PHÒNG GIÁO DỤC & ĐÀO TẠO	**ĐỀ KHẢO SÁT ĐỘI TUYỂN**
TX NGHI SƠN	**DỰ THI HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH**
	Năm học 2023 - 2024
ĐỀ THI CHÍNH THỨC	**Môn: Toán - Lớp 9**
(Đề thi gồm có 01 trang)	Thời gian: **150 phút** *(không kể thời gian giao đề)*

Câu I. (4,0 điểm):

1. Rút gọn biểu thức: $A=\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{4-x^2}}\left[\sqrt{(2+x)^3}-\sqrt{(2-x)^3}\right]}{4+\sqrt{4-x^2}}$

2. Tính giá trị của biểu thức $A=x^2y^2z^2$, biết x, y, z là các số thực thỏa mãn:

$$\frac{1}{x^2(y-z)}=\frac{-3}{5};\quad \frac{1}{y^2(z-x)}=\frac{1}{3};\quad \frac{1}{z^2(x-y)}=3.$$

Câu II. (4,0 điểm):

1. Giải phương trình: $\sqrt[3]{81x-8}=x^3-2x^2+\dfrac{4}{3}x-2$.

2. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2(y+1)=6y-2 \\ x^4y^2+2x^2y^2+y(x^2+1)=12y^2-1 \end{cases}$

Câu III. (4,0 điểm):

1. Tìm các cặp số nguyên dương (x, y) với x, y nguyên tố cùng nhau và thỏa mãn phương trình: $2(x^3-x)=y^3-y$

2. Cho x, y là các số nguyên thỏa mãn: $x^3+y^3+x^2+y^2+xy-1$ chia hết cho $xy+x+y+1$ Chứng minh rằng x^4+y^9 chia hết cho $y+1$.

Câu IV. (6,0 điểm): Cho tam giác AMN cố định và cân tại A. Gọi I là trung điểm của MN, đường tròn (I) tiếp xúc với AM, AN lần lượt tại D và E. Về phía ngoài tam giác AMN; lấy điểm F thay đổi thuộc đường tròn (I), tiếp tuyến tại F của đường tròn (I) cắt tia AM ở B, cắt tia AN ở C.

1. Chứng minh hai tam giác BMI và INC đồng dạng.

2. Gọi A’ là điểm đối xứng với A qua E, B’ là điểm đối xứng với B qua F. Đường thẳng EF cắt AB’, BA’ lần lượt tại K và H. Chứng minh tam giác DHK là tam giác cân.

3. Tìm vị trí của F trên (I) để diện tích tam giác ABC nhỏ nhất.

Câu V. (2,0 điểm): Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn a + 2b + 3c = 1.

Chứng minh rằng: $\dfrac{2ab}{a^2+4b^2}+\dfrac{6bc}{4b^2+9c^2}+\dfrac{3ca}{9c^2+a^2}+\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{2b}+\dfrac{1}{3c}\right)\ge\dfrac{15}{4}$

Họ, tên thí sinh……………………….Chữ ký giám thị 1…………………

Số báo danh……………………….Chữ ký giám thị 1…………………

ĐÁP ÁN VÀ BIỂU CHẤM
Môn: Toán - Lớp 9
Năm học 2023 - 2024
(Đáp án gồm có 08 trang)

<table>
<tr><th>Câu</th><th>Đáp án</th><th>Biểu điểm</th></tr>
<tr><td>I
(4đ)</td><td>1. Rút gọn biểu thức:
$$A=\frac{\sqrt{2+\sqrt{4-x^2}}\left[\sqrt{(2+x)^3}-\sqrt{(2-x)^3}\right]}{4+\sqrt{4-x^2}}$$
ĐKXĐ: $-2\le x\le 2$
Đặt $a=\sqrt{2+x};\ b=\sqrt{2-x}\quad (a,\ b\ge 0)$
$\Rightarrow a^2+b^2=4;\ a^2-b^2=2x$
$\Rightarrow A=\frac{\sqrt{2+ab}\left(a^3-b^3\right)}{4+ab}=\frac{\sqrt{2+ab}(a-b)\left(a^2+b^2+ab\right)}{4+ab}$
$\Rightarrow A=\frac{\sqrt{2+ab}(a-b)(4+ab)}{4+ab}=\sqrt{2+ab}(a-b)$
$\Rightarrow A\sqrt{2}=\sqrt{4+2ab}(a-b)$
$\Rightarrow A\sqrt{2}=\sqrt{\left(a^2+b^2+2ab\right)}(a-b)=(a+b)(a-b)$
$\Rightarrow A\sqrt{2}=a^2-b^2=2x$
$\text{Vay } A=x\sqrt{2}$</td><td>0,5

