

Người làm: Hoàng Thị Hồng Ngọc

Zalo: Ngọc Hoàng

- số đt zalo: 0963856290

Email: Ngochth.hnue@gmail.com

CĐ2: TÌM ẨN CHƯA BIẾT

Dạng 1. Tìm x thông thường

A. Trắc nghiệm (nếu có)

Câu 1. (HSG 7 huyện Lạng Giang, tỉnh Bắc Giang 2022 - 2023)

Cho $\sqrt{\frac{25}{4}} - \frac{3}{2}x = \frac{11}{6}$. Căn bậc hai số học của x bằng:

A. $\frac{4}{9}$

B. $\frac{2}{3}$

C. $\frac{16}{81}$

D. $\frac{1}{2}$

Lời giải

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{25}{4}} - \frac{3}{2}x &= \frac{11}{6} \\ \Rightarrow \frac{5}{2} - \frac{3}{2}x &= \frac{11}{6} \\ \Rightarrow \frac{3}{2}x &= \frac{5}{2} - \frac{11}{6} = \frac{2}{3} \\ \Rightarrow x &= \frac{4}{9}\end{aligned}$$

Căn bậc hai số học của x bằng $\frac{2}{3}$.

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 thành phố Sầm Sơn, tỉnh Thanh Hoá 2022 - 2023)

Tìm x biết: $\frac{5}{11} + \frac{6}{11} : x = \frac{5}{22}$.

Lời giải

$$\begin{aligned}\frac{5}{11} + \frac{6}{11} : x &= \frac{5}{22} \\ \frac{6}{11} : x &= \frac{5}{22} - \frac{5}{11} \\ \frac{6}{11} : x &= \frac{-5}{22} \\ x &= \frac{6}{11} : \frac{-5}{22} \\ x &= \frac{-12}{5} \\ \text{Vậy } x &= \frac{-12}{5}.\end{aligned}$$

Câu 2. (HSG 7 thành phố Chí Linh 2022 - 2023)

Tìm x , biết $\frac{11}{13} - \left(\frac{5}{42} - x \right) = - \left(\frac{15}{28} - \frac{11}{13} \right)$.

Lời giải

$$\frac{11}{13} - \left(\frac{5}{42} - x \right) = - \left(\frac{15}{28} - \frac{11}{13} \right)$$

$$\frac{11}{13} - \frac{5}{42} + x = - \frac{15}{28} + \frac{11}{13}$$

$$x = - \frac{15}{28} + \frac{5}{42}$$

$$x = - \frac{5}{12}$$

$$x = - \frac{5}{12}$$

Vậy

Câu 3. (HSG 7 huyện Nghĩa Đàn, tỉnh Nghệ An 2022 - 2023)

Tìm x biết: $\frac{-8}{13} + \left(\frac{-7}{5} - x \right) = \frac{-1}{2}$

Lời giải

$$\frac{-8}{13} + \left(\frac{-7}{5} - x \right) = \frac{-1}{2}$$

$$\frac{-7}{5} - x = \frac{3}{26}$$

$$x = \frac{-7}{5} - \frac{3}{26}$$

$$x = \frac{-197}{130}$$

$$x = \frac{-197}{130}$$

Vậy

Câu 4. (HSG 7 huyện Quốc Oai, Hà Nội 2022 - 2023)

Tìm x biết: $(0,4x - 2) - (1,5x + 1) - (-4x - 0,8) = 3,6$

Lời giải

$$(0,4x - 2) - (1,5x + 1) - (-4x - 0,8) = 3,6$$

$$0,4x - 2 - 1,5x - 1 + 4x + 0,8 = 3,6$$

$$x(0,4 - 1,5 + 4) = 3,6 + 2 + 1 - 0,8$$

$$2,9x = 5,8$$

$$x = 2$$

$$\text{Vậy } x = 2$$

Dạng 2. Đưa về dạng tích bằng 0

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 huyện Mường Lát, tỉnh Thanh Hoá 2022 - 2023)

Tìm x biết: $x^2 - 2023x = 0$

Lời giải

$$x^2 - 2023x = 0$$

$$x(x - 2023) = 0$$

Suy ra $x = 0$ hoặc $x - 2023 = 0$

Suy ra $x=0$ hoặc $x=2023$

Vậy $x=0$ hoặc $x=2023$.

Dạng 3. Sử dụng tính chất lũy thừa

A. Trắc nghiệm (nếu có)

Câu 1. (HSG 7 huyện Thanh Sơn, tỉnh Phú Thọ 2022 - 2023)

Biết x thỏa mãn $\frac{16}{x+1} = \frac{x+1}{4}$. Tổng các giá trị của x là:

- A. 0 B. 8 C. - 8 D. - 2

Lời giải

Ta có

$$\frac{16}{x+1} = \frac{x+1}{4}$$

$$(x+1)^2 = 16.4$$

$$(x+1)^2 = 64$$

$$(x+1)^2 = 8^2$$

$$x+1=8 \text{ hoặc } x+1=-8$$

$$x=7 \text{ hoặc } x=-9$$

Tổng các giá trị của x là: $7+(-9)=-2$.

Câu 2. (HSG 7 huyện Lạng Giang, tỉnh Bắc Giang 2022 - 2023)

Biết rằng x là số hữu tỉ thỏa mãn: $(2x-1)^2 - 1 = 0$. Tích của các số đó là:

- A. 1 B. - 1 C. 0 D. 2

Lời giải

$$(2x-1)^2 - 1 = 0 \Rightarrow (2x-1)^2 = 1$$

$$\Rightarrow 2x-1=1 \text{ hoặc } 2x-1=-1$$

$$\Rightarrow x=1 \text{ hoặc } x=0$$

Tích của các số hữu tỉ x là: $1 \cdot 0 = 0$.

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 huyện Tương Dương, tỉnh Nghệ An 2022 - 2023)

Tìm x , biết: $\left(x - \frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{243}$.

Lời giải

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{243} \text{ hay } \left(x - \frac{1}{2}\right)^5 = \left(\frac{1}{3}\right)^5$$

Từ đó suy ra:

$$x - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

$$x = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$$

$$x = \frac{5}{6}$$

$$\text{Vậy } x = \frac{5}{6}.$$

Câu 2. (HSG 7 huyện Tương Dương, tỉnh Nghệ An 2022 - 2023)

Tìm x , biết: $3^{x+2} + 4 \cdot 3^{x+1} + 3^{x-1} = 6^6$.

Lời giải

$$\begin{aligned} 3^{x+2} + 4 \cdot 3^{x+1} + 3^{x-1} &= 6^6 \\ 3^3 \cdot 3^{x-1} + 4 \cdot 3^2 \cdot 3^{x+1} + 3^{x-1} &= 6^6 \\ 3^{x-1} \cdot (3^3 + 4 \cdot 3^2 + 1) &= 6^6 \\ 3^{x-1} \cdot 64 &= 6^6 \\ 3^{x-1} \cdot 2^6 &= 6^6 \\ 3^{x-1} &= 6^6 : 2^6 \\ 3^{x-1} &= 3^6 \\ \text{Suy ra } x - 1 &= 6 \\ \text{Vậy } x &= 7. \end{aligned}$$

Câu 3. (HSG 7 huyện Ninh Giang, tỉnh Hải Dương 2022 - 2023)

Tìm x , biết: $4^x + 5 \cdot 2^{2x+1} = 176$.

