

Bài 1. (4,0 điểm)

Cho $P = \frac{x\sqrt{x} + 5\sqrt{x} - 12}{x - \sqrt{x} - 6} - \frac{2(\sqrt{x} - 3)}{\sqrt{x} + 2} + \frac{\sqrt{x} + 3}{3 - \sqrt{x}}$

- Tìm điều kiện xác định và rút gọn P
- Tìm giá trị nhỏ nhất của P

Bài 2. (3,0 điểm)

- Giải phương trình $x^2 - x - 4 = 2\sqrt{x-1}(1-x)$
- Tìm x, y thỏa mãn: $2(x\sqrt{y-4} + y\sqrt{x-4}) = xy$.

Bài 3. (5,0 điểm)

- Chứng minh rằng tích của 4 số tự nhiên liên tiếp cộng thêm 1 là số chính phương.
- Cho a, b, c là các số nguyên khác 0 thỏa mãn điều kiện:

Chứng minh rằng: $\frac{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc}{(a-b)(b-c)(c-a)}$ chia hết cho 3.

- Cho $0 < a, b, c < 1$. Chứng minh rằng: $2a^3 + 2b^3 + 2c^3 < 3 + a^2b + b^2c + c^2a$

Bài 4: (4 điểm)

Cho hai đường tròn (O) và (O') ở ngoài nhau. Đường nối tâm OO' cắt đường tròn (O) và (O') tại các điểm A, B, C, D theo thứ tự trên đường thẳng. Kẻ tiếp tuyến chung ngoài EF , $E \in (O)$ và $F \in (O')$. Gọi M là giao điểm của AE và DF ; N là giao điểm của EB và FC . Chứng minh rằng:

- Tứ giác $MENF$ là hình chữ nhật.
- $MN \perp AD$.
- Vẽ tiếp tuyến chung ngoài thứ hai của hai đường tròn, E' thuộc (O) và F' thuộc (O') . EF' cắt (O) tại P và (O') tại Q . Chứng minh $EP = QF'$

Bài 5: (4 điểm)

Từ điểm A ngoài đường tròn $(O; R)$ vẽ hai tiếp tuyến AB, AC đến (O) . Vẽ đường kính BD của (O) , vẽ $CK \perp BD$ tại K .

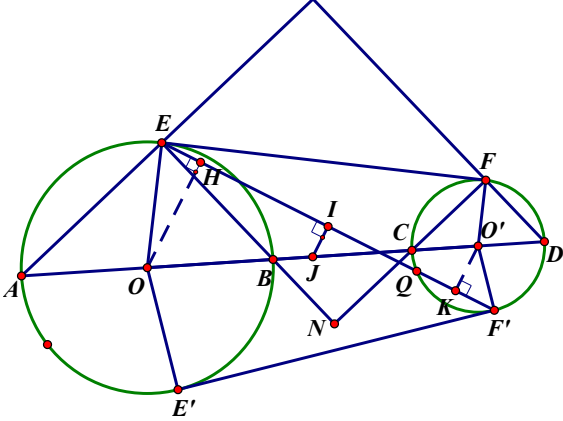
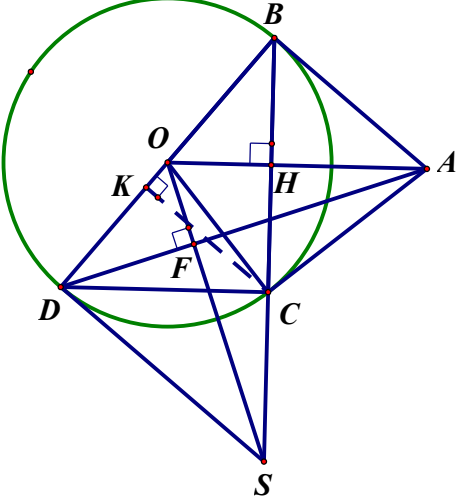
- Chứng minh rằng: $AC \cdot CD = CK \cdot AO$.
- Qua O vẽ đường thẳng vuông góc với AD tại F , cắt tia BC tại S . Chứng minh SD là tiếp tuyến của (O)
- Tia AO cắt BC tại H và cắt (O) tại M và N (M nằm giữa A và N). Chứng minh: $MH \cdot NA = MA \cdot NH$.

