



Chương

Bài 1. BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

A

Lý thuyết

1. Bất phương trình bậc nhất hai ẩn



Định nghĩa

Bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y có dạng tổng quát là:

$$ax + by + c \leq 0 \quad (1) \quad (ax + by + c < 0; ax + by + c \geq 0; ax + by + c > 0)$$

Trong đó a, b, c là những số thực, $a^2 + b^2 \neq 0$;

$(x_0; y_0)$ là nghiệm của $(1) \Leftrightarrow ax_0 + by_0 + c \leq 0$

2. Biểu diễn nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn.

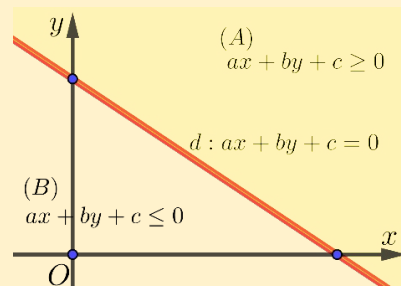


Định nghĩa

Trong mặt phẳng Oxy , tập hợp các điểm có tọa độ là nghiệm của (1) được gọi là miền nghiệm của nó.

Đường thẳng $d: ax + by + c = 0$ chia mp thành hai nửa mp , khi đó:

• Nửa mp (A) (kể cả bờ) là miền nghiệm của $ax + by + c \leq 0$



Quy tắc

Biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình

» **Bước (1):** Vẽ đường thẳng $D: ax + by + c = 0$.

» **Bước (2):** Lấy một điểm $M_0(x_0; y_0)$ không thuộc D (thường lấy gốc tọa độ O).

» **Bước (3):** Tính $ax_0 + by_0 + c$ và so sánh với 0.

» **Bước (4):** Kết luận:

Nếu $ax_0 + by_0 + c < 0$ thì nửa mp bờ D chứa M_0 là miền nghiệm của (1) .

Nếu $ax_0 + by_0 + c > 0$ thì nửa mp bờ D không chứa M_0 là miền nghiệm của (1) .

(1)



Các dạng bài tập

Dạng 1. Tìm nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn



Phương

» Cho cặp số $(x_0; y_0)$ và bất phương trình $ax + by + c \geq 0$ (*).
Thay cặp số $(x_0; y_0)$ vào (*) ta được biểu thức $T = ax_0 + by_0 + c$
Khi đó:

» Nếu $T \geq 0$ thì cặp số $(x_0; y_0)$ là nghiệm của (*).
» Nếu $T < 0$ thì cặp số $(x_0; y_0)$ không phải là nghiệm của (*).



Ví dụ 1.1.

Cho các điểm và các bất phương trình. Kiểm tra các điểm đã cho, điểm nào nằm trong miền nghiệm của bất phương trình.

(1) Các điểm: $A(1;1)$, $B(-1;-2)$, $C(0;1)$, $D(1;-1)$ và bất phương trình $2x + 3(y+1) > 1$

(2) Các điểm: $A(1;-1)$, $B(-2;1)$, $C(1;-1)$, $D(4;2)$ và bất phương trình $7x - 3y - 7 < 0$

Lời giải

(1) Các điểm: $A(1;1)$, $B(-1;-2)$, $C(0;1)$, $D(1;-1)$ và bất phương trình $2x + 3(y+1) > 1$

Xét điểm $A(1;1)$ ta có $2 \cdot 1 + 3(1+1) > 1$ (đúng).

Xét điểm $B(-1;-2)$ ta có $2 \cdot (-1) + 3(-1+1) > -1$ (sai).

Xét điểm $C(0;1)$ ta có $2 \cdot 0 + 3(1+1) > 1$ (đúng).

Xét điểm $D(1;-1)$ ta có $2 \cdot 1 + 3(-1+1) > -1$ (đúng).

Vậy các điểm $A; C; D$ nằm trong miền nghiệm của bất phương trình.

(2) Các điểm: $A(1;-1)$, $B(-2;1)$, $C(1;-1)$, $D(4;2)$ và bất phương trình $7x - 3y - 7 < 0$

Xét điểm $A(1;-1)$ ta có $7 + 3 - 7 < 0$ (sai).

Xét điểm $B(-2;1)$ ta có $-14 - 3 - 7 < 0$ (đúng).

Xét điểm $C(1;-1)$ ta có $7 + 3 - 7 < 0$ (sai).

Xét điểm $D(4;2)$ ta có $28 - 6 - 7 < 0$ (sai).