Lời giải

$$\begin{aligned} 4^x + 5 \cdot 2^{2x+1} &= 176 \\ 2^{2x} + 5 \cdot 2^{2x} \cdot 2 &= 176 \\ 2^{2x} (1 + 10) &= 176 \\ 2^{2x} &= 16 \\ 2^{2x} &= 2^4 \\ 2x &= 4 \\ x &= 2 \\ \text{Vậy } x &= 2. \end{aligned}$$

Câu 4. (HSG 7 huyện Chương Mỹ, Hà Nội 2022 - 2023)

Tìm x biết: $2^x + 2^{x+2} = 160$.

Lời giải

$$\begin{aligned} 2^x + 2^{x+2} &= 160 \\ 2^x + 2^x \cdot 4 &= 160 \\ 2^x \cdot 5 &= 160 \\ 2^x &= 32 = 2^5 \\ x &= 5 \\ \text{Vậy } x &= 5. \end{aligned}$$

Câu 5. (HSG 7 huyện Hà Trung, tỉnh Thanh Hoá 2022 - 2023)

Tìm x biết: $\frac{7^{x+2} + 7^{x+1} + 7^x}{57} = \frac{5^{2x} + 5^{2x+1} + 5^{2x+3}}{131}$.

Lời giải

$$\frac{7^{x+2} + 7^{x+1} + 7^x}{57} = \frac{5^{2x} + 5^{2x+1} + 5^{2x+3}}{131}$$

$$\frac{7^x(7^2 + 7 + 1)}{57} = \frac{5^{2x}(1 + 5 + 5^3)}{131}$$

$$7^x = 25^x$$

$$x = 0$$

Vậy $x = 0$.

Câu 6. (HSG 7 huyện Nghi Xuân, tỉnh Hà Tĩnh 2022 - 2023)

Tìm số hữu tỉ âm x thỏa mãn $(x+1)^2 = \frac{4}{25}$.

Lời giải

$$(x+1)^2 = \frac{4}{25}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+1 = \frac{2}{5} \\ x+1 = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{5} \\ x = -\frac{7}{5} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } x \in \left\{ -\frac{3}{5}; -\frac{7}{5} \right\}.$$

Câu 7. (HSG 7 huyện Nghĩa Đàn, tỉnh Nghệ An 2022 - 2023)

Tìm x biết: $3^{2x-1} - 2 = 160 - 5 \cdot 3^{2x-1}$.

Lời giải

$$3^{2x-1} - 2 = 160 - 5 \cdot 3^{2x-1}$$

$$3^{2x-1} + 5 \cdot 3^{2x-1} = 162$$

$$3^{2x-1} \cdot 6 = 162$$

$$3^{2x-1} = 27$$

$$3^{2x-1} = 3^3$$

$$2x - 1 = 3$$

$$x = 2$$

Vậy $x = 2$.

Câu 8. (HSG 7 huyện Nghi Lộc, tỉnh Thanh Hoá 2022 - 2023)

Tìm số x biết: $3^x + 3^{x+3} = 252$.

Lời giải

$$3^x + 3^{x+3} = 252$$

$$3^x(1 + 3^3) = 252$$

$$3^x \cdot 28 = 252$$

$$3^x = 252 : 28$$

$$3^x = 9$$

$$3^x = 3^2$$

Suy ra $x = 2$.

Vậy $x = 2$.

Câu 9. (HSG 7 thị xã Hoàng Mai 2022 - 2023)

Tìm x , biết $\frac{x-3}{5} = \frac{20}{x-3}$.

Lời giải

Ta có $\frac{x-3}{5} = \frac{20}{x-3}$

$$\Rightarrow (x-3)^2 = 100$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-3=10 \\ x-3=-10 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=13 \\ x=-7 \end{cases}$$

Vậy $x=13$ hoặc $x=-7$.

Dạng 4. Tìm ẩn dạng phân thức

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 huyện Thanh Trì, Hà Nội 2022 - 2023)

Tìm x biết: $\frac{12}{x^2+8} + \frac{7}{x^2+3} + \frac{6}{x^2+2} = 3$.

Lời giải

$$\frac{12}{x^2+8} + \frac{7}{x^2+3} + \frac{6}{x^2+2} = 3$$

$$\Rightarrow \frac{6}{x^2+2} - 1 + \frac{12}{x^2+8} - 1 + \frac{7}{x^2+3} - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{6-x^2-2}{x^2+2} + \frac{12-x^2-8}{x^2+8} + \frac{7-x^2-3}{x^2+3} = 0$$

$$\Rightarrow (4-x^2) \left(\frac{1}{x^2+2} + \frac{1}{x^2+8} + \frac{1}{x^2+3} \right) = 0$$

$$\text{Mà } \frac{1}{x^2+2} + \frac{1}{x^2+8} + \frac{1}{x^2+3} > 0 \quad (\text{do } x^2 \geq 0)$$

$$\Rightarrow 4-x^2 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=-2 \end{cases}$$

Vậy $x \in \{2; -2\}$.

Câu 2. (HSG 7 huyện Quế Võ, tỉnh Bắc Ninh 2022 - 2023)

Tìm x biết: $\frac{x-2}{12} = \frac{3}{x-2}$.

Lời giải

$$\frac{x-2}{12} = \frac{3}{x-2} \Rightarrow (x-2)^2 = 36 \Rightarrow (x-2)^2 = 6^2 \Rightarrow x-2 = \pm 6$$

Trường hợp: $x-2=6 \Rightarrow x=8$

Trường hợp: $x-2=-6 \Rightarrow x=-4$

Vậy $x = 8$ hoặc $x = -4$.

Dạng 5. Tìm x dạng chứa dấu giá trị tuyệt đối

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 huyện Tương Dương, tỉnh Nghệ An 2022 - 2023)

Tìm x , biết: $|2x - 1| - x = 1$.

Lời giải

$$|2x - 1| - x = 1 \quad \text{hay} \quad |2x - 1| = 1 + x$$

Suy ra $2x - 1 = 1 + x$ hoặc $-(2x - 1) = 1 + x$ (Điều kiện $x \geq -1$)

Trường hợp 1:

$$2x - 1 = 1 + x$$

$$2x - x = 1 + 1$$

$$x = 2 \quad (\text{Thỏa mãn})$$

Trường hợp 2:

$$-(2x - 1) = 1 + x$$

$$-2x + 1 = 1 + x$$

$$3x = 0$$

$$x = 0 \quad (\text{Thỏa mãn})$$

Vậy $x \in \{2; 0\}$.