0,5

0,5

0,5</td></tr>
<tr><td></td><td>2. Tính giá trị của biểu thức $A=x^2y^2z^2$, biết x, y, z là các số thực thỏa mãn:
$$\frac{1}{x^2(y-z)}=\frac{-3}{5};\quad \frac{1}{y^2(z-x)}=\frac{1}{3};\quad \frac{1}{z^2(x-y)}=3.$$
Từ giả thiết ta có: $x^2(y-z)=\frac{-5}{3}$ (1), $y^2(z-x)=3$ (2), $z^2(x-y)=\frac{1}{3}$ (3).
Nhân theo vế các đẳng thức (1), (2), (3) ta được:
$x^2y^2z^2(x-y)(y-z)(z-x)=\frac{-5}{3}$ (4)
Cộng theo vế các đẳng thức (1), (2), (3) ta được:
$x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)=\frac{5}{3}$</td><td>0,5

0,5</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td></td>
<td>Phân tích đa thức $x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)$ thành nhân tử được:
$x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)=-(x-y)(y-z)(z-x)$.
Do đó $(x-y)(y-z)(z-x)=\dfrac{-5}{3}\quad(5)$. Từ (4) và (5) suy ra: A = 1.</td>
<td>0,5

0,5</td>
</tr>
<tr>
<td>II

(4đ)</td>
<td>1) Tìm các cặp số nguyên dương (x, y) với x, y nguyên tố cùng nhau và thỏa mãn phương trình $2\left(x^3-x\right)=y^3-y$ (1)

Phương trình (1) $\Leftrightarrow x^3+x^3+(-y)^3=x+x-y=2x-y$.

$\Leftrightarrow x^3+x^3+(-y)^3-3xx(-y)+3xx(-y)=2x-y$

Áp dụng hằng đẳng thức

$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\right)$ ta có
$(x+x-y)\left(x^2+x^2+y^2-xx+xy+xy\right)-3x^2y=2x-y$

$\Leftrightarrow (2x-y)\left(x^2+2xy+y^2\right)-(2x-y)=3x^2y$

$\Leftrightarrow (2x-y)\left[(x+y)^2-1\right]=3x^2y$ (2)

$\Rightarrow 3x^2y\,\vdots\,2x-y$ (3)

Đặt $UCLN\left(x^2,2x-y\right)=d\ \left(d\in N^*\right)$
$\Rightarrow \begin{cases}x^2\,\vdots\,d\\2x-y\,\vdots\,d\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4x^2\,\vdots\,d\\(2x-y)(2x+y)\,\vdots\,d\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4x^2\,\vdots\,d\\4x^2-y^2\,\vdots\,d\end{cases}$

$\Rightarrow y^2\,\vdots\,d\Rightarrow\begin{cases}x^2\,\vdots\,d\\y^2\,\vdots\,d\end{cases}$ mà $(x,y)=1\Rightarrow d=1$ nên từ (3) $\Rightarrow 3y\,\vdots\,2x-y$ (4).

Mặt khác để ý $2x-y\,\vdots\,2x-y\Rightarrow 6x-3y\,\vdots\,2x-y$ (5) . Từ (4) và (5) $\Rightarrow 6x\,\vdots\,2x-y$

Tương tự ta có $(x,y)=1\Rightarrow(x,2x-y)=1\Rightarrow 6\,\vdots\,2x-y$.

