ra $f'(x) = 4x - 3$. Xét $I = \int (4x - 3).e^{2x} dx$.

Đặt $\begin{cases} u = 4x - 3 \\ dv = e^{2x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 4dx \\ v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{cases}$.

Khi đó ta có:

$$I = \int (4x - 3).e^{2x} dx = \frac{(4x - 3).e^{2x}}{2} - 2 \int e^{2x} dx = \frac{(4x - 3).e^{2x}}{2} - e^{2x} + C = \frac{4x - 5e^{2x}}{2} + C.$$

VÍ DỤ 3. Tìm $\int \sin 5x.\cos x dx$.

A. $\frac{1}{5}\cos 5x + C$.

B. $-\frac{1}{8}\cos 4x - \frac{1}{12}\cos 6x + C$.

C. $-\frac{1}{5}\cos 5x + C$.

D. $\frac{1}{8}\cos 4x + \frac{1}{12}\cos 6x + C$.

Lời giải

Chọn B

Ta có : $\int \sin 5x.\cos x dx = \frac{1}{2} \int (\sin 6x + \sin 4x) dx$

$$= \frac{1}{2} \left(-\frac{\cos 6x}{6} - \frac{1}{4} \cos 4x \right) + C = -\frac{1}{12} \cos 6x - \frac{1}{8} \cos 4x + C.$$

VÍ DỤ 4. Cho $\int \frac{(x-1)^{2017}}{(x+1)^{2019}} dx = \frac{1}{a} \cdot \frac{(x-1)^b}{(x+1)^c} + C$ với a, b, c là các số nguyên. Giá trị $a + b + c$ bằng

A. 4.2018.

B. 2.2018.

C. 3.2018.

D. 5.2018.

Lời giải

Chọn A

$$I = \int \frac{(x-1)^{2017}}{(x+1)^{2019}} dx = \int \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^{2017} \cdot \frac{1}{(x+1)^2} dx. \text{ Đặt } t = \frac{x-1}{x+1} \Rightarrow dt = \frac{2}{(x+1)^2} dx.$$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó } I &= \int t^{2017} \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{2018}}{2018} + C = \frac{1}{2 \cdot 2018} \cdot \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^{2018} + C \\ &= \frac{1}{2 \cdot 2018} \cdot \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^{2018} + C = \frac{1}{2 \cdot 2018} \cdot \frac{(x-1)^{2018}}{(x+1)^{2018}} + C. \end{aligned}$$

Suy ra $a = 2 \cdot 2018, b = 2018, c = 2018$ nên $a + b + c = 4 \cdot 2018$.

VÍ DỤ 5. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x-2}$, thỏa mãn $F(3) = 1$ và $F(1) = 2$, giá trị của $F(0) + F(4)$ bằng

A. $2 \ln 2 + 3$.

B. $2 \ln 2 + 2$.

C. $2 \ln 2 + 4$.

D. $2 \ln 2$.

Lời giải

Chọn A

Hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

$$\text{Ta có: } F(x) = \int f(x) dx = \int \frac{1}{x-2} dx = \begin{cases} \ln(x-2) + C_1 & \text{khi } x > 2 \\ \ln(2-x) + C_2 & \text{khi } x < 2 \end{cases}.$$

$$\text{Do } \begin{cases} F(3) = 1 \\ F(1) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = 2 \end{cases}. \text{ Khi đó } F(x) = \begin{cases} \ln(x-2) + 1 & \text{khi } x > 2 \\ \ln(2-x) + 2 & \text{khi } x < 2 \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } F(0) + F(4) = (\ln 2 + 2) + (\ln 2 + 1) = 2 \ln 2 + 3.$$

VÍ DỤ 6. Cho $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{e^x + 1}$ và $F(0) = -\ln 2e$. Tập nghiệm S của phương trình $F(x) + \ln(e^x + 1) = 2$ là:

A. $S = \{3\}$.

B. $S = \{2; 3\}$.

C. $S = \{-2; 3\}$.

D. $S = \{-3; 3\}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } I = \int f(x) dx = \int \frac{1}{e^x + 1} dx = \int \frac{e^x}{e^x(e^x + 1)} dx.$$

$$\text{Đặt } t = e^x \Rightarrow dt = e^x dx. I = \int \frac{dt}{t(t+1)} = \int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} \right) dt = \ln t - \ln(t+1) + C = \ln e^x - \ln(e^x + 1) + C.$$

$$\text{Khi đó: } F(x) = \ln e^x - \ln(e^x + 1) + C, F(0) = -\ln 2e \Leftrightarrow -\ln 2 + C = -\ln 2 - 1 \Leftrightarrow C = -1$$

$$\text{Do đó: } F(x) = \ln e^x - \ln(e^x + 1) - 1.$$

$$F(x) + \ln(e^x + 1) = 2 \Leftrightarrow \ln e^x - \ln(e^x + 1) - 1 + \ln(e^x + 1) = 2 \Leftrightarrow \ln e^x = 3 \Leftrightarrow x = 3.$$