Câu 2. (HSG 7 thành phố Sầm Sơn, tỉnh Thanh Hoá 2022 - 2023)

Tìm x biết: $\left|3x + 2\right| - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$

Lời giải

Từ đề bài, suy ra $\left|3x + 2\right| - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$ hoặc $\left|3x + 2\right| - \frac{2}{3} = -\frac{4}{3}$

Nếu $\left|3x + 2\right| - \frac{2}{3} = \frac{4}{3} \Rightarrow \left|3x + 2\right| = 2 \Rightarrow x = 0$ hoặc $x = -\frac{4}{3}$.

Nếu $\left|3x + 2\right| - \frac{2}{3} = -\frac{4}{3} \Rightarrow \left|3x + 2\right| = -\frac{2}{3}$ (loại)

Vậy $x = 0$ hoặc $x = -\frac{4}{3}$.

Câu 3. (HSG 7 huyện Ninh Giang, tỉnh Hải Dương 2022 - 2023)

Tìm x , biết: $\left|x + \frac{1}{3}\right| + \left|x + \frac{2}{3}\right| + \left|x + \frac{2}{5}\right| + \left|x + \frac{3}{2}\right| = 33x$.

Lời giải

$$\left|x + \frac{1}{3}\right| + \left|x + \frac{2}{3}\right| + \left|x + \frac{2}{5}\right| + \left|x + \frac{3}{2}\right| = 33x$$

$$\text{Vì } \left|x + \frac{1}{3}\right| \geq 0, \left|x + \frac{2}{3}\right| \geq 0, \left|x + \frac{2}{5}\right| \geq 0, \left|x + \frac{3}{2}\right| \geq 0 \Rightarrow 33x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$$

Ta có:

$$\left|x + \frac{1}{3}\right| + \left|x + \frac{2}{3}\right| + \left|x + \frac{2}{5}\right| + \left|x + \frac{3}{2}\right| = 33x$$

$$x + \frac{1}{3} + x + \frac{2}{3} + x + \frac{2}{5} + x + \frac{3}{2} = 33x$$

$$4x + \frac{29}{10} = 33x$$

$$29x = \frac{29}{10}$$

$$x = \frac{1}{10}$$

$$x = \frac{1}{10}$$

Vậy

Câu 4. (HSG 7 thành phố Bắc Giang 2022 - 2023)

Tìm x biết $|x^2 + 1| + |8x - 4| = x^2 + 2023$

Lời giải

$$|x^2 + 1| + |8x - 4| = x^2 + 2023$$

Ta thấy $a^2 \geq 0, \forall a, |a| \geq 0, \forall a$

Do đó với mọi x , ta có

$$x^2 \geq 0, |8x - 4| \geq 0 \text{ mà } 1 > 0 \Rightarrow x^2 + 1 + |8x - 4| > 0$$

$$\Rightarrow |x^2 + 1| + |8x - 4| = x^2 + 1 + |8x - 4|$$

$$\text{Nên } x^2 + 1 + |8x - 4| = x^2 + 2023$$

$$\Rightarrow |8x - 4| = 2022$$

$$\Rightarrow 8x - 4 = 2022 \text{ hoặc } 8x - 4 = -2022$$

$$+) \text{ TH1: } 8x - 4 = 2022$$

$$x = \frac{1013}{4}$$

$$+) \text{ TH2: } 8x - 4 = -2022$$

$$x = \frac{-1009}{4}$$

$$\text{Vậy } x \in \left\{ \frac{1013}{4}, \frac{-1009}{4} \right\}$$

Câu 5. (HSG 7 huyện Nghi Xuân, tỉnh Hà Tĩnh 2022 - 2023)

Tìm số hữu tỉ x biết $|x + 2| + |x - 2| + |x + 3| = 5$ (1)

Lời giải

*Trường hợp 1: $x < -3$

$$(1) \Rightarrow (-x - 2) + (-x + 2) + (-x - 3) = 5 \Rightarrow -3x - 3 = 5 \Rightarrow x = \frac{-8}{3} \text{ (loại)}$$

*Trường hợp 2: $x = -3$

$$(1) \Rightarrow 6 = 5 \text{ (loại)}$$

* Trường hợp 3: $-3 < x < -2$

$$(1) \Rightarrow (-x-2) + (-x+2) + x + 3 = 5 \Rightarrow x = -2 \text{ (loại)}$$

* Trường hợp 4: $x = -2$

$$(1) \Rightarrow 5 = 5 \text{ (luôn đúng)}$$

* Trường hợp 5: $-2 < x < 2$

$$(1) \Rightarrow x + 2 + (-x + 2) + x + 3 = 5 \Rightarrow x = -2 \text{ (loại)}$$

* Trường hợp 6: $x = 2$

$$(1) \Rightarrow 9 = 5 \text{ (vô lí)}$$

* Trường hợp 7: $x > 2$

$$(1) \Rightarrow x + 2 + x - 2 + x + 3 = 5 \Rightarrow x = \frac{2}{3} \text{ (loại)}$$

Vậy $x = -2$.

Câu 6. (HSG 7 huyện Quốc Oai, Hà Nội 2022 - 2023)

Tìm x biết: $|x^2 + |2x - 1|| = x^2 + 2023$.

Lời giải

Với mọi x , ta có $x^2 \geq 0$; $|2x - 1| \geq 0 \Rightarrow x^2 + |2x - 1| \geq 0$

$$\Rightarrow |x^2 + |2x - 1|| = x^2 + |2x - 1|$$

$$\text{Do đó } |x^2 + |2x - 1|| = x^2 + 2023$$

$$x^2 + |2x - 1| = x^2 + 2023$$

$$|2x - 1| = 2023$$

$$2x - 1 = 2023 \text{ hoặc } 2x - 1 = -2023$$

$$x = 1012 \text{ hoặc } x = -1011$$

Vậy $x = 1012$ hoặc $x = -1011$.

Câu 7. (HSG 7 huyện Quỳnh Phụ, tỉnh Thái Bình 2022 - 2023)

Tìm x , biết $2023 - |x - 2023| = x$.

Lời giải

$$\text{Ta có } 2023 - |x - 2023| = x$$

$$|x - 2023| = 2023 - x$$

$$|x - 2023| = -(x - 2023)$$

$$\text{Do đó } x - 2023 \leq 0$$

$$\text{Suy ra } x \leq 2023$$

$$\text{Kết luận: } x \leq 2023.$$

Câu 8. (HSG 7 huyện Nghi Lộc, tỉnh Thanh Hoá 2022 - 2023)

Tìm x biết: $\left|x + \frac{1}{101}\right| + \left|x + \frac{2}{101}\right| + \left|x + \frac{3}{101}\right| + \dots + \left|x + \frac{100}{101}\right| = 101x$.