Từ $(2)\Rightarrow 2x-y\in N^*\Rightarrow 2x-y\in U(6)=\{1;2;3;6\}$

- Xét $2x-y=1\Rightarrow y=2x-1$. Từ (2) ta có $(3x-1)^2-1=3x^2(2x-1)\Leftrightarrow x(x-1)^2=0$

mà $x\in N^*\Rightarrow x=1\Rightarrow y=1$ (thỏa mãn)</td>
<td>0,5

0,5

0,5</td>
</tr>
</table>

- Xét $2x-y=2$. Thay vào (2) ta có $x^3-4x^2+4x-1=0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2-3x+1)=0$

Mà $x\in N^* \Rightarrow x=1 \Rightarrow y=0$ (loại)

- Xét $2x-y=3 \Rightarrow y=2x-3$. Thay vào (2) ta có $x^3 - 6x^2 + 9x - 4 = 0$

$$\Leftrightarrow 2(x-1)^2(x-4)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=4 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=-1\,(loai) \\ y=5 \end{array}\right.$$

- Xét $2x-y=6 \Rightarrow y=2x-6$. Thay vào (2) ta có $x^3-12x^2+36x-35=0$.

Do $y\in Z^+$ nên x là ước của 35 và $x>3 \Rightarrow x\in\{5;7;35\}$. Thử lại không có giá trị nào thỏa mãn. 0,5

Vậy phương trình có 2 cặp nghiệm (x;y) = (1;1) và (x;y) = (4;5)

---

2. Cho x, y là các số nguyên thỏa mãn $x^3+y^3+x^2+y^2+xy-1$ chia hết cho $xy+x+y+1$. Chứng minh rằng x^4+y^9 chia hết cho $y+1$.

Ta có: $xy+x+y+1=(x+1)(y+1)$.

$$x^3+y^3+x^2+y^2+xy-1=(x^2-1)(x+1)+(y^2-1)(y+1)+(xy+x+y+1)$$ 0,5

Do đó, để phép chia có nghĩa thì $x\neq -1, y\neq -1$ và giả thiết bài toán tương đương 0,5

với $(x^2-1)(x+1)+(y^2-1)(y+1)$ chia hết cho $(x+1)(y+1)$ hay $\frac{x^2-1}{y+1}+\frac{y^2-1}{x+1}\in Z.$

Hiển nhiên $\frac{x^2-1}{y+1},\frac{y^2-1}{x+1}$ là các số hữu tỉ nên ta có thể đặt $\frac{x^2-1}{y+1}=\frac{a}{b};\quad \frac{y^2-1}{x+1}=\frac{c}{d}$ với a, b, c, d là các số nguyên và $b>0, d>0, (a,b)=1, (c,d)=1.$ Khi đó:

$$\frac{x^2-1}{y+1}+\frac{y^2-1}{x+1}=\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}\in Z.$$ 0,5

$$\Rightarrow ad+bc \,\vdots\, bd \Rightarrow ad+bc \,\vdots\, b \Rightarrow ad \,\vdots\, b \Rightarrow d \,\vdots\, b \quad (vi\,(a,b)=1) \quad (1)$$

Mặt khác

$$\frac{a}{b}.\frac{c}{d}=\frac{x^2-1}{y+1}.\frac{y^2-1}{x+1}=(x-1)(y-1)\in Z \Rightarrow ac \,\vdots\, bd \Rightarrow ac \,\vdots\, d \Rightarrow a \,\vdots\, d\ (vi\,(c,d)=1)\,(2)$$

0,5

	Từ (1), (2) suy ra $a \vdots b \Rightarrow b = 1\,(vì\; b > 0, (a,b) = 1) \Rightarrow \frac{x^2 - 1}{y+1} = a \in Z \Rightarrow x^2 - 1 \vdots y+1$ $\Rightarrow x^4 + y^9 = (x^4 - 1) + (y^9 + 1) = (x^2 - 1)(x^2 + 1) + (y^3 + 1)(y^6 - y^3 + 1) \vdots y+1$ Vậy $x^4 + y^9$ chia hết cho $y+1$.	
III (4đ)	**Giải phương trình:** $\sqrt[3]{81x - 8} = x^3 - 2x^2 + \frac{4}{3}x - 2$. + Điều kiện xác định: $\forall x \in R$. + Đặt: $\sqrt[3]{81x - 8} + 2 = 3y \Rightarrow 81x - 8 = (3y - 2)^3$ $\Leftrightarrow 81x = 27y^3 - 54y^2 + 36y$ $\Leftrightarrow 3x = y^3 - 2y^2 + \frac{4}{3}y$ + Kết hợp đề bài, ta có: $\begin{cases} 3x = y^3 - 2y^2 + \frac{4}{3}y \\ 3y = x^3 - 2x^2 + \frac{4}{3}x \end{cases}$ $\Rightarrow (x - y)\left(x^2 + xy + y^2 - 2x - 2y + \frac{13}{3}\right) = 0$ + Ta có: $x^2 + xy + y^2 - 2x - 2y + \frac{13}{3}$ $= \frac{1}{2}(x+y)^2 + \frac{1}{2}(x-2)^2 + \frac{1}{2}(y-2)^2 + \frac{1}{3} > \forall x; y.$ $\Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow x = y$. $\Rightarrow 3x = x^3 - 2x^2 + \frac{4}{3}x \Leftrightarrow x\left(x^2 - 2x - \frac{5}{3}\right) = 0$ $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \frac{3 \pm 2\sqrt{6}}{3} \end{array}\right.$ * Vậy phương trình có tập nghiệm $\left\{0; \frac{3 \pm 2\sqrt{6}}{3}\right\}$	0,5 0,5 0,5 0,5