ĐÁP ÁN

Bài 1 (4,0 điểm)		
1)a	a- Đk : $x \geq 0, x \neq 9$ Vì $x \geq 0, x \neq 9$ ta có: $P = \frac{x\sqrt{x} + 5\sqrt{x} - 12}{(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 3)} - \frac{2(\sqrt{x} - 3)}{\sqrt{x} + 2} - \frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} - 3}$ $= \frac{x\sqrt{x} + 5\sqrt{x} - 12 - 2(\sqrt{x} - 3)^2 - (\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} + 2)}{(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 3)}$ $= \frac{x\sqrt{x} + 5\sqrt{x} - 12 - 2x + 12\sqrt{x} - 18 - x - 5\sqrt{x} - 6}{(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 3)}$ $= \frac{x\sqrt{x} - 3x + 12\sqrt{x} - 36}{(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 3)}$ $= \frac{x(\sqrt{x} - 3) + 12(\sqrt{x} - 3)}{(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 3)}$ $= \frac{(\sqrt{x} - 3)(x + 12)}{(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 3)}$ $= \frac{x + 12}{\sqrt{x} + 2}$	0,5 0,5 0,5 0,5
1)b	Vì $x \geq 0, x \neq 9$ ta có: $P = \frac{x + 12}{\sqrt{x} + 2} = \sqrt{x} - 2 + \frac{16}{\sqrt{x} + 2} = \sqrt{x} + 2 + \frac{16}{\sqrt{x} + 2} - 4$ Áp dụng bất đẳng thức cho hai số không âm $\sqrt{x} + 2$ và $\frac{16}{\sqrt{x} + 2}$ ta có: $\sqrt{x} + 2 + \frac{16}{\sqrt{x} + 2} \geq 2\sqrt{(\sqrt{x} + 2) \cdot \frac{16}{\sqrt{x} + 2}} = 8$ Dấu đẳng thức xảy ra $\sqrt{x} + 2 =$ $\frac{16}{\sqrt{x} + 2} \Leftrightarrow (\sqrt{x} + 2)^2 = 4^2 \Leftrightarrow x = 4 \text{ (TM)}$ Vậy giá trị nhỏ nhất của $P = 4 \Leftrightarrow x = 4$	0,5 0,25 0,5 0,25 0,5
Bài 2. (3,0 điểm)	a) Giải phương trình $x^2 - x - 4 = 2\sqrt{x - 1}(1 - x)$ Điều kiện: $x \geq 1$ (*). Ta có: $x^2 - x - 4 = 2\sqrt{x - 1}(1 - x)$ $\Leftrightarrow x^2 + 2x\sqrt{x - 1} + x - 1 - 2(x + \sqrt{x - 1}) - 3 = 0$ $\Leftrightarrow (x + \sqrt{x - 1})^2 - 2(x + \sqrt{x - 1}) - 3 = 0 \quad \text{Đặt } x + \sqrt{x - 1} = y$ (Điều kiện: $y \geq 1$ (**)), phương trình trở thành $y^2 - 2y - 3 = 0$.	0,25 0,25 0,25 0,25

	$y^2 - 2y - 3 = 0 \Leftrightarrow (y+1)(y-3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ y = 3 \end{cases}$ + Với $y = -1$ không thỏa mãn điều kiện (**). + Với $y = 3$ ta có phương trình: $x + \sqrt{x-1} = 3 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = 3-x \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 3 \\ x-1 = 9-6x+x^2 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 3 \\ x^2 - 7x + 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 3 \\ \begin{cases} x = 2 \\ x = 5 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \end{cases}$ Vậy phương trình có nghiệm $x = 2$.	0,25
		0,25
		0,25
2b	b) $2(x\sqrt{y-4} + y\sqrt{x-4}) = xy \Leftrightarrow x.2.\sqrt{y-4} + y.2.\sqrt{x-4} = xy$ Điều kiện: $x \geq 4; y \geq 4$ (*). Xét VT = $x.2.\sqrt{y-4} + y.2.\sqrt{x-4}$ theo BĐT Cosi: $2\sqrt{y-4} \leq \frac{4+y-4}{2} = \frac{y}{2}; 2\sqrt{x-4} \leq \frac{4+x-4}{2} = \frac{x}{2}$ Vậy VT $\leq xy = VP$ Dấu = xảy ra khi: $\begin{cases} \sqrt{x-4} = 2 \\ \sqrt{y-4} = 2 \end{cases} \Rightarrow x = y = 8$	0,25
		0,5
		0,25
		0,5
Bài 3. (5,0 điểm)	a) Gọi 4 số tự nhiên liên tiếp là $a, a+1, a+2, a+3$ (với $a \in \mathbb{N}$). Ta có: $a(a+1)(a+2)(a+3) + 1$ $= (a^2 + 3a)(a^2 + 3a + 2) + 1$ $= (a^2 + 3a + 1 - 1)(a^2 + 3a + 1 + 1) + 1$ $= (a^2 + 3a + 1)^2 - 1 + 1$ $= (a^2 + 3a + 1)^2 \text{ là số chính phương với mọi } a \in \mathbb{N}.$ Vậy tích của 4 số tự nhiên liên tiếp cộng thêm 1 là số chính phương.	0,25
		0,75
		0,5
3b	b) Từ giả thiết $\begin{cases} a+b+c=0 \\ a^2+b^2+c^2=3 \end{cases}$ Vì $a, b, c \neq 0$ nên $a + b + c = 0$ $\begin{cases} a+b+c=0 \\ a^2+b^2+c^2=3 \end{cases}$ Vậy $a^2 + b^2 + c^2 = 3$ với $a, b, c \in \mathbb{Z}$ <u>Lưu ý:</u> Nếu học sinh sử dụng hằng đẳng thức $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$ mà không chứng minh thì trừ 0,5 điểm.	0,5
		0,5
		0,5
3c	c) Do $a < 1 \Rightarrow a^2 < 1$ và $b < 1$ nên $(1 - a^2)(1 - b) > 0 \Rightarrow 1 + a^2b - a^2 - b > 0$	0,5®