Lời giải

$$\forall x \left| x + \frac{1}{101} \right| + \left| x + \frac{2}{101} \right| + \left| x + \frac{3}{101} \right| + \dots + \left| x + \frac{100}{101} \right| \geq 0$$

Suy ra $x \geq 0$

$$x + \frac{1}{101} + x + \frac{2}{101} + x + \frac{3}{101} + \dots + x + \frac{100}{101} = 101x$$

$$100x + \left(\frac{1}{101} + \frac{2}{101} + \frac{3}{101} + \dots + \frac{100}{101} \right) = 101x$$

$$x = \frac{1}{101} + \frac{2}{101} + \frac{3}{101} + \dots + \frac{100}{101}$$

$$x = \frac{1}{101} \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 100)$$

$$x = 50$$

Vậy $x = 50$.

Dạng 6. Sử dụng công thức tính tổng có quy luật

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 huyện Kinh Môn, tỉnh Hải Dương 2022 - 2023)

Tìm x , biết: $\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \dots + \frac{1}{(2x-1)(2x+1)} = \frac{99}{199}$.

Lời giải

$$\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \dots + \frac{1}{(2x-1)(2x+1)} = \frac{99}{199}$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{2}{1.3} + \frac{2}{3.5} + \frac{2}{5.7} + \dots + \frac{2}{(2x-1)(2x+1)} \right) = \frac{99}{199}$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{2x-1} - \frac{1}{2x+1} \right) = \frac{99}{199}$$

$$\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2x+1} \right) = \frac{99}{199}$$

$$1 - \frac{1}{2x+1} = \frac{99.2}{199}$$

$$\frac{2x+1-1}{2x+1} = \frac{198}{199}$$

$$\frac{2x}{2x+1} = \frac{198}{199}$$

$$x = 99$$

Vậy $x = 99$.

Câu 2. (HSG 7 huyện Lạng Giang, tỉnh Bắc Giang 2022 - 2023)

Tìm x biết: $\left(\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \dots + \frac{1}{8.9.10} \right) (|x| - 1) = \frac{44}{45}$.

Lời giải

$$\left(\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \dots + \frac{1}{8.9.10} \right) (|x| - 1) = \frac{44}{45}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \left(\frac{2}{1.2.3} + \frac{2}{2.3.4} + \dots + \frac{2}{8.9.10} \right) \cdot (|x| - 1) = \frac{88}{45} \\ &\Rightarrow \left(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{8.9} - \frac{1}{9.10} \right) \cdot (|x| - 1) = \frac{88}{45} \\ &\Rightarrow \left(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{9.10} \right) \cdot (|x| - 1) = \frac{88}{45} \\ &\Rightarrow \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{90} \right) \cdot (|x| - 1) = \frac{88}{45} \\ &\Rightarrow \frac{22}{45} \cdot (|x| - 1) = \frac{88}{45} \\ &\Rightarrow |x| - 1 = 4 \\ &\Rightarrow |x| = 5 \\ &\Rightarrow x = \pm 5 \end{aligned}$$

Vậy $x = -5$; $x = 5$ là các giá trị cần tìm.

Dạng 7. Tổng các biểu thức không âm bằng 0

A. Trắc nghiệm (nếu có)

Câu 1. (HSG 7 huyện Lạng Giang, tỉnh Bắc Giang 2022 - 2023)

Cho các số x, y thỏa mãn: $|1 - 2x| + (y - 2)^{2022} \leq 0$. Giá trị của $B = 12x^2y + 3xy^2$ bằng:

A. 10 **B.** 11 **C.** 13 **D.** 12

Lời giải

Ta có: $|1 - 2x| + (y - 2)^{2022} \leq 0$ (1)

Ta có: $|1 - 2x| \geq 0, \forall x; (y - 2)^{2022} \geq 0, \forall y$

$\Rightarrow |1 - 2x| + (y - 2)^{2022} \geq 0, \forall x, y$ (2)

Từ (1), (2) đẳng thức xảy ra khi: $\begin{cases} |1 - 2x| = 0 \\ (y - 2)^{2022} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 - 2x = 0 \\ y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = 2 \end{cases}$

Ta có: $x = \frac{1}{2}; y = 2$ vào B ta được:

$$B = 12x^2y + 3xy^2 = 12 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 2 + 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot (2)^2 = 12$$

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 thành phố Sầm Sơn, tỉnh Thanh Hoá 2022 - 2023)

Tìm x, y, z biết: $(2x - 1)^{2008} + \left(y - \frac{2}{5}\right)^{2008} + |x + y + z| = 0$

Lời giải

Với mọi x, y, z , ta có: $(2x - 1)^{2008} \geq 0; \left(y - \frac{2}{5}\right)^{2008} \geq 0; |x + y + z| \geq 0$.

Nên $(2x - 1)^{2008} + \left(y - \frac{2}{5}\right)^{2008} + |x + y + z| = 0$ khi:

$$\begin{cases} (2x-1)^{2008}=0 \\ \left(y-\frac{2}{5}\right)^{2008}=0 \\ |x+y+z|=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=\frac{2}{5} \\ z=-\frac{9}{10} \end{cases}$$

Vậy $x=\frac{1}{2}; y=\frac{2}{5}; z=-\frac{9}{10}$.

Câu 2. (HSG 7 thị xã Bỉm Sơn 2022 - 2023)

Tìm x, y, z biết $(2x-1)^{2020} + \left(y-\frac{1}{3}\right)^{2022} + |x+y-z|=0$

Lời giải

Ta có $(2x-1)^{2020} + \left(y-\frac{1}{3}\right)^{2022} + |x+y-z|=0$

Nên $\begin{cases} 2x-1=0 \\ y-\frac{1}{3}=0 \\ x+y-z=0 \end{cases}$ suy ra $\begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=\frac{1}{3} \\ z=\frac{5}{6} \end{cases}$

Vậy $x=\frac{1}{2}; y=\frac{1}{3}; z=\frac{5}{6}$.

Câu 3. (HSG 7 huyện Mường Lát, tỉnh Thanh Hoá 2022 - 2023)

Tìm số x, y biết: $(2022-x)^2 + |y-2023|^{2023} \leq 0$.

Lời giải

$(2022-x)^2 + |y-2023|^{2023} \leq 0$ (1)

Ta có: $\begin{cases} (2022-x)^2 \geq 0 \quad \forall x \\ |y-2023|^{2023} \geq 0 \quad \forall y \end{cases}$

Nên $(2022-x)^2 + |y-2023|^{2023} \geq 0 \quad \forall x, y$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $(2022-x)^2 + |y-2023|^{2023} = 0$, đạt được khi:

$\begin{cases} (2022-x)^2 = 0 \\ |y-2023|^{2023} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2022-x=0 \\ y-2023=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2022 \\ y=2023 \end{cases}$

Vậy $x=2022$ và $y=2023$.

Câu 4. (HSG 7 huyện Đồng Xuân, tỉnh Phú Yên 2022 - 2023)

Tìm x, y biết: $\left(2x-\frac{1}{6}\right)^2 + |3y+12| \leq 0$.

