PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO PHÙ CÁT	KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP HUYỆN LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2023-2024 KHÓA NGÀY 07/10/2023

Môn thi: **Toán**
Thời gian: **150 phút** (không kể thời gian phát đề)
Ngày thi: **07/10/2023** *(Đề thi gồm 01 trang)*

Bài 1 (4,5 điểm).

Cho biểu thức $A=\frac{x\sqrt{x}-3}{x-2\sqrt{x}-3}-\frac{2\left(\sqrt{x}-3\right)}{\sqrt{x}+1}+\frac{\sqrt{x}+3}{3-\sqrt{x}}\quad (x\ge 0; x\ne 9)$

a/ Rút gọn biểu thức A.

b/ Tính giá trị của biểu thức A với $x=14-6\sqrt{5}$.

c/ Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức A.

Bài 2 (4,0 điểm).

1/ Giải phương trình: $\sqrt{x^2+8x+15}=3\sqrt{x+3}+2\sqrt{x+5}-6$

2/ Giải bất phương trình: $\sqrt{(x+5)(3x+4)}>4(x-1)$

Bài 3 (4,0 điểm).

1/ Cho x, y là các số không âm thỏa mãn $x^2+y^2\le 2$. Chứng minh rằng: $x\sqrt{3x(x+2y)}+y\sqrt{3y(y+2x)}\le 6$

2/ Cho các số thực x, y thỏa mãn $x^2+y^2-xy=4$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x^2+y^2$.

Bài 4 (5,0 điểm). Cho đường tròn (O; R), cát tuyến d cắt đường tròn (O) tại C và D, điểm K di động trên đường thẳng d sao cho điểm K nằm ngoài đường tròn (O) (C nằm giữa K và D). Tiếp tuyến tại C và D của đường tròn (O) cắt nhau tại M. Từ K kẻ tiếp tuyến KA, KB với đường tròn (O) (A, B là các tiếp điểm). Gọi I là giao điểm của AB và OK, H là giao điểm của OM và CD. Chứng minh rằng:

a/ OI.OK = OH.OM

b/ Khi K thay đổi trên đường thẳng d thì đường thẳng AB luôn đi qua điểm cố định.

Bài 5 (2,5 điểm).

Cho ΔABC có các đường trung tuyến BM và CN vuông góc với nhau $(M \in AC, N \in AB)$. Chứng minh rằng: $\cot B + \cot C \ge \frac{2}{3}$.

------------------- HẾT-------------------

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
PHÙ CÁT

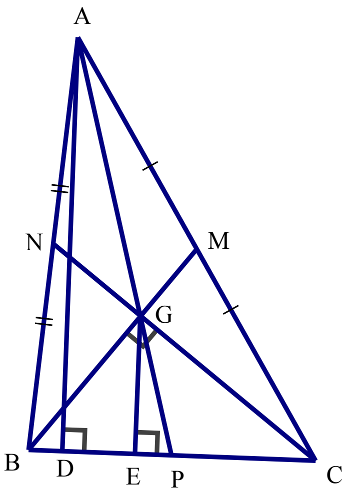
KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP HUYỆN
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2023-2024
KHÓA NGÀY 07/10/2023

Hướng dẫn chấm đề thi học sinh giỏi Toán 9 *(HDC gồm 04 trang)*

Bài	Nội dung	Điểm
1 (4,5 điểm)	a/ $A=\frac{x\sqrt{x}-3}{x-2\sqrt{x}-3}-\frac{2(\sqrt{x}-3)}{\sqrt{x}+1}+\frac{\sqrt{x}+3}{3-\sqrt{x}}\quad (x\ge 0; x\ne 9)$ $=\frac{x\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)}-\frac{2(\sqrt{x}-3)}{\sqrt{x}+1}-\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-3}$	0,5
	$=\frac{x\sqrt{x}-3-2(\sqrt{x}-3)^2-(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)}$	0,5
	$=\frac{x\sqrt{x}-3-2x+12\sqrt{x}-18-x-4\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)}$	0,5
	$=\ldots=\frac{x+8}{\sqrt{x}+1}$	0,5
	b/ Ta có: $x=14-6\sqrt{5}=(3-\sqrt{5})^2\quad (1)$	0,5
	Thay (1) vào biểu thức A ta được: $A=\frac{14-6\sqrt{5}+8}{\sqrt{(3-\sqrt{5})^2}+1}=\frac{22-6\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}+1}=\frac{22-6\sqrt{5}}{4-\sqrt{5}}=\frac{58-2\sqrt{5}}{11}$ Vậy $A=\frac{58-2\sqrt{5}}{11}$ với $x=14-6\sqrt{5}$	0,5
	c/ Điều kiện: $x\ge 0; x\ne 9$ Ta có: $A=\frac{x+8}{\sqrt{x}+1}=\frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)+9}{\sqrt{x}+1}$ $=\sqrt{x}-1+\frac{9}{\sqrt{x}+1}=\sqrt{x}+1+\frac{9}{\sqrt{x}+1}-2$	0,5
	Áp dụng bất đẳng thức Cauchy đối với hai số không âm $\sqrt{x}+1$ và $\frac{9}{\sqrt{x}+1}$ ta được:	

