

Chương I. PHÉP NHÂN VÀ PHÉP CHIA CÁC ĐA THỨC

Chuyên đề 3. PHÂN TÍCH ĐA THỨC THÀNH NHÂN TỬ

A. Kiến thức cần nhớ

1. Phân tích đa thức thành nhân tử (hay thừa số) là biến đổi đa thức đó thành một tích của các đa thức khác.

2. Các phương pháp thường dùng:

- Đặt nhân tử chung
- Dùng hằng đẳng thức
- Nhóm các hạng tử
- Phối hợp nhiều phương pháp. Có khi ta phải dùng những phương pháp đặt biệt khác (xem chuyên đề 6)

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử :

$$a) 12x^3y - 6x^2y + 3x^2y^2$$

$$b) 5x^2y(x - 7) - 5xy(7 - x)$$

Giải

Tìm cách giải. Quan sát đề bài, chúng ta thấy các đa thức trên đều có nhân tử chung

Bước 1. Chọn hệ số là UCLN của các hệ số.

Bước 2. Phần biến gồm tất cả các biến chung, mỗi biến lấy với số mũ nhỏ nhất của nó trong các hạng tử.

Nếu trong đó có hai nhân tử đối nhau, chúng ta đổi dấu một trong hai nhân tử và dấu đứng trước nó.

Trình bày lời giải.

$$a) 12x^3y - 6x^2y + 3x^2y^2 = 3x^2y^2(4x - 2 + y)$$

$$b) 5x^2y(x - 7) - 5xy(7 - x) = 5x^2y(x - 7) + 5xy(x - 7) = 5xy(x - 7)(x + 1)$$

Ví dụ 2: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

$$a) 100x^2 - 9y^2$$

$$b) 9(a + b)^2 - 4(a - 2b)^2$$

$$c) 8x^3 + 27y^3$$

$$d) 125 - 75x + 9x^2 - x^3$$

Giải

Tìm cách giải. Nhận thấy trong ví dụ này mỗi đa thức đều có dạng hằng đẳng thức. Do vậy chúng ta vận dụng hằng đẳng thức để phân tích đa thức thành nhân tử.

Trình bày lời giải

$$a) 100x^2 - 9y^2 = (10x - 3y)(10x + 3y)$$

$$b) 9(a + b)^2 - 4(a - 2b)^2$$

$$= [3(a + b) - 2(a - 2b)][3(a + b) + 2(a - 2b)] = (a - 7b)(5a - b)$$

$$c) 8x^3 + 27y^3 = (2x + 3y)(4x^2 - 6xy + 9y^2)$$

$$d) 125 - 75x + 15x^2 - x^3 = (5 - x)^3$$

Ví dụ 3: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

$$a)x(a+b)+a+b$$

$$b)3a^2x - 3a^2y + abx - aby$$

$$c)ax + bx + cx + 2a + 2b + 2c$$

Giải

Tìm cách giải. Mỗi đa thức trên không có nhân tử chung, không xuất hiện hằng đẳng thức. Quan sát kỹ nhận thấy nếu nhóm các hạng tử thích hợp thì xuất hiện nhân tử chung.

Trình bày lời giải

$$a)x(a+b)+a+b=(a+b)(x+1)$$

$$b)3a^2x - 3a^2y + abx - aby = 3a^2(x - y) + ab(x - y) = a(x - y)(3a + b)$$

$$c)ax + bx + cx + 2a + 2b + 2c = x(a + b + c) + 2(a + b + c) = (x + 2)(a + b + c)$$

Ví dụ 4: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

$$a)a^2 - b^2 - 4a + 4b$$

$$b)(xy + 4)^2 - (2x + 2y)^2$$

$$c)(a^2 + b^2 + ab)^2 - a^2b^2 - b^2c^2 - c^2a^2$$

Giải

Tìm cách giải. Nhận thấy mỗi đa thức đều ẩn chứa trong đó hằng đẳng thức.