Lời giải

Ta có: $\left(2x-\frac{1}{6}\right)^2 \geq 0$ và $|3y+12| \geq 0$ với mọi x, y .

$$\text{Nên } \left(2x - \frac{1}{6}\right)^2 + |3y + 12| \geq 0$$

$$\text{Do đó } \left(2x - \frac{1}{6}\right)^2 + |3y + 12| \leq 0 \quad \text{khi } \begin{cases} \left(2x - \frac{1}{6}\right)^2 = 0 \\ |3y + 12| = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{12} \\ y = -4 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } x = \frac{1}{12}; y = -4.$$

Câu 5. (HSG 7 huyện Tiền Hải, tỉnh Thái Bình 2022 - 2023)

Tính giá trị của biểu thức $N = 17x^{10} + 2y^3 + 2023$ biết các số $x; y$ thoả mãn:

$$|x - 1| + \sqrt{(y + 2)^{2022}} = 0$$

Lời giải

Ta có: $|x - 1| \geq 0$ với mọi x ; $\sqrt{(y + 2)^{2022}} \geq 0$ với mọi y .

Mà $|x - 1| + \sqrt{(y + 2)^{2022}} = 0$ suy ra $|x - 1| = 0$ và $\sqrt{(y + 2)^{2022}} = 0$

$$\Rightarrow |x - 1| = 0 \Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$\Rightarrow \sqrt{(y + 2)^{2022}} = 0 \Rightarrow (y + 2)^{2022} = 0 \Rightarrow y = -2$$

Thay $x = 1$ và $y = -2$ vào biểu thức N ta được

$$\begin{aligned} N &= 17x^{10} + 2y^3 + 2023 \\ &= 17.1^{10} + 2.(-2)^3 + 2023 \\ &= 17.1 + 2.(-8) + 2023 \\ &= 17 + (-16) + 2023 = 2024 \end{aligned}$$

Vậy khi $|x - 1| + \sqrt{(y + 2)^{2022}} = 0$ thì biểu thức N có giá trị là 2024.

Câu 6. (HSG 7 thị xã Hoàng Mai 2022 - 2023)

Tìm x, y biết: $(2x - 6)^{2024} + |3y - 9| \leq 0$

Lời giải

Ta có $(2x - 6)^{2024} \geq 0$ với mọi x ; $|3y - 9| \geq 0$ với mọi y .

Do đó $(2x - 6)^{2024} + |3y - 9| \geq 0$, với mọi x, y .

Mà $(2x - 6)^{2024} + |3y - 9| \leq 0$ nên suy ra $(2x - 6)^{2024} + |3y - 9| = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x - 6 = 0 \\ 3y - 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \end{cases}$$

Vậy $x = 3$ và $y = 3$.

Câu 7. (HSG 7 huyện Vĩnh Lộc, tỉnh Thanh Hoá 2022 - 2023)

Tìm x, y biết: $\left(3x - \frac{1}{6}\right)^2 + |2y - 6| \leq 0$

Lời giải

$$\text{Vì } \left(3x - \frac{1}{6}\right)^2 \geq 0 \text{ với mọi } x; |2y - 6| \geq 0 \text{ với mọi } y.$$

$$\text{Do đó: } \left(3x - \frac{1}{6}\right)^2 + |2y - 6| \geq 0 \text{ với mọi } x, y.$$

$$\text{Khi đó, theo đề bài thì: } \left(3x - \frac{1}{6}\right)^2 + |2y - 6| \leq 0 \Rightarrow \left(3x - \frac{1}{6}\right)^2 + |2y - 6| = 0$$

$$\text{Vì vậy: } \begin{cases} 3x - \frac{1}{6} = 0 \\ 2y - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{18} \\ y = 3 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } x = \frac{1}{18}, y = 3.$$

Dạng 8. Tìm ẩn dựa vào tính chất về dấu

B. Tự luận

Dạng 9. Sử dụng phương pháp chặn để tìm ẩn

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 huyện Quế Võ, tỉnh Bắc Ninh 2022 - 2023)

$$\text{Tìm } x \text{ thỏa mãn } |2x+3| + |2x-1| = \frac{8}{3(x+1)^2 + 2}.$$

Lời giải

$$\text{Ta có } |2x+3| + |2x-1| = |2x+3| + |1-2x| \geq |2x+3+1-2x| = |4| = 4 \text{ với mọi } x.$$

$$\text{Lại có } 3(x+1)^2 + 2 \geq 2 \Rightarrow \frac{8}{3(x+1)^2 + 2} \leq \frac{8}{2} = 4 \text{ với mọi } x.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2x+3)(1-2x) \geq 0 \\ (x+1)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -1$$

Dấu “=” xảy ra

$$\text{Vậy } x = -1.$$

Dạng 10. Tìm ẩn với điều kiện nguyên

A. Trắc nghiệm (nếu có)

Câu 1. (HSG 7 huyện Lạng Giang, tỉnh Bắc Giang 2022 - 2023)

$$\text{Tích của các số nguyên } x \text{ (với } x \neq 1) \text{ sao cho } \frac{4}{x-1} \text{ có giá trị nguyên:}$$

A. 6 B. 0 C. 15 D. -9

Lời giải

$$\frac{4}{x-1} \text{ có giá trị nguyên (với } x \neq 1) \\ \Rightarrow 4 : x-1 \Rightarrow x-1 \in U(4) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 4\} \Rightarrow x \in \{2; 0; 3; -1; 5; -3\}$$

$$\text{Tích của các số nguyên } x \text{ là: } 2 \cdot 0 \cdot 3 \cdot (-1) \cdot 5 \cdot (-3) = 0$$

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 huyện Tương Dương, tỉnh Nghệ An 2022 - 2023)

Tìm các bộ số nguyên dương $(x; y; z)$ của biểu thức: $x + y + z = xyz$.

Lời giải

Vì x, y, z nguyên dương nên giả sử $1 \leq x \leq y \leq z$.

Theo bài ra: $x + y + z = xyz$. Chia cả hai vế cho xyz ta được:

$$1 = \frac{1}{zy} + \frac{1}{yx} + \frac{1}{xz} \leq \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} = \frac{3}{x^2}$$

Suy ra $x^2 \leq 3$.

Do đó $x = 1$.

Thay vào $x + y + z = xyz$ ta có:

$$1 + y + z = yz$$

$$yz - y - z - 1 = 0$$

$$y(z - 1) - (z - 1) - 2 = 0$$

$$(z - 1)(y - 1) = 2$$

Vì x, y, z nguyên dương nên $(z - 1)$ và $(y - 1)$ là các số nguyên.

Ta xét các trường hợp sau:

Trường hợp 1: $z - 1 = 1$; $y - 1 = 2$. Suy ra $z = 2$; $y = 3$.

Trường hợp 2: $z - 1 = 2$; $y - 1 = 1$. Suy ra $z = 3$; $y = 2$.

Vậy có hai bộ số nguyên dương $(x; y; z)$ thỏa mãn là $(1; 2; 3)$, $(1; 3; 2)$.