<table>
<tr>
<td></td>
<td>

2. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2(y+1)=6y-2 \\ x^4y^2+2x^2y^2+y(x^2+1)=12y^2-1 \end{cases}$.

+ Xét xới y=0, hệ phương trình không có nghiệm.
+ Ta có:

$$HPT \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+\dfrac{x^2}{y}=6-\dfrac{2}{y} \\ x^4+2x^2+\dfrac{x^2+1}{y}=12-\dfrac{1}{y^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+\dfrac{x^2}{y}=6-\dfrac{2}{y} \\ (x^2+1)^2+\dfrac{x^2+1}{y}+\dfrac{1}{y^2}=13 \end{cases}$$

+ Đặt: $u=x^2+1; v=\dfrac{1}{y}$.

Ta có: $\begin{cases} u-1+(u-1)v=6-2v \\ u^2+uv+v^2=13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v+uv=7 \\ u^2+uv+v^2=13 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} u+v=4 \\ uv=3 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} u=1; v=3 \\ u=3; v=1 \end{array} \right.$ hoặc $\begin{cases} u+v=-5 \\ uv=12 \end{cases}$ (vô nghiệm)

+ TH1: $\begin{cases} x^2+1=1 \\ \dfrac{1}{y}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=\dfrac{1}{3} \end{cases}$

+ TH2: $\begin{cases} x^2+1=3 \\ \dfrac{1}{y}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm\sqrt{2} \\ y=1 \end{cases}$ (vô nghiệm).

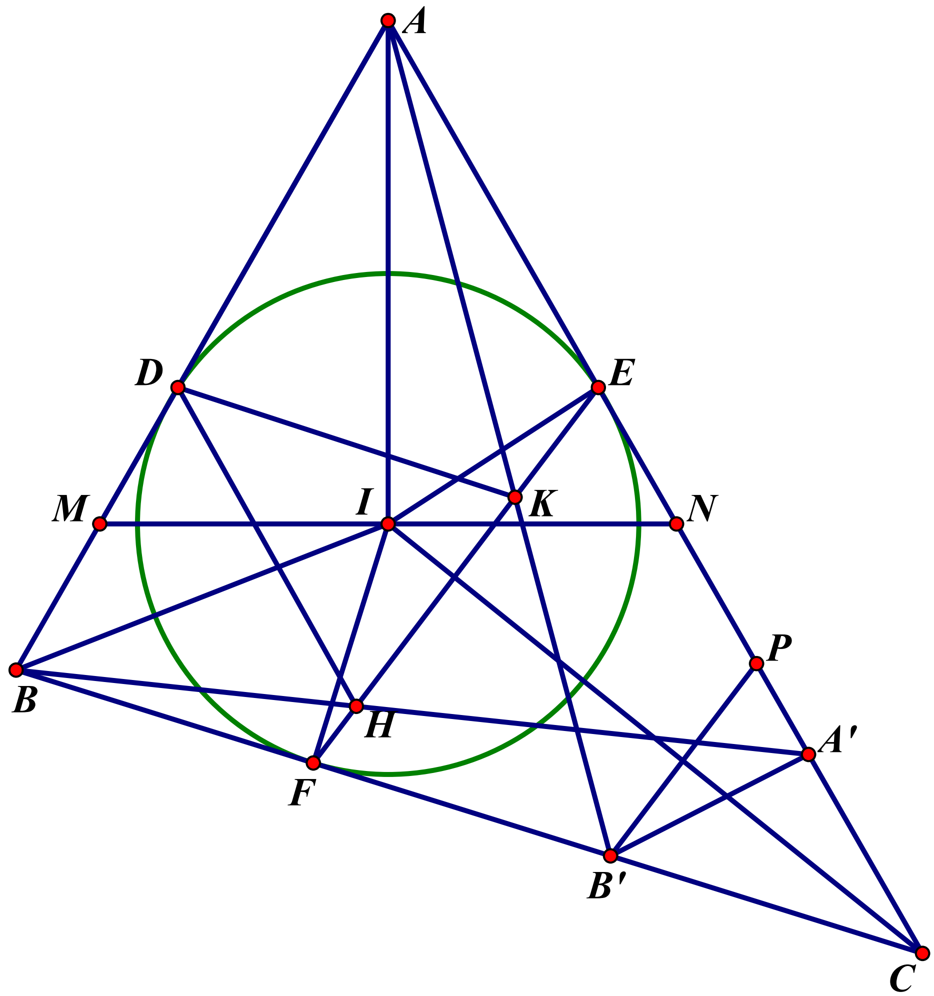
* Vậy hệ phương trình có nghiệm: $\left(0;\dfrac{1}{3}\right);(\sqrt{2};1)(-\sqrt{2};1)$.