Vậy chúng ta có thể nhóm nhằm xuất hiện hằng đẳng thức

Trình bày lời giải

$$a)(a - b)(a + b) - 4(a - b) = (a - b)(a + b - 4)$$

$$b)(xy + 4 + 2x + 2y)(xy + 4 - 2x - 2y)$$

$$= (x(y + 2) + 2(y + 2))(x(y - 2) - 2(y - 2))$$

$$= (x + 2)(y + 2)(x - 2)(y - 2)$$

$$c)(a^2 + b^2 + ab - ab)(a^2 + b^2 + ab + ab) - c^2(a^2 + b^2)$$

$$= (a^2 + b^2)(a + b)^2 - c^2(a^2 + b^2)$$

$$= (a^2 + b^2) \left[(a + b)^2 - c^2 \right] = (a^2 + b^2)(a + b + c)(a + b - c)$$

Ví dụ 5: Cho các số thực a, b, c đôi một phân biệt và thỏa mãn

$$a^2(b + c) = b^2(c + a) = 2012$$

Tính giá trị biểu thức $M = c^2(a + b)$

(Tuyển sinh 10, trường THPT chuyên trường ĐHSPT Hà Nội, năm học 2012-2013)

Giải

Tìm cách giải. Từ giả thiết chúng ta không thể tính giá trị cụ thể của a, b, c. Do vậy bằng việc quan sát và nghĩ tới việc phân tích đa thức thành nhân tử để tìm mối quan hệ giữa a, b và c. Từ đó tìm được giá trị biểu thức M.

Trình bày lời giải

Ta có :

$$a^2(b+c) = b^2(c+a) \Leftrightarrow a^2b + a^2c - b^2c - b^2a = 0$$

$$\Leftrightarrow ab(a-b) + c(a^2 - b^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)(ab+bc+ca) = 0$$

Vì $a \neq b$ nên:

$$\Rightarrow ab+bc+ca = 0$$

$$\Rightarrow (b-c)(ab+bc+ca) = 0 \Rightarrow b^2a + b^2c - bc^2 - ac^2$$

$$\Rightarrow b^2a + b^2c = bc^2 + ac^2 \Rightarrow c^2(a+b) = b^2(a+c)$$

Vậy $M = 2012$

C. Bài tập vận dụng

3.1. Phân tích đa thức sau thành nhân tử:

a) $ab(x-2) - a^2(x-2)$

b) $4x^3y^2 - 8x^2y^3 + 12x^3y$

Hướng dẫn giải – đáp số

a) $ab(x-2) - a^2(x-2) = a(x-2)(a+b)$

b) $4x^3y^2 - 8x^2y^3 + 12x^3y = 4x^2y(xy - 2y^2 + 3x)$

3.2. Phân tích đa thức sau thành nhân tử:

a) $(xy+1)^2 - (x+y)^2$

b) $(a+b+c)^2 + (a+b-c)^2 - 4c^2$

c) $(a^2+9)^2 - 36a^2$

Hướng dẫn giải – đáp số

a) $(xy+1)^2 - (x+y)^2 = (xy+1-x-y)(xy+1+x+y)$

$$= [x(y-1)+1-y] [x(y+1)+y+1]$$

$$= (x-1)(y-1)(x+1)(y+1)$$

b) $(a+b+c)^2 + (a+b-c+2c)(a+b-c-2c)$

$$= (a+b+c)^2 + (a+b+c)(a+b-3c)$$

$$= (a+b+c)(a+b+c+a+b-3c)$$

$$= (a+b+c)(2a+2b-2c) = 2(a+b+c)(a+b-c)$$

c) $(a^2+9)^2 - 36a^2 = (a^2+9-6a)(a^2+9+6a) = (a-3)^2(a+3)^2$

3.3. Phân tích đa thức sau thành nhân tử :

a) $3a - 3b + a^2 - 2ab + b^2$

b) $a^2 + 2ab + b^2 - 2a - 2b + 1$

$$c) 4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2$$

Hướng dẫn giải – đáp số

$$a) 3(a - b) + (a - b)^2 = (a - b)(3 + a - b)$$

$$b) (a + b)^2 - 2(a + b) + 1 = (a + b - 1)^2$$

$$c) (2bc + b^2 + c^2 - a^2)(2bc - b^2 - c^2 + a^2)$$

$$= [(b + c)^2 - a^2] [a^2 - (b - c)^2]$$

$$= (b + c + a)(b + c - a)(a + b - c)(a - b + c)$$

3.4. Phân tích đa thức sau thành nhân tử :

$$a) x^2 - 4xy + 4y^2 - 9a^2$$

$$b) xy(a^2 + b^2) - ab(x^2 + y^2)$$

$$c) x^2(a - b) - 2xy(a - b) + ay^2 - by^2$$

$$d) 8xy^3 - x(x - y)^3$$

Hướng dẫn giải – đáp số

$$a) x^2 - 4xy + 4y^2 - 9a^2 = (x - 2)^2 - (3a)^2 = (x - 2 - 3a)(x - 2 + 3a)$$

$$b) xy(a^2 + b^2) - ab(x^2 + y^2) = xya^2 + xyb^2 - abx^2 - aby^2$$

$$= (xya^2 - abx^2) + (xyb^2 - aby^2)$$

$$= ax(ay - bx) + by(bx - ay) = (ay - bx)(ax - by)$$

$$c) x^2(a - b) - 2xy(a - b) + ay^2 - by^2 = x^2(a - b) - 2xy(a - b) + y^2(a - b)$$

$$= (a - b)(x^2 - 2xy + y^2) = (a - b)(x - y)^2$$

$$d) 8xy^3 - x(x - y)^3 = x[(2y)^3 - (x - y)^3]$$

$$= x(2y - x + y)[4y^2 + 2y(x - y) + (x - y)^2] = x(3y - x)(x^2 + 3y^2)$$

3.5. Phân tích đa thức sau thành nhân tử :

$$a) A = x^2 - 4x^2y^2 + y^2 + 2xy$$

$$b) B = x^6 - y^6$$

$$c) C = 4xy(x^2 + y^2) - 6(x^3 + y^3 + x^2y + xy^2) + 9(x^2 + y^2)$$

$$d) D = 25 - a^2 + 2ab - b^2$$

Hướng dẫn giải – đáp số

$$a) A = x^2 + 2xy + y^2 - 4x^2y^2 = (x + y)^2 - 4x^2y^2$$

$$= (x + y - 2xy)(x + y + 2xy)$$

$$b) B = (x^3 - y^3)(x^3 + y^3) = (x - y)(x^2 + xy + y^2)(x + y)(x^2 - xy + y^2)$$