Câu 2. (HSG 7 huyện Thanh Trì, Hà Nội 2022 - 2023)

Tìm số nguyên tố $x; y$ thỏa mãn: $x^2 - 2y^2 = 1$

Lời giải

Xét $x^2 - 2y^2 = 1$ suy ra $x^2 = 2y^2 + 1$

- Nếu x chia hết cho 3 mà x là số nguyên tố nên $x = 3$

Thay vào tính được $y = 2$ là số nguyên tố (Chọn)

- Nếu x không chia hết cho 3

Chứng minh được $x^2 \equiv 1 \pmod{3}$

Suy ra $2y^2$ chia hết cho 3 mà $(2, 3) = 1$ nên y^2 chia hết cho 3 mà 3 là số nguyên tố nên y chia hết cho 3

Mà y là số nguyên tố nên $y = 3$

Thay vào tính được $x^2 = 19$ (loại)

Vậy có duy nhất cặp số $(x, y) = (2, 3)$ thỏa mãn bài toán.

Câu 3. (HSG 7 huyện Thanh Trì, Hà Nội 2022 - 2023)

Tìm số nguyên x thỏa mãn: $2(2 - x^2)(12 - x^2)(22 - x^2)(32 - x^2) + 12558 = 0$

Lời giải

$$2(2 - x^2)(12 - x^2)(22 - x^2)(32 - x^2) + 12558 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2 - x^2)(12 - x^2)(22 - x^2)(32 - x^2) = -6279$$

$$\text{Đặt } A = VT = (2 - x^2)(12 - x^2)(22 - x^2)(32 - x^2)$$

Ta có: $VP = -6279 < 0$

Mà vế trái là tích của 4 thừa số, nên trong đó có 1 hoặc 3 thừa số âm.

Lại có: $2 - x^2 < 12 - x^2 < 22 - x^2 < 32 - x^2$

Ta có 2 trường hợp:

+TH1: Có 3 thừa số âm

Do đó $22 - x^2 < 0 < 32 - x^2 \Rightarrow 22 < x^2 < 32$

Mà $x \in \mathbb{Z}$ nên x^2 là số chính phương

$\Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x = \pm 5$

Thay vào biểu thức A ta được $A = -6279 = VP$ (thỏa mãn)

+TH2: Có 1 thừa số âm

Do đó $2 - x^2 < 0 < 12 - x^2 \Rightarrow 2 < x^2 < 12$

Mà $x \in \mathbb{Z}$ nên x^2 là số chính phương

$\Rightarrow x^2 \in \{4; 9\}$

Với $x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2 \Rightarrow A = -8064 \neq VP$ (loại)

Với $x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3 \Rightarrow A = -6279 = VP$ (thỏa mãn)

Vậy $x \in \{\pm 3; \pm 5\}$.

Câu 4. (HSG 7 huyện Ninh Giang, tỉnh Hải Dương 2022 - 2023)

Tìm tất cả các cặp số nguyên x, y sao cho $xy - 2x + y + 1 = 0$.

Lời giải

Ta có: $xy - 2x + y + 1 = 0$

$x(y - 2) + (y - 2) = -3$

$(y - 2)(x + 1) = -3$

$\Rightarrow y - 2, x + 1 \in U(-3) = \{-3; -1; 1; 3\}$.

Ta có bảng

$x + 1$	-3	-1	1	3
$y - 2$	1	3	-3	-1
x	-4	-2	0	2
y	3	5	-1	1

Vậy các cặp số nguyên thỏa mãn $(x; y) \in \{(-4; 3); (-2; 5); (0; -1); (2; 1)\}$.

Câu 5. (HSG 7 huyện Kinh Môn, tỉnh Hải Dương 2022 - 2023)

Tìm x, y nguyên biết: $2xy - x - y = 2$

Lời giải

Ta có:

$2xy - x - y = 2$

$x(2y - 1) = 2 + y$

$x = \frac{2 + y}{2y - 1}$ (vì y nguyên nên $2y - 1 \neq 0$)

$2x = \frac{2y + 4}{2y - 1} = 1 + \frac{5}{2y - 1}$

$$2x = 1 + \frac{5}{2y-1}$$

Vì x nguyên thì $2x$ nguyên

Khi đó $2y-1 \in U(5) = \{\pm 1; \pm 5\}$

Ta có bảng các trường hợp xảy ra:

$2y-1$	-1	1	-5	5
$2y$	0	2	-4	6
y	0	1	-2	3
x	-2	3	0	1
	thỏa mãn	thỏa mãn	thỏa mãn	thỏa mãn

Vậy các cặp số $(x; y)$ thỏa mãn đề bài là: $(-2; 0)$; $(1; 3)$; $(0; -2)$; $(3; 1)$.

Câu 6. (HSG 7 huyện Chương Mỹ, Hà Nội 2022 - 2023)

Tìm x, y biết $4x - xy + y = 7$ với x, y là các số nguyên.

Lời giải

Ta có:

$$4x - xy + y = 7$$

$$x(4 - y) + y - 4 = 3$$

$$(x - 1)(4 - y) = 3$$

Lập bảng

$x - 1$	1	3	-1	-3
$4 - y$	3	1	-3	-1
x	2	4	0	-2
y	1	3	7	5

Vậy các cặp $(x; y)$ thỏa mãn là $(2; 1)$; $(4; 3)$; $(0; 7)$; $(-2; 5)$.

Câu 7. (HSG 7 huyện Thanh Sơn, tỉnh Phú Thọ 2022 - 2023)

Tìm các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $4x - 5y - 6xy + 7 = 0$.

Lời giải

Ta có

$$4x - 5y - 6xy + 7 = 0$$

$$12x - 15y - 18xy + 21 = 0$$

$$(12x - 18xy) + (10 - 15y) + 11 = 0$$

$$6x(2 - 3y) + 5(2 - 3y) = -11$$

$$(6x + 5)(2 - 3y) = -11$$

Vì $x; y \in \mathbb{Z}$ nên $6x + 5; 2 - 3y \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow 6x + 5; 2 - 3y$ là ước của -11

Lập bảng

$6x + 5$	1	-11	11	-1
$2 - 3y$	-11	1	-1	11

x	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{8}{3}$	1	-1
y	$\frac{13}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	-3
	loại	loại	thỏa mãn	thỏa mãn

Vậy các cặp $(x; y)$ thỏa mãn là : $(-1; -3)$, $(1; 1)$.

Câu 8. (HSG 7 huyện Lang Chánh, tỉnh Thanh Hoá 2022 - 2023)

Tìm các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn: $x^2 + xy - 3y - 5x + 3 = 0$.

Lời giải

Ta có: $x^2 + xy - 3y - 5x + 3 = 0$

Suy ra: $x^2 + xy - 2x - 3y - 3x + 6 = 3$

$$\Rightarrow x(x + y - 2) - 3(x + y - 2) = 3$$

$$\Rightarrow (x - 3)(x + y - 2) = 3$$

Do x, y là số nguyên nên ta có:

$$(x - 3)(x + y - 2) = 3 = 1.3 = 3.1 = (-1)(-3) = (-3)(-1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - 3 = 1 \\ x + y - 2 = 3 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x - 3 = 3 \\ x + y - 2 = 1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x - 3 = -1 \\ x + y - 2 = -3 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x - 3 = -3 \\ x + y - 2 = -1 \end{cases}$$

Vậy các cặp $(x; y)$ là $(4; 1)$, $(6; -3)$, $(2; -3)$, $(0; 1)$.