VÍ DỤ 7. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) + 2xf(x) = 2xe^{-x^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 1$. Tất cả các nguyên hàm của $x.f(x)e^{x^2}$ là

A. $(x^2 + 1)^2 + C$. **B.** $\frac{1}{2}(x^2 + 1)^2 e^{-x^2} + C$. **C.** $(x^2 + 1)^2 e^{-x^2} + C$. **D.** $\frac{1}{2}(x^2 + 1)^2 + C$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } f'(x) + 2xf(x) = 2xe^{-x^2} \Leftrightarrow e^{x^2} (f'(x) + 2xf(x)) = e^{x^2} \cdot 2xe^{-x^2} \Leftrightarrow (e^{x^2} f(x))' = 2x \\ \Rightarrow e^{x^2} f(x) = \int 2x dx = x^2 + C.$$

$$\text{Vì } f(0) = 1 \Leftrightarrow C = 1 \Rightarrow f(x) = (x^2 + 1)e^{-x^2}.$$

$$\text{Vậy } \int xf(x)e^{x^2} dx = \int x(x^2 + 1) dx = \frac{1}{2} \int (x^2 + 1) d(x^2 + 1) = \frac{1}{2} (x^2 + 1)^2 + C.$$

VÍ DỤ 8. Gọi $F(x)$ là nguyên hàm trên $\mathbb{R}$ của hàm số $f(x) = x^2 e^{ax}$ ($a \neq 0$), sao cho $F\left(\frac{1}{a}\right) = F(0) + 1$. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

A. $0 < a \leq 1$. **B.** $a < -2$. **C.** $a \geq 3$. **D.** $1 < a < 2$.

Lời giải

Chọn A

$$F(x) = \int x^2 e^{ax} dx. \text{ Đặt } \begin{cases} u = x^2 \\ dv = e^{ax} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2x dx \\ v = \frac{1}{a} e^{ax} \end{cases}.$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{1}{a} x^2 e^{ax} - \frac{2}{a} \int x e^{ax} dx = \frac{1}{a} x^2 e^{ax} - \frac{2}{a} A \quad (1)$$

$$\text{Xét } A = \int x e^{ax} dx. \text{ Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = e^{ax} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{a} e^{ax} \end{cases} \Rightarrow A = \frac{1}{a} x e^{ax} - \frac{1}{a} \int e^{ax} dx \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } F(x) = \frac{1}{a} x^2 e^{ax} - \frac{2}{a^2} x e^{ax} + \frac{2}{a^2} \int e^{ax} dx = \frac{1}{a} x^2 e^{ax} - \frac{2}{a^2} x e^{ax} + \frac{2}{a^3} e^{ax} + C.$$

$$\text{Mà } F\left(\frac{1}{a}\right) = F(0) + 1 \Rightarrow \frac{1}{a^3}e - \frac{2}{a^3}e + \frac{2}{a^3}e + C = \frac{2}{a^3} + 1 + C$$

$$\Rightarrow a^3 = e - 2 \Rightarrow a = \sqrt[3]{e - 2} \Rightarrow 0 < a \leq 1.$$

VÍ DỤ 9. Cho $I = \int_1^2 \frac{x + \ln x}{(x+1)^2} dx = \frac{a}{b} \ln 2 - \frac{1}{c}$ với a, b, c là các số nguyên dương và các phân số là phân số tối giản. Tính giá trị của biểu thức $S = \frac{a+b}{c}$.

A. $S = \frac{5}{6}$.

B. $S = \frac{1}{3}$.

C. $S = \frac{2}{3}$.

D. $S = \frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } I = \int_1^2 \frac{x + \ln x}{(x+1)^2} dx = \int_1^2 \frac{x}{(x+1)^2} dx + \int_1^2 \frac{\ln x}{(x+1)^2} dx.$$

$$\text{Xét } I_1 = \int_1^2 \frac{x}{(x+1)^2} dx. \text{ Đặt } t = x+1 \Rightarrow dt = dx.$$

$$I_1 = \int_2^3 \frac{t-1}{t^2} dt = \int_2^3 \frac{1}{t} dt - \int_2^3 \frac{1}{t^2} dt = \ln|t| \Big|_2^3 + \frac{1}{t} \Big|_2^3 = \ln \frac{3}{2} - \frac{1}{6}.$$

$$\text{Xét } I_2 = \int_1^2 \frac{\ln x}{(x+1)^2} dx = -\frac{1}{x+1} \ln x \Big|_1^2 + \int_1^2 \frac{1}{x(x+1)} dx = -\frac{1}{3} \ln 2 + \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx.$$

$$I_2 = -\frac{1}{3} \ln 2 + \ln \left| \frac{x}{x+1} \right| \Big|_1^2 = -\frac{1}{3} \ln 2 + \ln \frac{4}{3}. \text{ Do đó } I = \ln \frac{3}{2} - \frac{1}{6} - \frac{1}{3} \ln 2 + \ln \frac{4}{3} = \frac{2}{3} \ln 2 - \frac{1}{6}.$$

$$\Rightarrow S = \frac{a+b}{c} = \frac{2+3}{6} = \frac{5}{6}.$$