	$\sqrt{x}+1+\dfrac{9}{\sqrt{x}+1}\ge 2\sqrt{\left(\sqrt{x}+1\right).\dfrac{9}{\sqrt{x}+1}}=2.3=6$ Do đó $A\ge 4$	0,5
	Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow \sqrt{x}+1=\dfrac{9}{\sqrt{x}+1}\Leftrightarrow \left(\sqrt{x}+1\right)^2=9\Leftrightarrow \sqrt{x}+1=3\Leftrightarrow x=4(TM)$ Vậy giá trị nhỏ nhất của A là 4 khi x = 4.	0,5
2 (4,0 điểm)	a/ Điều kiện: $x\ge -3$ $\sqrt{x^2+8x+15}=3\sqrt{x+3}+2\sqrt{x+5}-6$ $\Leftrightarrow \sqrt{(x+3)(x+5)}-3\sqrt{x+3}=2\sqrt{x+5}-6$	0,5
	$\Leftrightarrow \sqrt{x+3}\left(\sqrt{x+5}-3\right)=2\left(\sqrt{x+5}-3\right)$ $\Leftrightarrow \left(\sqrt{x+5}-3\right)\left(\sqrt{x+3}-2\right)=0$	0,5
	$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x+5}-3=0\\ \sqrt{x+3}-2=0\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x+5}=3\\ \sqrt{x+3}=2\end{array}\right.$	0,5
	$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x+5=9\\ x+3=4\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=4\\ x=1\end{array}\right.(TM)$ Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\{4;1\}$	0,5
	$b/\ \sqrt{(x+5)(3x+4)}>4(x-1)\ (1)$ $TH1: x<1$ $(1)\Leftrightarrow (x+5)(3x+4)\ge 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\le -5\\ x\ge \dfrac{-4}{3}\end{array}\right.$ Kết hợp với điều kiện ta được $x\le -5$ hoặc $\dfrac{-4}{3}\le x<1$	1,0
	$TH2: x\ge 1$ $(1)\Leftrightarrow (x+5)(3x+4)>16\left(x^2-2x+1\right)$ $\Leftrightarrow ...\Leftrightarrow 13x^2-51x-4<0\Leftrightarrow \dfrac{-1}{13}<x<4$ Kết hợp với điều kiện ta được $1\le x<4$ Kết hợp cả hai trường hợp ta được $x\le -5$ hoặc $\dfrac{-4}{3}\le x<4$ Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=\{x / x\le -5$ hoặc $\dfrac{-4}{3}\le x<4\}$	1,0
	a/ Áp dụng bất đẳng thức Cauchy đối với 2 số không âm 3x; x + 2y	