	hay $1+a^2b > a^2+b$ (1) Mặt khác: $0 < a, b < 1 \Rightarrow a^2 > a^3; b > b^3$ $\Rightarrow b+a^2 > a^3+b^3$ Vậy $a^3+b^3 < 1+a^2b$ Tương tự ta có: $b^3+c^3 < 1+b^2c$ $a^3+c^3 < 1+c^2a$ $\Rightarrow 2a^3+2b^3+2c^3 < 3+a^2b+b^2c+c^2a$	0,5® 0,5® 0,5®
Bài 4: (4 điểm)		
	a) Chứng minh rằng: Tứ giác MENF là hình chữ nhật. Ta có $\angle AEB = \angle FDC = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) Vì EF là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (O) và (O'), nên: $OE \perp EF$ và $O'F \perp EF \Rightarrow OE \parallel O'F$ $\Rightarrow \angle EOB = \angle FO'D$ (góc đồng vị) $\Rightarrow \angle EAO = \angle FO'C$ Do đó $MA \parallel FN$, mà $EB \perp MA \Rightarrow EB \perp FN$ Hay $\angle ENF = 90^\circ$. Tứ giác MENF có $\angle E = \angle N = \angle F = 90^\circ$, nên MENF là hình chữ nhật	0,5 đ 0,5 đ 0,25 đ 0,25 đ
	b) Chứng minh rằng: $MN \perp AD$. Gọi I là giao điểm của MN và EF; H là giao điểm của MN và AD Vì MENF là hình chữ nhật, nên $\angle ENF = \angle MNE$ Mặt khác, trong đường tròn (O'): $\angle FNC = \angle FDC = \frac{1}{2}$ số đo $\angle C$ $\Rightarrow \angle FDC = \angle HNC$ Suy ra $\triangle FDC \sim \triangle HNC$ (g – g) $\Rightarrow \angle NHC = \angle FNC = 90^\circ$ hay $MN \perp AD$	0,25 đ 0,25 đ 0,25 đ 0,25 đ 0,5 đ
	c) Vẽ tiếp tuyến chung ngoài thứ hai của hai đường tròn, E' thuộc (O) và F' thuộc (O'). EF' cắt (O) tại P và (O') tại Q. Chứng minh $EP = QF'$ + Chứng minh được 4 điểm A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn (J)	0,25 đ

	+vẽ OH,JI,O'K cùng vuông góc với EF' Xét (M) Ta có $IE = IF'$ (đường kính vuông góc với dây) $IP = IQ$ (Ba đường thẳng song song cách đều) Suy ra $HE = KF'$ Nên $EP = QF'$	0,25 đ 0,25 đ 0,25 đ
		