Vậy điểm B nằm trong miền nghiệm của bất phương trình.

(3) Các điểm: $A(0;0)$, $B(-4;2)$, $C(1;2)$, $D(5;3)$ và bất phương trình $3x+4y-11 < 5x-3$

Xét điểm $A(0;0)$ ta có $3.0+4.0-11 < 5.0-3$ (đúng).

Xét điểm $B(-4;2)$ ta có $3.(-4)+4.2-11 < 5.(-4)-3$ (sai).

Xét điểm $C(1;2)$ ta có $3.1+4.2-11 < 5.1-3$ (đúng).

Xét điểm $D(5;3)$ ta có $3.5+4.3-11 < 5.5-3$ (đúng).

Vậy điểm $A;C;D$ nằm trong miền nghiệm của bất phương trình.

(4) Các điểm: $A(0;1)$, $B(1;3)$, $C(-1;1)$, $D(-1;0)$ và bất phương trình $5x-2(y-1) \leq 0$

Xét điểm $A(0;1)$ ta có $5.0-2(1-1) \leq 0$ (đúng).

Xét điểm $B(1;3)$ ta có $5.1-2(3-1) \leq 0$ (sai).

Xét điểm $C(-1;1)$ ta có $5.(-1)-2(1-1) \leq 0$ (đúng).

Xét điểm $D(-1;0)$ ta có $5.(-1)-2(0-1) \leq 0$ (đúng).

Vậy điểm $A;C;D$ nằm trong miền nghiệm của bất phương trình.



Ví dụ 1.2.

Miền nghiệm của bất phương trình $2x-(x+3y) < 3x+2y+2(y+1)$ là nửa mặt phẳng chứa điểm nào trong các điểm: $A(1;1)$, $B(-1;-2)$, $C(0;-1)$, $D(-3;-1)$.

Lời giải

Ta có $2x-(x+3y) < 3x+2y+2(y+1) \Leftrightarrow 2x+7y+2 > 0$. (1)

Xét điểm $A(1;1)$ ta có $2+7+2 > 0$ (đúng).

Xét điểm $B(-1;-2)$ ta có $-2-14+2 > 0$ (sai).

Xét điểm $C(0;-1)$ ta có $-7+2 > 0$ (sai).

Xét điểm $D(-3;-1)$ ta có $-6-7+2 > 0$ (sai).



Ví dụ 1.3.

Điểm $R(1;1)$ không nằm trong miền nghiệm của bất phương trình nào dưới đây?

(i) $3(x-1)+4(y-2) < 5x-3$

(ii) $5x+4y > x-2$

Lời giải

Xét (i) ta có $3(1-1)+4(1-2) < 5.1-3 \Leftrightarrow -4 < 2$ đúng.

Xét (ii) ta có $5.1+4.1 > 1-2 \Leftrightarrow 9 > -1$ đúng.



Xét ⁽ⁱⁱⁱ⁾ ta có $2.1 + (1 - 2) > 5(1 - 2) \Leftrightarrow 1 > -5$ đúng.

Xét ^(iv) ta có $2(1+1) - 2(1-1) > 3.1 + 2 \Leftrightarrow 4 > 5$ vô lý.

Nên $R(1;1)$ không nằm trong miền nghiệm của ^(iv)



▣ Dạng 2. Biểu diễn hình học miền nghiệm



Phương

Xét bất phương trình $ax + by + c \geq 0$ (1).

» **Bước (1):** Vẽ đường thẳng $D : ax + by + c = 0$.

» **Bước (2):** Lấy một điểm $M_0(x_0; y_0)$ không thuộc D (thường lấy gốc tọa độ O).

» **Bước (3):** Tính $ax_0 + by_0 + c$ và so sánh với 0.

» **Bước (4):** Kết luận:

Nếu $ax_0 + by_0 + c < 0$ thì nửa mp bờ $ax + by + c < 0$ không chứa M_0 là miền nghiệm của (1)

Nếu $ax_0 + by_0 + c > 0$ thì nửa mp bờ $ax + by + c > 0$ chứa M_0 là miền nghiệm của (1)



Ví dụ 2.1.

Xác định miền nghiệm của các bất phương trình:

(1) $x \geq 1$

(2) $y \leq 1$

(3) $x + y < 4$

(4) $-3x + 2y > 0$

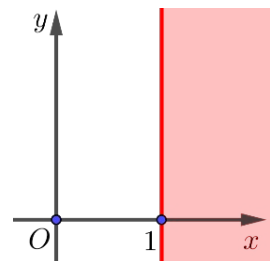
🔑 Lời giải

(1) Xác định miền nghiệm của $x \geq 1$

Vẽ đường thẳng $D : x - 1 = 0$.

