**Ví dụ 11.** Giải phương trình 

**- Phân tích.** Bằng kĩ năng nhẩm nghiệm ta có  là một nghiệm của phương trình trên. Từ đó nảy sinh ý tưởng nhân liên hợp. Và tất nhiên, để giải quyết nốt vế sau thì ta có thể phải nhắc đến phương pháp hàm số. Từ đó ta có lời giải cho bài toán như sau:

**Lời giải**

Điều kiện  Khi đó phương trình đã cho tương đương với







Xét hàm số 

Ta có  

Vậy  là hàm đồng biến trên  Mà  nên phương trình  có nghiệm duy nhất 

Tóm lại, phương trình ban đầu có 2 nghiệm  

**- Bình luận.** Sau phép nhân liên hợp ta chỉ mới tìm ra được một nghiệm của phương trình. Tuy nhiên, vấn đề khó khăn hơn đó là chúng ta lại tạo ra một phương trình  có hình thức phức tạp hơn phương trình ban đầu. Tuy nhiên, bằng cách sử dụng tính đơn điệu của hàm số ta đã chứng minh được rằng phương trình  có nghiệm duy nhất  Sự kết hợp giữa hai phương pháp này đã tạo nên nét đặc trưng cho lời giải khi gặp những dạng phương trình vô tỷ như trên.

**Ví dụ 12.** Giải phương trình 

**- Phân tích.** Ý tưởng sử dụng phương pháp nhân liên hợp mở đầu xuất phát từ việc ta nhẩm được nghiệm của phương trình.

Khi đó ta có: 

Khó khăn ở vế sau chúng ta sẽ giải quyết nó bằng phương pháp hàm số, cụ thể được thể hiện trong lời giải sau đây:

**Lời giải**

Điều kiện  Phương trình tương đương với







Xét   Ta có



Do đó,  nếu có nghiệm sẽ có duy nhất nghiệm.

Hơn nữa, ta lại có  nên  có nghiệm 

Vậy, phương trình đã cho có 2 nghiệm  

**- CÁC BÀI TẬP RÈN LUYỆN.**

**Bài 1.** Giải phương trình  Đáp số:  

**Bài 2.** Giải phương trình  Đáp số: 

Hướng dẫn:  trục căn thức làm xuất hiện nhân tử chung 

**Bài 3.** Giải phương trình  Đáp số:

Hướng dẫn:  trục căn thức làm xuất hiện nhân tử chung 

**Bài 4.** Giải phương trình  Đáp số: 

Hướng dẫn:  trục căn thức làm xuất hiện nhân tử chung 

**Bài 5.** Giải phương trình 

Hướng dẫn:  trục căn thức làm xuất hiện nhân tử chung 

Đáp số: 

**Bài 6.** Giải phương trình  Đáp số: 

**Bài 7.** Giải phương trình  (HSG HN2010) Đáp số: 

**Bài 8.** Giải phương trình  Đáp số:  

**Bài 9.** Giải phương trình  Đáp số: 

**Bài 10.** Giải phương trình  Đáp số:  

**Bài 11.** Giải phương trình  Đáp số: 

**Bài 12.** Giải phương trình  Đáp số: 

**Bài 13.** Giải phương trình  Đáp số: 

**Bài 14.** Giải phương trình  Đáp số: 

**Bài 15.** Giải phương trình  Đáp số: 

**Bài 16.** Giải phương trình  Đáp số: 

**Bài 17.** Giải phương trình 

Hướng dẫn: Chứng minh  Đáp số: 

**Bài 18.** Giải phương trình  Đáp số:

**Bài 19.** Giải phương trình 

Đáp số: 

**Bài 20.** Giải phương trình  Đáp số:  

**Bài 21.** Giải phương trình 

Đáp số:  **IV/ SỰ KẾT HỢP GIỮA PHƯƠNG PHÁP HÀM SỐ VÀ CÁC PHƯƠNG PHÁP KHÁC.**

**Ví dụ 1.** Giải phương trình 

**- Phân tích.** Phương trình được biến đổi thành dạng:



Sự phân tích này dẫn đến ý tưởng sử dụng tính đơn điệu của hàm số để giải quyết phương trình. Sau đó, ta cần tìm nghiệm của phương trình . Chắc chắn chúng ta chưa thể kết luận được nghiệm của phương trình ngay lúc này. Và có lẽ biện pháp nâng lũy thừa là giải pháp an toàn cho phương trình . Từ đó, ta có lời giải:

**Lời giải**

Ta có:  

Xét hàm  đồng biến với mọi 

Do đó,   

  

Vậy, phương trình đã cho có 3 nghiệm:  

**- Bình luận.** Trong lời giải trên ta cần chú ý đến kĩ năng tìm ra hàm số đặc trưng và hàm số kết hợp cùng với phương pháp nâng lũy thừa để có thể tìm được các nghiệm của phương trình.