Bài 5: (4 điểm)		

	a) (1,0 điểm) Xét $\triangle ACO$ và $\triangle CKD$, có: $\widehat{OCA} = \widehat{KCK} = 90^\circ$ $\widehat{KDC} = \widehat{COA} (= \widehat{BOA})$ Vậy $\triangle ACO \sim \triangle CKD (g - g) \Rightarrow \frac{AC}{AO} = \frac{CK}{CD} \Rightarrow AC.CD = AO.CK$. b) (2 điểm) Xét (O) , ta có: $AB = AC$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) và $OB = OC = R$ nên OA là đường trung trực của BC $\Rightarrow OA \perp BC \text{ tại } H .$ $\triangle SHO \sim \triangle AFO (g - g) \Rightarrow \frac{SO}{OA} = \frac{HO}{FO}$ $\Rightarrow OH.OA = OS.OF$ $\triangle ABO$ vuông tại B ,đường cao BH $\Rightarrow OH.OA = OB^2 = R^2 \qquad \qquad \qquad \Rightarrow OS.OF = R^2 = OD^2$ $\Rightarrow \frac{SO}{OD} = \frac{OD}{OF}$ $\widehat{O}$ chung $\triangle SOD \sim \triangle DOF (c - g - c)$ $\Rightarrow \widehat{SDO} = \widehat{DFO} = 90^\circ$ $\Rightarrow SD \perp DO$ $D \in (O)$ Vậy SD là tiếp tuyến của (O) c) (2 điểm) Ta có: N, B, M cùng thuộc đường tròn (O) , đường kính NM $\Rightarrow \triangle MBN \text{ vuông tại } B \Rightarrow BM \perp BN .$ Khi đó: $\widehat{NBO} = \widehat{BNO}$ ($\triangle BOC$ cân tại O) và $\widehat{BNO} = \widehat{MBH}$ (cùng phụ $\widehat{BMN}$) $\Rightarrow \widehat{NBO} = \widehat{MBH} \text{ (3)}$ Ta có: $\begin{cases} \widehat{ABM} + \widehat{MBO} = 90^\circ \\ \widehat{NBO} + \widehat{MBO} = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \widehat{ABM} = \widehat{NBO} \text{ (4)}$ Từ (3), (4) $\Rightarrow \widehat{MBH} = \widehat{ABM}$	1 điểm 0,5 điểm 0,5 điểm 0,5 điểm 0,5 điểm 0,25 điểm 0,25 điểm
--	---	---

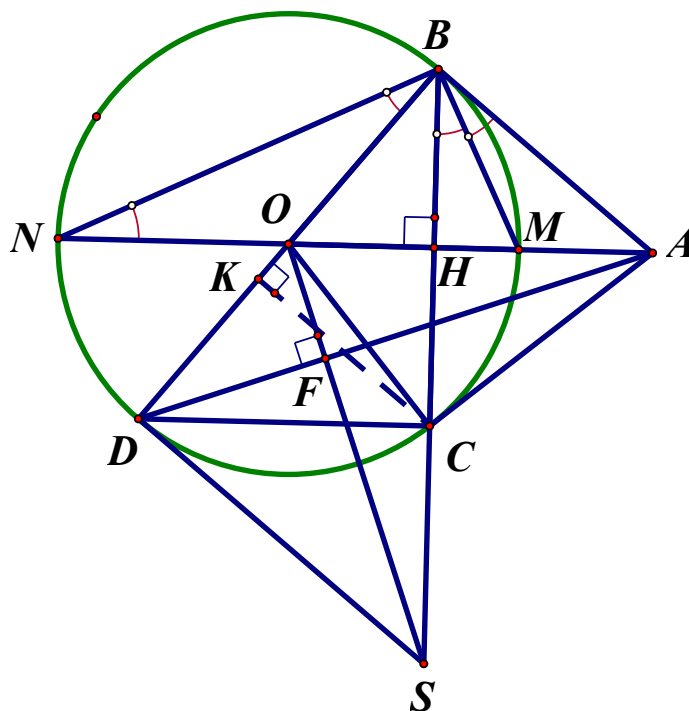
$$\Rightarrow BM \text{ là phân giác trong của } \triangle ABH (5) \Rightarrow \frac{HM}{MA} = \frac{BH}{BA} (*)$$

mà $BM \perp BN (6)$

$$\text{Từ } (5), (6) \Rightarrow BN \text{ là phân giác ngoài } \triangle ABH \Rightarrow \frac{NH}{NA} = \frac{BH}{BA} (**)$$

$$\text{Từ } (*), (**) \Rightarrow \frac{MH}{MA} = \frac{NH}{NA} \Rightarrow MH \cdot NA = NH \cdot MA. \quad \text{điều })$$

Hết.



- Chú ý: HS có thể sử dụng các cách khác, nếu làm đúng vẫn được tính điểm.