Lấy một điểm $O(0;0) \notin D$.

Ta có: $-1 < 0$ nên miền nghiệm của bất phương trình $x \geq 1$ là nửa mp không chứa điểm O (tính cả bờ D).

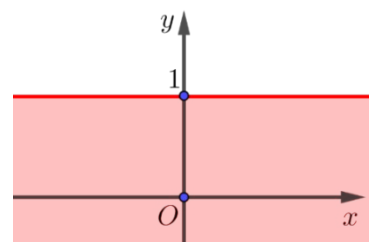


(2) Xác định miền nghiệm của $y \leq 1$

Vẽ đường thẳng $D : y - 1 = 0$.

Lấy một điểm $O(0;0) \notin D$.

Ta có: $-1 < 0$ nên miền nghiệm của bất phương trình $y \leq 1$ là nửa mp chứa điểm O (tính cả bờ D).

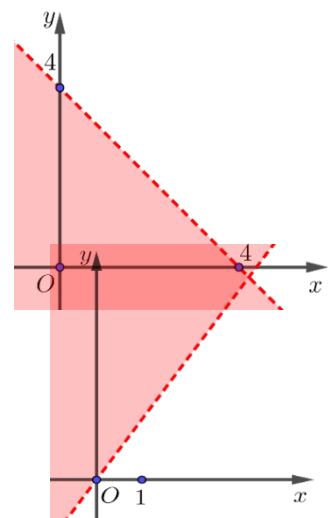


(3) Xác định miền nghiệm của $x + y < 4$

Vẽ đường thẳng $D : x + y - 4 = 0$.

Lấy một điểm $O(0;0) \notin D$.

Ta có: $-4 < 0$ nên miền nghiệm của bất phương trình $x + y < 4$ là nửa mp chứa điểm O (không tính bờ D).



(4) Xác định miền nghiệm của $-3x + 2y > 0$



Vẽ đường thẳng $D: -3x + 2y = 0$.

Lấy một điểm $A(1;0) \notin D$.

Ta có: $-3 < 0$ nên miền nghiệm của bất phương trình $-3x + 2y > 0$ là nửa mp không chứa điểm A (không tính bờ D).



Ví dụ 2.2.

Biểu diễn hình học tập nghiệm của các bất phương trình:

(1) $2x + y \leq 3$

(2) $-3x + y + 2 \geq 0$

(3) $x + 3 + 2(2y + 5) < 2(1 - x)$

(4) $-3x + 2y > 0$

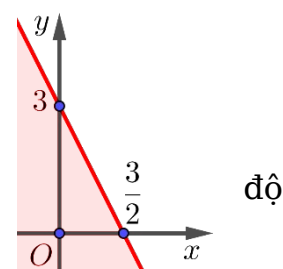
Lời giải

(1) Biểu diễn hình học tập nghiệm của $2x + y \leq 3$

Vẽ đường thẳng $\Delta: 2x + y = 3$.

Lấy gốc tọa độ $O(0;0)$,

Ta thấy $O \notin \Delta$ và có $2 \cdot 0 + 0 < 3$ nên nửa mp bờ Δ chứa gốc tọa độ O là miền nghiệm của bất phương trình đã cho (miền bị tô đậm trong hình).

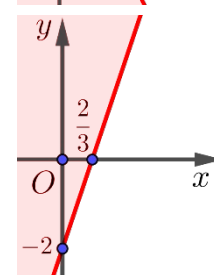


(2) Biểu diễn hình học tập nghiệm của $-3x + y + 2 \geq 0$

Vẽ đường thẳng $d: -3x + y + 2 = 0$.

Lấy gốc tọa độ $O(0;0)$,

Ta thấy $O \notin d$ và có $-3 \cdot 0 + 0 + 2 > 0$ nên nửa mp bờ d chứa gốc tọa độ O là miền nghiệm của bất phương trình đã cho.



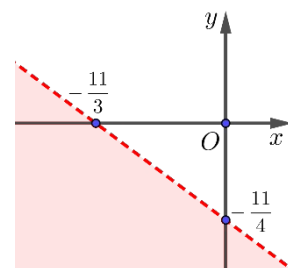
(3) Biểu diễn hình học tập nghiệm của $x + 3 + 2(2y + 5) < 2(1 - x)$

Thu gọn bất phương trình để bài đã cho về thành $3x + 4y + 11 < 0$.