3 (4,0 điểm)	ta được: $x\sqrt{3x(x+2y)} \le x\frac{3x+x+2y}{2} = x(2x+y) = 2x^2+xy \ (1)$	0,5
	Áp dụng bất đẳng thức Cauchy đối với 2 số không âm 3y; y + 2x ta được: $y\sqrt{3y(y+2x)} \le y\frac{3y+y+2x}{2} = y(2y+x) = 2y^2+xy \ (2)$	0,5
	Cộng (1) và (2) vế theo vế ta được: $x\sqrt{3x(x+2y)}+y\sqrt{3y(y+2x)} \le 2(x^2+y^2)+2xy \le 4+2xy \ \le 4+x^2+y^2 \ \le 6$ Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=y=1$	1,0
	b/ Ta có: $8 = x^2+y^2+x^2+y^2-2xy = x^2+y^2+(x-y)^2 \ge x^2+y^2 = P$ Do đó $P \le 8$	0,5
	Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x-y=0 \\ x^2+y^2-xy=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x \\ x^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=\pm 2$ Vậy giá trị lớn nhất của P là 8 khi $x=y=2$ hoặc $x=y=-2$	0,5
	Mặc khác: $8 = 2(x^2+y^2)-2xy = 3(x^2+y^2)-(x+y)^2 \le 3(x^2+y^2) = 3P$ Do đó $P \ge \frac{8}{3}$	0,5
	Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ x^2+y^2-xy=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x \\ 3x^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-y \\ x=\pm\frac{2}{\sqrt{3}} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{2}{\sqrt{3}}, y=\frac{-2}{\sqrt{3}} \\ x=\frac{-2}{\sqrt{3}}, y=\frac{2}{\sqrt{3}} \end{array}\right.$ Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{8}{3}$ khi $x=\frac{2}{\sqrt{3}}, y=\frac{-2}{\sqrt{3}}$ hoặc $x=\frac{-2}{\sqrt{3}}, y=\frac{2}{\sqrt{3}}$	0,5
4 (5,0 điểm)	Vẽ hình đúng	0,5
	a/ C/m: OI.OK = OH.OM Ta có: +) KA = KB; OA = OB $\Rightarrow$ OK là đường trung trực của đoạn thẳng AB $\Rightarrow OK \perp AB$	0,5
	+) ΔAKO vuông tại A, đường cao AI $\Rightarrow OI.OK = OA^2 = R^2 \ (1)$	0,5

	+) MC = MD; OC = OD $\Rightarrow$ OM là đường trung trực của đoạn thẳng CD $\Rightarrow OM \perp CD$	0,5
	+) ΔCOM vuông tại C, đường cao CH $\Rightarrow OH.OM = OC^2 = R^2$ (1) Từ (1) và (2) suy ra OI.OK = OH.OM	0,5
	b/ C/m: AB đi qua điểm cố định. Ta có: OI.OK = OH.OM $\Rightarrow \dfrac{OI}{OH} = \dfrac{OM}{OK}$ ΔOIM và ΔOHK có: $\widehat{KOM}$ chung; $\dfrac{OI}{OH} = \dfrac{OM}{OK}$ $\Rightarrow \Delta OIM \backsim \Delta OHK$ (c.g.c)	1,0
	$\Rightarrow \widehat{MIO} = \widehat{KHO} = 90^0$ (vì 2 góc tương ứng) $\Rightarrow MI \perp OI$ hay $MI \perp OK$ mà $AB \perp OK$ hay $AI \perp OK$ nên M, I, A thẳng hàng $\Rightarrow$ M, A, B thẳng hàng	1,0
	Vì C, D, O cố định nên M cố định. Vậy AB luôn đi qua điểm cố định M khi K thay đổi trên đường thẳng d.	0,5
5 (2,5 điểm)	 Gọi G là giao điểm của BM và CN, P là giao điểm của AG và BC. ΔABC có G là giao điểm của hai đường trung tuyến BM, CN nên G là trọng tâm của ΔABC $\Rightarrow \dfrac{GP}{AP} = \dfrac{1}{3}$; $PB = PC$	0,5
	Vẽ $AD \perp BC$ tại D, $GE \perp BC$ tại E $\Rightarrow GE // AD$	0,5
	+) ΔPAD, có GE // AD $\Rightarrow \dfrac{GE}{AD} = \dfrac{GP}{AP} = \dfrac{1}{3}$ (theo hệ quả của định lí Talet) $\Rightarrow AD = 3GE$ +) ΔGBC vuông tại G có GP là đường trung tuyến	

	$\Rightarrow GP = \frac{1}{2}BC \Rightarrow BC = 2GP$	0,5
	+) $GE \le GP$ (vì GE là cạnh góc vuông của tam giác vuông GEP) $\Rightarrow \frac{GP}{GE} \ge 1$ +) ΔDAB vuông tại D, có $\cot B = \frac{BD}{AD}$ +) ΔDAC vuông tại D có $\cot C = \frac{DC}{AD}$	0,5
	Do đó ta có: $\cot B + \cot C = \frac{BD}{AD} + \frac{DC}{AD} = \frac{BC}{AD} = \frac{2GP}{3GE} \ge \frac{2}{3}$ Vậy $\cot B + \cot C \ge \frac{2}{3}$	0,5

<u>Ghi chú:</u> Mọi cách giải khác đúng, lập luận chặt chẽ đều cho điểm tối đa theo biểu điểm từng câu, từng bài của hướng dẫn chấm.