$$c) C = 4xy(x^2 + y^2) - 6(x^2 + y^2)(x + y) + 9(x^2 + y^2)$$

$$= (x^2 + y^2)(4xy - 6x - 6y + 9)$$

$$= (x^2 + y^2)[2x(2y - 3) - 3(2y - 3)]$$

$$= (x^2 + y^2)(2x - 3)(2y - 3)$$

$$d) D = 25 - (a^2 - 2ab + b^2) = 25 - (a - b)^2$$

$$= (5 + a - b)(5 - a + b)$$

3.6. Phân tích đa thức thành nhân tử :

$$a) x^3 + 3x^2y - 4xy^2 - 12y^3$$

$$b) x^3 + 4y^2 - 2xy + x^2 + 8y^3$$

$$c) 3x^2(a - b + c) + 36xy(a - b + c) + 108y^2(a - b + c)$$

$$d) a(x^2 + 1) - x(a^2 + 1)$$

Hướng dẫn giải – đáp số

$$a) x^3 + 3x^2y - 4xy^2 - 12y^3$$

$$= x^2(x + 3y) - 4y^2(x + 3y)$$

$$= (x - 2y)(x + 2y)(x + 3y)$$

$$b) x^3 + 8y^3 + x^2 - 2xy + 4y^2$$

$$= (x + 2y)(x^2 - 2xy + 4y^2) + (x^2 - 2xy + 4y^2)$$

$$= (x + 2y + 1)(x^2 - 2xy + 4y^2)$$

$$c) 3(a - b + c)(x^2 + 12xy + 36y^2)$$

$$= 3(a - b + c)(x + 6y)^2$$

$$d) ax^2 + a - xa^2 - x$$

$$= ax(x - a) - (x - a)$$

$$= (x - a)(ax - 1)$$

3.7. Phân tích đa thức thành nhân tử :

$$a) x^3 - 1 + 5x^2 - 5 + 3x - 3$$

$$b) a^5 + a^4 + a^3 + a^2 + a + 1$$

$$c) x^3 - 3x^2 + 3x - 1y^3$$

$$d) 5x^3 - 3x^2y - 45xy^2 + 27y^3$$

Hướng dẫn giải – đáp số

$$a) (x - 1)(x^2 + x + 1) + 5(x - 1)(x + 1) + 3(x - 1)$$

$$= (x - 1)(x^2 + x + 1 + 5x + 5 + 3)$$

$$=(x-1)(x^2+6x+9)$$

$$=(x-1)(x+3)^2$$

$$b)a^3(a^2+a+1)+(a^2+a+1)$$

$$=(a^2+a+1)(a^3+1)$$

$$=(a^2+a+1)(a+1)(a^2-a+1)$$

$$c)(x-1)^3-y^3=(x-1-y)\left[(x-1)^2+(x-1)y+y^2\right]$$

$$=(x-y-1)(x^2-2x+1+xy-y+y^2)$$

$$d)x^2(5x-3y)-9y^2(5x-3y)$$

$$=(5x-3y)(x^2-9y^2)$$

$$=(5x-3y)(x-3y)(x+3y)$$

3.8. Phân tích đa thức thành nhân tử :

$$a)x^3-x^2-x+1$$

$$b)x^4-x^2+2x-1$$

$$c)4a^2b^2-(a^2+b^2-1)^2$$

Hướng dẫn giải – đáp số

$$a)x^2(x-1)-(x-1)=(x-1)(x^2-1)+(x-1)^2(x+1)$$

$$b)x^4-(x-1)^2=(x^2-x+1)(x^2+x-1)$$

$$c)(2ab+a^2+b^2-1)(2ab-a^2-b^2+1)$$

$$=\left[(a+b)^2-1\right]\left[1-(a-b)^2\right]$$

$$=(a+b+1)(a+b-1)(1+a-b)(1-a+b)$$

3.9. Cho x, y, z là độ dài 3 cạnh của 1 tam giác

Đặt $A=4x^2y^2-(x^2+y^2-z^2)^2$. Chứng minh rằng $A>0$

Hướng dẫn giải – đáp số

Dùng hằng đẳng thức đáng nhớ, phân tích A thành nhân tử, ta được :

$$A=(2xy+x^2+y^2-z^2)(2xy-x^2-y^2+z^2)$$

$$=\left[(x+y)^2-z^2\right]\left[z^2-(x-y)^2\right]=(x+y+z)(x+y-z)(z+x-y)(y+z-x)$$

Do x, y, z là 3 cạnh của 1 tam giác, suy ra :

$$x+y+z>0, x+y-z>0, z+x-y>0, y+z-x>0 \Rightarrow A>0$$

3.10. Cho các số a, b lần lượt thỏa mãn các hệ thức : $\begin{cases} a^3 - 3a^2 + 5a - 17 = 0 \\ b^3 - 3b^2 + 5b + 11 = 0 \end{cases}$

Tính $a + b$

Hướng dẫn giải – đáp số

Cộng vế theo vế của hai hằng đẳng thức ta được :

$$a^3 - 3a^2 + 5a - 17 + b^3 - 3b^2 + 5b + 11 = 0$$

$$\Leftrightarrow a^3 - 3a^2 + 3a - 1 + b^3 - 3b^2 + 3b - 1 + 2(a - b - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a - 1)^3 + (b - 1)^3 + 2(a - 1 - b + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a + b - 2)(a^2 + a + 1 + b^2 + b + 1 + 2) = 0$$

$$\text{Vì } a^2 + a + 1 + b^2 + b + 1 + 2 = \left(a + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{2}\right)^2 + 3\frac{1}{2} > 0 \Rightarrow a + b = 2$$

3.11. Cho a, b, c thỏa mãn $a + b + c = abc$. Chứng minh rằng:

$$a(b^2 - 1)(c^2 - 1) + b(a^2 - 1)(c^2 - 1) + c(a^2 - 1)(b^2 - 1) = 4abc$$

Hướng dẫn giải – đáp số

Xét vế trái, ta có :

$$a(b^2 - 1)(c^2 - 1) + b(a^2 - 1)(c^2 - 1) + c(a^2 - 1)(b^2 - 1)$$

$$= a(b^2c^2 - b^2 - c^2 + 1) + b(a^2c^2 - a^2 - c^2 + 1) + c(a^2b^2 - a^2 - b^2 + 1)$$

$$= ab^2c^2 - ab^2 - ac^2 + a + a^2bc^2 - a^2b - bc^2 + b + a^2b^2c - a^2c - b^2c + a$$

$$= (a + b + c) - (a^2b + ab^2 - a^2b^2c) - (ac^2 + a^2c - a^2bc^2) - (bc^2 + b^2c - ab^2c^2)$$

$$= abc - ab(a + b - abc) - ac(c + a - abc) - bc(c + b - abc)$$

$$= abc + abc + abc + abc = 4abc$$