Ta vẽ đường thẳng $d: 3x + 4y + 11 = 0$.

Lấy gốc tọa độ $O(0;0)$,

Ta thấy $O \notin d$ và có $3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 11 > 0$ nên nửa mp bờ d chứa gốc tọa độ O không là miền nghiệm của bất phương trình đã cho.

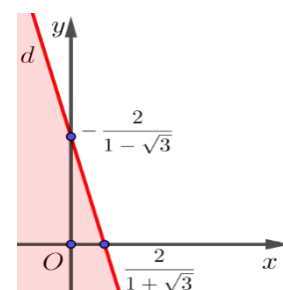


(4) Biểu diễn hình học tập nghiệm của $(1 + \sqrt{3})x - (1 - \sqrt{3})y \leq 2$

Ta vẽ đường thẳng $d: (1 + \sqrt{3})x - (1 - \sqrt{3})y = 2$.

Lấy gốc tọa độ $O(0;0)$,

Ta thấy $O \notin d$ và có $(1 + \sqrt{3}) \cdot 0 - (1 - \sqrt{3}) \cdot 0 \leq 2$ nên nửa mp bờ d chứa gốc tọa độ O là miền nghiệm của bất phương trình đã cho.





Ví dụ 2.3.

Xác định miền nghiệm của bất phương trình 2 ẩn

(1) $4x - 3y + 12 > 0$

(2) $-2x + 3y - 6 \leq 0$

(3) $\frac{x+y}{2} \leq \frac{2x-y+1}{3}$

(4) $2x - \sqrt{2}y + \sqrt{2} - 2 \leq 0$

Lời giải

(1) $4x - 3y + 12 > 0$ (1)

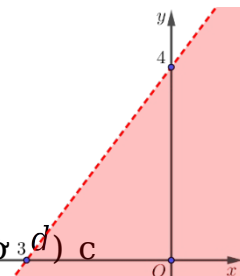
Vẽ đường thẳng $d: 4x - 3y + 12 = 0$.

Lấy $O(0;0) \notin d$.

Ta thấy $O(0;0)$ là nghiệm của bất phương trình (1).

Vậy miền nghiệm cần tìm là nửa mặt phẳng (không kể bờ d)

chứa điểm $O(0;0)$ (được tô màu)

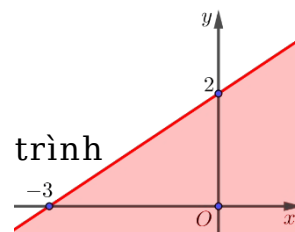


(2) $-2x + 3y - 6 \leq 0$ (2)

Vẽ đường thẳng $d: -2x + 3y - 6 = 0$.

Lấy $O(0;0) \notin d$. Ta thấy $O(0;0)$ là nghiệm của bất phương trình (2).

Vậy miền nghiệm cần tìm là nửa mặt phẳng (kể bờ d) chứa điểm $O(0;0)$ (được tô màu)



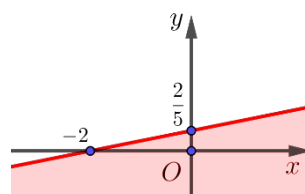
(3) $\frac{x+y}{2} \leq \frac{2x-y+1}{3}$ (3)

Ta có: $\frac{x+y}{2} \leq \frac{2x-y+1}{3} \Leftrightarrow 3(x+y) \leq 2(2x-y+1) \Leftrightarrow x-5y \geq -2$

Vẽ đường thẳng $d: x - 5y = -2$.

Lấy $O(0;0) \notin d$. Ta thấy $O(0;0)$ là nghiệm của bất phương trình (3).

Vậy miền nghiệm cần tìm là nửa mặt phẳng (kể bờ d) chứa điểm $O(0;0)$ (được tô màu)



(4) $2x - \sqrt{2}y + \sqrt{2} - 2 \leq 0$ (4)

Vẽ đường thẳng $d: 2x - \sqrt{2}y + \sqrt{2} - 2 = 0$.

Lấy $O(0;0) \notin d$. Ta thấy $O(0;0)$ là nghiệm của bất phương trình (4).

Vậy miền nghiệm cần tìm là nửa mặt phẳng (kể bờ d) chứa điểm $O(0;0)$ (được tô màu)