Bài tập tương tự:

1. Giải phương trình 

2. Giải phương trình 

(Đề thi Olympic 30/04/2011)

**Ví dụ 2.** Giải phương trình 

**- Phân tích.**

Phương trình được biến đổi thành dạng: 

Ý tưởng tương tự bài trước, bằng sự kết hợp hai phương pháp hàm số và phương pháp nâng lũy thừa chúng ta quy việc giải phương trình trên về giải phương trình  Tuy nhiên , phương trình bậc 3 này lại có 3 nghiệm phân biệt là 3 số vô tỷ đều thuộc  để ý đến đẳng thức  sẽ giúp chúng ta định hướng được cách giải phương trình bậc 3 này. Cụ thể lời giải như sau:

**Lời giải**

Ta có: 

Trong đó  Dễ thấy  là một hàm đồng biến trên  nên

  

- Nếu  thì 

- Nếu  thì đặt  

Phương trình trở thành:   

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm   

**- Bình luận.** Với phương trình trên, bằng phương pháp hàm số ta mới chỉ thực hiện được một công đoạn của công việc giải phương trình. Do đó, để hoàn thành công việc giải phương trình thì ta cần có sự kết hợp giữa phương pháp nâng lũy thừa, phương pháp đánh giá và phương pháp đặt ẩn phụ. Nếu thiếu đi một công đoạn ta sẽ không hoàn thành công việc cũng như không giải quyết được trọn vẹn phương trình.

**Ví dụ 3.** Giải phương trình

 (http:// k2pi.net)

**- Phân tích.** Quan sát kĩ phương trình trên ta nhận thấy một số điều sau đây:







Dựa trên những điều này, phương trình được biến đổi tương đương thành:



Từ đây, ý tưởng sử dụng phương pháp hàm số đã rõ ràng. Ta quy bài toán về giải phương trình: 

Đến đây phương trình vẫn chưa được giải quyết hoàn toàn. Vấn đề nảy sinh bây giờ là giải phương trình . Để ý  gợi cho ta nghĩ đến phương pháp đặt ẩn phụ để giải quyết phương trình . Cụ thể lời gải bài toán như sau:

**Lời giải**

Điều kiện  Khi đó, phương trình được viết lại dưới dạng sau:



Xét hàm số   có   nên hàm số  đồng biến trên .

Do đó, phương trình tương đương với 

Đặt  

Ta có hệ phương trình  

  Tiếp tục đặt 

Ta cần giải hệ phương trình  



Với     (thỏa mãn điều kiện và phương trình ban đầu)

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm  

**- Bình luận.** Một phương trình tuy có hình thức khá cồng kềnh nhưng bằng sự kết hợp giữa hai phương pháp hàm số và phương pháp đặt ẩn phụ đã giúp ta giải quyết phương trình một cách tự nhiên và trọn vẹn. Bằng sự kết hợp giữa phương pháp hàm số và một số phương pháp khác, các bạn độc giả có thể thực hiện giải quyết một số bài toán sau đây:

**- BÀI TẬP TỰ LUYỆN CÓ ĐÁP SỐ**

**Bài 1.** Giải phương trình  Đáp số:  

**Bài 2.** Giải phương trình  Đáp số:   

**Bài 3.** Giải phương trình 

(Trích đề thi HSG Hải Phòng) Đáp số: 

**Bài 4.** Giải phương trình 

(Trích đề thi chọn đội tuyển Phú Yên) Đáp số:   

**Bài 5\*.** Giải phương trình 

Hướng dẫn: Chú ý  Đáp số:  

**V/ MỘT SỐ KIỂU KẾT HỢP KHÁC ĐỂ GIẢI PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỶ**

**Ví dụ 1.** Giải phương trình 

**- Phân tích.** Kiểm ta nghiệm phương trình bằng máy tính CaSiO ta thấy rằng phương trình trên có 3 nghiệm phân biệt đều thuộc . Do đó, bằng sự kết hợp giữa phương pháp đánh giá và phương pháp đặt ẩn phụ ta có lời giải:

**Lời giải**

Nếu  phương trình không xác định.