Câu 9. (HSG 7 thị xã Bỉm Sơn 2022 - 2023)

Tìm $(x; y) \in \mathbb{Z}$ sao cho $2y^2 - xy + x - 2y + 5 = 0$.

Lời giải

Ta có $2y^2 - xy + x - 2y + 5 = 0$ suy ra $x(y - 1) = 2y^2 - 2y + 5$ (1)

Ta thấy $y = 1$ không thỏa mãn (1)

Do đó $y \neq 1$.

Khi đó (1) trở thành

$$x = \frac{2y^2 - 2y + 5}{y - 1}$$

$$x = 2y + \frac{5}{y - 1}$$

Vì x, y là các số nguyên dương nên $y - 1$ là ước của 5.

$$\text{TH1. } y - 1 = 1 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow x = 9$$

$$\text{TH2. } y - 1 = -1 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x = -5$$

$$\text{TH3. } y - 1 = 5 \Rightarrow y = 6 \Rightarrow x = 13$$

$$\text{TH4. } y - 1 = -5 \Rightarrow y = -4 \Rightarrow x = -9$$

Vậy $(x; y) \in \{(9; 2); (-5; 0); (13; 6); (-9; -4)\}$.

Câu 10. (HSG 7 huyện Quế Võ, tỉnh Bắc Ninh 2022 - 2023)

Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn $x^2 - xy = 6x - 5y - 8$.

Lời giải

Ta có $x^2 - xy = 6x - 5y - 8 \Rightarrow x^2 - 6x + 8 = y(x - 5)$ (1)

Khi $x = 5$ thì ta có $5^2 - 6 \cdot 5 + 8 = 0$ (vô lí)

Do đó $x = 5$ không thỏa mãn (1)

Khi $x \neq 5$ thì $y = \frac{x^2 - 6x + 8}{x - 5}$

$$y = \frac{x^2 - 5x - x + 5 + 3}{x - 5}$$

$$y = \frac{(x - 1)(x - 5) + 3}{x - 5}$$

$$y = x - 1 + \frac{3}{x - 5}$$

Vì x, y nguyên nên $x - 5$ là ước của 3 hay $x - 5 \in \{\pm 1; \pm 3\} \Rightarrow x \in \{2; 4; 6; 8\}$

+ Khi $x = 2$ thì $y = 0$

+ Khi $x = 4$ thì $y = 0$

+ Khi $x = 6$ thì $y = 8$

+ Khi $x = 8$ thì $y = 8$

Vậy các cặp số $(x; y)$ cần tìm là: $(2; 0); (4; 0); (6; 8); (8; 8)$.

Câu 11. (HSG 7 huyện Nghi Xuân, tỉnh Hà Tĩnh 2022 - 2023)

Tìm số nguyên x, y thỏa mãn: $x + 3xy + y = -5$.

Lời giải

Ta có $x + 3xy + y = -5$

$$3x + 9xy + 3y = -15$$

$$3x(1 + 3y) + (1 + 3y) = -14$$

$$(3x + 1)(1 + 3y) = -14$$

Ta lập bảng

$3x + 1$	1	-14	-1	14	2	-7	-2	7
$3y + 1$	-14	1	14	-1	-7	2	7	-2
x	0	-5	$-\frac{2}{3}$	$\frac{13}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{8}{3}$	-1	2
y	-5	0	$\frac{13}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{8}{3}$	$\frac{1}{3}$	2	-1

x, y là số nguyên nên: $(x; y) \in \{(0; -5); (-5; 0); (-1; 2); (2; -1)\}$.

Vậy các cặp số $(x; y)$ cần tìm là: $(x; y) \in \{(0; -5); (-5; 0); (-1; 2); (2; -1)\}$.

Câu 12. (HSG 7 huyện Hiệp Hoà, tỉnh Bắc Giang 2022 - 2023)

$$\frac{a^2 - 2}{ab + 2}$$

Tìm các số nguyên dương a, b để $\frac{a^2 - 2}{ab + 2}$ có giá trị nguyên.

Lời giải

$$\frac{a^2 - 2}{ab + 2} \text{ là số nguyên thì } (a^2 - 2):(ab + 2)$$

$$\Rightarrow b(a^2 - 2) = a(ab + 2) - 2(a + b):(ab + 2)$$

$$\Rightarrow 2(a + b):(ab + 2)$$

Do đó $2(a + b) = k(ab + 2)$ với $k \in \mathbb{N}^*$

Nếu $k \geq 2$ thì $a + b \geq ab + 1 \Rightarrow (a - 1)(b - 1) + 1 \geq 0$ (vô lí với $a, b \in \mathbb{N}^*$)

Nếu $k = 1$. Từ đó $(a - 2)(b - 2) = 2$

Vì a, b là các số tự nhiên, suy ra $a - 2; b - 2$ là các số nguyên

Nên ta có bảng sau

$a - 2$	- 1	- 2	1	2
$b - 2$	- 2	- 1	2	1
a	1	0	3	4
b	0	1	4	3
	Loại		Loại	

Vậy ta được các cặp $(a; b)$ cần tìm là: $(1; 0); (4; 3)$.

Câu 13. (HSG 7 huyện Mường Lát, tỉnh Thanh Hoá 2022 - 2023)

Tìm các số nguyên dương x, y sao cho: $xy + 2x - y = 5$.

Lời giải

$$xy + 2x - y = 5$$

$$x(y + 2) - (y + 2) = 5 - 2$$

$$(x - 1)(y + 2) = 3 \quad (1)$$

Vì x, y nguyên nên $x - 1$ và $y + 2$ nguyên.

Do đó $y + 2 \in \mathbb{N}^*$ (3)

$$\Rightarrow y + 2 \in \{1; -1; 3; -3\}$$

Mà y nguyên dương nên $y + 2 \geq 3$

$$\text{Nên } y + 2 = 3 \Rightarrow y = 1 \quad (2)$$

Thay (2) vào (1) tìm được $x = 2$.

$$\text{Vậy } (x; y) = (2; 1)$$

Câu 14. (HSG 7 huyện Đồng Xuân, tỉnh Phú Yên 2022 - 2023)

Tìm các cặp số nguyên $(x; y)$ biết: $\frac{x}{7} + 1 = \frac{1}{y - 1}$.