</td>
<td>0,5

0,5

0,5

0,5</td>
</tr>
<tr>
<td>IV
(6đ)</td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
</table>



1) Chứng minh hai tam giác BMI và INC đồng dạng.

+ Vì AB, AC, BC là các tiếp tuyến của (I)

Áp dụng tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau, ta có:

$$\widehat{BIC}=\frac{1}{2}\left(\widehat{FID}+\widehat{FIE}\right)=\frac{1}{2}\left(360^0-\widehat{DIE}\right)$$

$$=180^0-\frac{1}{2}\widehat{DIE}=180^0-\widehat{DIA}$$ 0,5

ΔAMN cân tại A, phân giác AI đồng thời là đường cao.

$\Rightarrow$ ΔAIM vuông tại I, đường cao ID 0,5

$\Rightarrow$ $\widehat{DIA}=\widehat{DMI}$ (cùng phụ với $\widehat{DIM}$)

$\Rightarrow$ $\widehat{BIC}=180^0-\widehat{DMI}=\widehat{BMI}$

0,5

+ Kết hợp $\widehat{IBC}=\widehat{MBI}$ $\Rightarrow$ ΔBMI và ΔBIC đồng dạng (g-g)

+ Tương tự ΔINC và ΔBIC đồng dạng.

$\Rightarrow \Delta BMI$ và ΔBIC đồng dạng.

0,5

2) Chứng minh tam giác DHK là tam giác cân.

+ Kẻ $B'P//EF$ $(P\in AC)$.

0,5

Ta có: $\dfrac{KB'}{KA}=\dfrac{EP}{EA}$

+ Theo t/c hai tiếp tuyến cắt nhau $\Rightarrow C\hat{E}F=C\hat{F}E$.

0,5

$\Rightarrow$ Tứ giác $B'PEF$ là hình thang cân => $EP=FB'$

$$\Rightarrow \frac{EP}{EA}=\frac{FB'}{EA}=\frac{FB}{DA}=\frac{DB}{DA}$$ (vì $EA=DA;FB'=FB=DB$)

$$\Rightarrow \frac{KB'}{KA}=\frac{DB}{DA}\Rightarrow KD//BC$$

0,5

$\Rightarrow C\hat{F}E=D\hat{K}H$ (sole trong)

+ Tương tự, ta có: $HD//AC\Rightarrow C\hat{E}F=D\hat{H}K$.

+ Mà: $C\hat{E}F=C\hat{F}E\Rightarrow D\hat{H}K=D\hat{K}H$.

0,5

=> Tam giác DHK là tam giác cân tại D.

3) Tìm vị trí của F trên (I) để diện tích tam giác ABC nhỏ nhất.