Nếu  ta có:  Suy ra phương trình vô nghiệm. Do đó, ta chỉ cần giải phương trình đã cho với 

Đặt   Khi đó, phương trình trở thành:

   (vì )

Tóm lại, phương trình đã cho có 3 nghiệm:   

**- Bình luận.** Bởi vì phương trình xuất hiện 2 nghiệm rất lẻ nên ta không nên sử dụng phương pháp nâng lũy thừa ngay từ đầu. Phép đặt ẩn phụ bằng cách lượng giác hóa phương trình như trên ta cũng có thể nhận ra nếu liên tưởng đến công thức quen thuộc trong lượng giác:



Bài tập tương tự: Giải phương trình 

**Ví dụ 2.** Giải phương trình 

**- Phân tích.** Phương trình dạng này rất quen thuộc, ta có thể giải quyết bằng phương pháp nâng lũy thừa hoặc phương pháp đặt ẩn phụ  để đưa về hệ đối xứng loại 2. Nhưng với ý tưởng táo bạo hơn đó là sử dụng phương pháp hàm số, ta sẽ xử lý phương trình trên như thế nào. Lời giải sau đây sẽ chứng minh cho ý tưởng này:

**Lời giải**

Điều kiện xác định: 

- Nếu  

Phương trình được viết lại dưới dạng: 

Ta có hàm số  có  

Do đó    

- Nếu   Phương trình được viết lại dưới dạng:

 

  

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm 

**- Bình luận.** Qua lời giải trên chúng ta thấy rằng, việc xây dựng hàm số cũng cần phải có sự linh hoạt. Như vậy, sự kết hợp phương pháp đánh giá và phương pháp nâng lũy thừa đứng thời điểm mà ý tưởng sử dụng phương pháp hàm số đã thành công.

**Ví dụ 3.** Giải phương trình 

**- Phân tích.** Phương trình được viết lại dưới dạng: 

Ta để ý rằng  Để có được điều này ta có thể sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki để đánh giá. Nhưng điều quan trọng hơn đó là việc tìm nghiệm phương trình cũng như tìm điều kiện để đẳng thức xảy ra. Khi đó ta có lời giải như sau:

**Lời giải**

Điều kiện:  . Với điều kiện này phương trình đã cho được biến đổi thành: 

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có:



Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi 

  

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là 

**- Bình luận.** Sự tinh tế trong lời giải trênđó là sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki một cách hiệu quả. Tuy nhiên ta không thể dừng tại đây, việc tìm dấu đẳng thức xảy ra của bất đẳng thức dẫn đế việc giải một hệ các phương trình chứa căn thức và phương pháp nâng lũy thừa sẽ giúp ta vấn đề này.

**Ví dụ 4.** Giải phương trình 

**- Phân tích.** Đối với phương trình này ta cần trục căn thức bằng cách nhân lượng liên hợp.

Khi đó, phương trình tương đương với 

Quan sát kĩ phương trình  ta nhận thấy các biểu thức trong phương trình có thể dễ dàng lấy đạo hàm.

Nếu xét hàm số  

Khi đó  Vấn đề đặt ra bây giờ đó là liệu hàm  có đơn điệu hay không? Hay nó có thể đơn điệ trên khoảng nào? Vấn đề sẽ được giải quyết trong lời giải sau:

**Lời giải**

Điều kiện  Phương trình tương đương với 

- Nếu  thì 

- Nếu  Dễ thấy  là một nghiệm của phương trình . Xét hàm số  

Ta có  

Do đó, hàm  đồng biến trên  Suy ra , hay phương trình vô nghiệm.

Tóm lại,  là nghiệm duy nhất của phương trình ban đầu.

**- Bình luận.** Sự khéo léo khi ta kết hợp phương pháp hàm số với phương pháp trong lời giải trên đó là nhờ kĩ năng đánh giá để chia trường hợp. Sự vắng mặt của phương pháp đánh giá trong lời giải trên thì chỉ hai phương pháp nhân liên hợp và phương pháp hàm số ta không thể giả quyết trọn vẹn phương trình được.

Bước vào thế giới phương trình vô tỷ ta mới biết được phương trình vô tỷ đa dạng như thế nào. Có những phương trình rất đơn thuần, chỉ cần chọn đúng 1 phương pháp nào đó là ta có thể giải quyết ngay phương trình đó. Nhưng hầu hết các bài toán mà chúng ta thường gặp trong các đề thi Đại học, đề thi HSG đều không phải tầm thường như vậy. Chính vì thế, chúng ta cần phải biết phối hợp một cách nhuần nhuyễn, linh hoạt giữa các phương pháp giải một cách hiệu quả thì mới có thể giiar quyết triệt để phương trình. Khi ta sử dụng một công cụ nào đó mà không thể giải quyết triệt để phương trình, ta hãy nghĩ đến việc sử dụng thêm một công cụ khác nữa và thậm chs có nhiều công cụ khác nữa.