Lời giải

Ta có:

$$\frac{x}{7} + 1 = \frac{1}{y - 1}$$

$$\frac{x + 7}{7} = \frac{1}{y - 1}$$

$$(x+7)(y-1)=7$$

$$\text{Vì } 7=7.1=1.7=(-7).(-1)=(-1).(-7)$$

Thay hết tất cả các trường hợp ta có:

$$(x; y) \in \{(0; 2); (-6; 8); (-14; 0); (-8; -6)\}$$

Vậy các cặp số $(x; y)$ cần tìm là: $(x; y) \in \{(0; 2); (-6; 8); (-14; 0); (-8; -6)\}$

Câu 15. (HSG 7 huyện Gia Viễn, tỉnh Ninh Bình 2022 - 2023)

Tìm số nguyên x, y biết $2xy - x + y = 6$

Lời giải

$$2xy - x + y = 6$$

$$\Rightarrow 4xy - 2x + 2y = 12$$

$$\Rightarrow 2x(2y-1) + (2y-1) = 12-1$$

$$\Rightarrow (2x+1)(2y-1) = 11$$

Do đó $2x+1 \in U^{(11)}$

$$\Rightarrow 2x+1 \in \{\pm 1; \pm 11\}$$

Ta có bảng giá trị

$2x+1$	- 11	- 1	1	11
$2y-1$	- 1	- 11	11	1
x	- 6	- 1	0	5
y	0	- 5	6	1

Vậy có 4 cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn là: $(0; 6); (-1; -5); (5; 1); (-6; 0)$

Câu 16. (HSG 7 thành phố Bắc Ninh 2022 - 2023)

Tìm cặp số nguyên $(x; y)$ biết $x + y = xy$

Lời giải

Ta có $x + y = xy \Rightarrow xy - x - y = 0$ nên $(x-1)(y-1) = 1$, khi đó $x-1$ và $y-1$ là ước của 1.

Ta có bảng giá trị sau:

$x-1$	1	- 1
$y-1$	1	- 1
x	2	0
y	2	0

Vậy các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn bài toán là $(2; 2); (0; 0)$

Câu 17. (HSG 7 huyện Quảng Xương, tỉnh Thanh Hoá 2022 - 2023)

Tìm $x; y$ nguyên thỏa mãn: $x^2 - xy + y + 2 = 0$

Lời giải

Ta có: $x^2 - xy + y + 2 = 0$

$$\text{Suy ra } y(x-1) = x^2 + 2 \quad (1)$$

Xét $x=1$, thay vào (1) ta được: $0=3$ (vô lí)

Do đó $x=1$ không thỏa mãn (1).

Xét $x \neq 1$, ta có:

$$y = \frac{x^2 + 2}{x - 1}$$

$$y = x + 1 + \frac{3}{x - 1}$$

Để y nguyên thì $x - 1 \in U^{(3)}$.

Do $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x - 1 \in \mathbb{Z}$ nên $x - 1 \in U^{(3)}$

Vì $U^{(3)} = \{\pm 1; \pm 3\}$ nên ta có bảng sau

$x - 1$	- 3	- 1	1	3
x	- 2	0	2	4
$y = \frac{x^2 + 2}{x - 1}$	- 2	- 2	6	6
Kết luận	Thoả mãn	Thoả mãn	Thoả mãn	Thoả mãn

Vậy $(x; y) \in \{(- 2; - 2); (0; - 2); (2; 6); (4; 6)\}$.

Câu 18. (HSG 7 thị xã Hoàng Mai 2022 - 2023)

Tìm x, y nguyên biết: $xy - 3x + 2y = - 7$.

Lời giải

Ta có $xy - 3x + 2y = - 7$

suy ra $x(y - 3) + 2(y - 3) = - 13$

hay $(y - 3)(x + 2) = - 13$.

Vì x, y là các số nguyên nên $y - 3, x + 2$ cũng là các số nguyên.

Do đó ta có bảng giá trị sau

$x + 2$	- 1	1	- 13	13
$y - 3$	13	- 13	1	- 1
x	- 3	- 1	- 15	11
y	16	- 10	4	2
Kết luận	Nhận	Nhận	Nhận	Nhận

Vậy các cặp số $(x; y)$ thoả mãn yêu cầu bài toán là

$(x; y) \in \{(- 3; 16); (- 1; - 10); (- 15; 4); (11; 2)\}$.

Câu 19. (HSG 7 huyện Vĩnh Lộc, tỉnh Thanh Hoá 2022 - 2023)

Tìm các số nguyên x, y biết: $x + y - 2xy = 4$.

Lời giải

Ta có: $x + y - 2xy = 4$

suy ra $x - 2xy + y - 4 = 0$

$2x - 4xy + 2y - 8 = 0$

$2x - 4xy + 2y - 1 = 7$

$2x(1 - 2y) - (1 - 2y) = 7$

$(2x - 1)(1 - 2y) = 7$.

Lập bảng

$2x - 1$	1	7	- 1	- 7
$1 - 2y$	7	1	- 7	- 1
x	1	4	0	- 3
y	- 3	0	4	1
	Thỏa mãn	Thỏa mãn	Thỏa mãn	Thỏa mãn

Vậy $(x; y)$ cần tìm là $(1; - 3)$, $(4; 0)$, $(0; 4)$, $(- 3; 1)$.

Câu 20. (HSG 7 huyện Văn Lâm, tỉnh Hưng Yên 2022 - 2023)

Tìm tập hợp các số nguyên x , biết rằng: $4\frac{5}{9} : 2\frac{5}{18} - 7 < x < \left(3\frac{1}{5} : 3,2 + 4,5 \cdot \frac{31}{45}\right) : \left(-21\frac{1}{2}\right)$.

Lời giải

Ta có: $4\frac{5}{9} : 2\frac{5}{18} - 7 = \frac{41}{9} \cdot \frac{18}{41} - 7 = 2 - 7 = -5$

Lại có:

$$\left(3\frac{1}{5} : 3,2 + 4,5 \cdot \frac{31}{45}\right) : \left(-21\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{16}{5} \cdot \frac{5}{16} + \frac{9}{2} \cdot \frac{76}{45}\right) : \left(-\frac{43}{2}\right) = \left(1 + \frac{38}{5}\right) \cdot \frac{-2}{43} = \frac{43}{5} \cdot \frac{-2}{43} = \frac{-2}{5}$$

Do đó: $-5 < x < \frac{-2}{5}$.

Mà $x \in \mathbb{Z}$ nên $x \in \{-4; -3; -2; -1\}$.

Vậy $\{-4; -3; -2; -1\}$ là tập hợp cần tìm.

Câu 21. (HSG 7 huyện Văn Lâm, tỉnh Hưng Yên 2022 - 2023)

Tìm các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn: $|x+2| + |x-1| = 3 - (y+2)^2$.

Lời giải

Vi: $|x+2| + |1-x| \geq |x+2+1-x| = 3$

Mặt khác: $3 - (y+2)^2 \leq 3$

$$\begin{cases} |x+2| + |x-1| = 3 - (y+2)^2 \\ 3 - (y+2)^2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x+2| + |x-1| = 3 \\ y = -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x; y) \in \{(-2; -2), (-1; -2), (0; -2), (1; -2)\}$$

Vậy các cặp số nguyên $(x; y)$ cần tìm là: $(-2; -2)$, $(-1; -2)$, $(0; -2)$, $(1; -2)$.

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

<https://www.vn teach.com>