+ Ta có: $S_{ABC}=S_{AMN}+S_{BMNC}$.

+ Trong đó: $S_{AMN}=\dfrac{1}{2}AI.MN$ (không đổi).

$$S_{BMNC}=S_{BIM}+S_{INC}+S_{BIC}$$
$$=\frac{1}{2}ID.MB+\frac{1}{2}IE.NC+\frac{1}{2}IF.BC$$

0,5

Đặt $ID=IE=IF=r$ (không đổi)

$$S_{BMNC}=\frac{r}{2}(MB+NC+BC)=\frac{r}{2}(MB+NC+BF+CF)$$
$$=\frac{r}{2}(MB+NC+BD+CE)$$

$$=\frac{r}{2}(BM+CN+BM+MD+CN+NE)$$

	$=\frac{r}{2}(2BM+2CN+2MD)$ *(Vì AD=AE$\Rightarrow$ MD=NE)* $=r\left[(BM+CN)+MD\right]\ge r\left(2\sqrt{BM.CN}+MD\right)$	0,5
	+ Vì ΔBMI và ΔBIC đồng dạng $\Rightarrow \frac{BM}{IN}=\frac{MI}{NC}\Rightarrow BM.NC=MI.IN=MI^2=\frac{MN^2}{4}$. $\Rightarrow S_{ABC}\ge r\left(2.\frac{MN}{2}+MD\right)=r(MN+MD)$ không đổi.	0,5
	+ Dấu "=" xảy ra khi $BM=NC\Rightarrow AB=AC$ $\Rightarrow \Delta ABC$ cân tại $A\Rightarrow AI\perp BC$, mà $IF\perp BC$ $\Rightarrow A,I,F$ thẳng hàng. $\Rightarrow F$ là giao điểm của *AI* với đường tròn *(I)*.	0,5
V (2đ)	**Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn a + 2b + 3c = 1.** **Chứng minh rằng:** $\frac{2ab}{a^2+4b^2}+\frac{6bc}{4b^2+9c^2}+\frac{3ca}{9c^2+a^2}+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{3c}\right)\ge\frac{15}{4}$ **Đẳng thức xảy ra khi nào?** Vì a + 2b + 3c = 1 nên $\frac{1}{a}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{3c}=\frac{a+2b+3c}{a}+\frac{a+2b+3c}{2b}+\frac{a+2b+3c}{3c}$ $=3+\left(\frac{a}{2b}+\frac{2b}{a}\right)+\left(\frac{2b}{3c}+\frac{3c}{2b}\right)+\left(\frac{3c}{a}+\frac{a}{3c}\right)$ $=3+\frac{a^2+4b^2}{2ab}+\frac{4b^2+9c^2}{6bc}+\frac{9c^2+a^2}{3ca}$	0,5
	Do đó bất đẳng thức phải chứng minh tương đương với: $\left(\frac{2ab}{a^2+4b^2}+\frac{a^2+4b^2}{8ab}\right)+\left(\frac{6bc}{4b^2+9c^2}+\frac{4b^2+9c^2}{24bc}\right)+\left(\frac{3ca}{9c^2+a^2}+\frac{9c^2+a^2}{12ca}\right)\ge 3$ (1)	0,5
	Áp dụng bất đẳng thức Cô – si cho hai số dương, ta có: $\frac{2ab}{a^2+4b^2}+\frac{a^2+4b^2}{8ab}\ge 2\sqrt{\frac{2ab}{a^2+4b^2}.\frac{a^2+4b^2}{8ab}}=1$ (2) Tương tự: $\frac{6bc}{4b^2+9c^2}+\frac{4b^2+9c^2}{24bc}\ge 1$ (3) $\frac{3ca}{9c^2+a^2}+\frac{9c^2+a^2}{12ca}\ge 1$ (4)	0,5
	Cộng theo vế các bất đẳng thức (2), (3), (4) ta suy ra (1). Suy ra đpcm.	0,5

	Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi a $= \frac{1}{3}$; b = $\frac{1}{6}$; c = $\frac{1}{9}$	

Chú ý: *Học sinh làm cách khác đúng vẫn cho điểm tối đa. Bài hình không vẽ hình hoặc vẽ hình sai không chấm điểm.*