|  |  |
| --- | --- |
|  | **đề HSG THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH**  **NĂm HỌC 2018 - 2019**  **MÔN TOÁN(NGÀY THI THỨ HAI)**  **Time: 180 Phút** |

**Bài 1.(***5 điểm***)** Cho hàm số  thỏa mãn

 và  với mọi .

a) Chứng minh rằng  không phải là đơn ánh trên .

b) Chứng minh rằng  với mọi .

**Bài 2.(***5 điểm***)** Cho tam giác  nhọn, không cân và nội tiếp . Một đường tròn  thay đổi đi qua  và cắt các đoạn thẳng ,  lần lượt tại  và . Trên đường thẳng  lấy hai điểm phân biệt  sao cho  và  tiếp xúc với đường thẳng . Giả sử  cắt  tại  khác . Gọi  là đường tròn ngoại tiếp tam giác .

a) Chứng minh rằng đường tròn  đi qua trực tâm của tam giác .

b) Chứng minh rằng điểm  luôn di động trên một đường thẳng cố định khi  thay đổi.

**Bài 3.(***5 điểm***)** Cho  là tập hợp các bộ  là hoán vị của  số nguyên dương đầu tiên.

a) Có bao nhiêu hoán vị  thuộc  sao cho với mọi  ta luôn có  và ?

b) Tồn tại hay không hoán vị  thuộc  sao cho với mọi đều tồn tại các số nguyên  thỏa mãn ?

**Bài 4. (***5 điểm***)**

Tại một hội nghị khoa học có 100 đại biểu tham dự. Người ta nhận thấy rằng không có 3 đại biểu nào đôi một quen nhau. Biết rằng tồn tại số nguyên dương  sao cho không có đại biểu nào quen quá  đại biểu khác và với mọi ,  có ít nhất một đại biểu quen đúng  đại biểu khác. Hãy tìm giá trị lớn nhất của .

🙢 **HẾT** 🙠

|  |  |
| --- | --- |
|  | **Giải chi tiết đề HSG THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH**  **NĂm HỌC 2018 - 2019**  **MÔN TOÁN(NGÀY THI THỨ HAI)**  **Time: 180 Phút** |

**Bài 1.(***5 điểm***)** Cho hàm số  thỏa mãn

 và  với mọi .

a) Chứng minh rằng  không phải là đơn ánh trên .

b) Chứng minh rằng  với mọi .

**Lời giải**

a) Chứng minh rằng  không phải là đơn ánh trên .

Xét phương trình .

Thay  vào các điều kiện của đề bài, ta có

 và .

Suy ra  hoặc ; tức là .

Một cách tương tự, thay  trong điều kiện thứ nhất và thay 

trong điều kiện thứ hai, ta có  và .

Do đó, trong ba số  phải có hai số bằng nhau; điều này chứng tỏ  không phải là một đơn ánh trên .

b) Chứng minh rằng  với mọi .

Theo giả thiết suy ra  với mọi  nên  

Từ . Suy ra  .

Ta xây dựng dãy số   

Rõ ràng theo biến đổi trên thì với mọi  , ta luôn có 

Ta thấy  nên  và cứ như thế , ta thấy dãy đã cho là dãy số tăng ngặt.

Ngoài ra , cũng bằng phương pháp quy nạp toán học , ta thấy  với mọi 

Thật vậy: Với  có  (mệnh đề đúng với ).

Giả sử mệnh đề đúng với  tức là 

Ta chứng minh mệnh đề đúng với  . Ta có:



Từ đó dãy  tăng và bị chặn trên nên có giới hạn hữu hạn , đặt là  ,  .

Ta có  , giải ra có  .

Vì  nên phải có  , đpcm.

**Bài 2.(***5 điểm***)** Cho tam giác  nhọn, không cân và nội tiếp . Một đường tròn  thay đổi đi qua  và cắt các đoạn thẳng ,  lần lượt tại  và . Trên đường thẳng  lấy hai điểm phân biệt  sao cho  và  tiếp xúc với đường thẳng . Giả sử  cắt  tại  khác . Gọi  là đường tròn ngoại tiếp tam giác .

a) Chứng minh rằng đường tròn  đi qua trực tâm của tam giác .

b) Chứng minh rằng điểm  luôn di động trên một đường thẳng cố định khi  thay đổi.

**Lời giải**

****

a) Giả sử  thì  là điểm Miquel của tứ giác toàn phần  nên điểm .

Ta có:  nên  là trung điểm của .

Từ đó ta có . Tương tự thì .

Do đó:  hay .

Mặt khác, gọi  là trực tâm của  thì  nên .

Từ đây suy ra đường tròn  đi qua trực tâm của tam giác .

b) Vì đường tròn  đi qua trực tâm của tam giác  nên nó đối xứng với đường tròn  qua , mà  đi qua điểm  cố định nên đường tròn  đi qua điểm  đối xứng với  qua , cũng cố định.

Gọi  thì .

Ta có  nên .

Gọi là trung điểm của , khi đó .

Gọi  là giao điểm của đường thẳng  với , .

Suy ra . Do đó, suy ra   cố định.

Vậy  di động trên đường trung trực của  cố định.

**Bài 3.(***5 điểm***)** Cho  là tập hợp các bộ  là hoán vị của  số nguyên dương đầu tiên.

a) Có bao nhiêu hoán vị  thuộc  sao cho với mọi  ta luôn có  và ?

b) Tồn tại hay không hoán vị  thuộc  sao cho với mọi đều tồn tại các số nguyên  thỏa mãn ?

**Lời giải**

+) Chia các số từ thành  nhóm theo số dư, khi chia cho  thì rõ ràng mỗi nhóm có  số ( số này ở các vị trí  với  của hoán vị). Các số trong mỗi bộ trên sẽ được hoán vị đổi vị trí cho nhau.

+) Ta thấy với một bộ , ta có  cách hoán vị là:



để cho không có phần tử nào nằm đúng vị trí ban đầu

+) Vì thế có tất cả  hoán vị thỏa mãn đề bài.

Lưu ý: Nếu thí sinh dùng công thức  cũng cho điểm tối đa.

b) Tồn tại hay không hoán vị  thuộc  sao cho với mọi đều tồn tại các số nguyên  thỏa mãn ?

\***Bổ đề**: Với  là số nguyên tố có dạng  thì  sẽ lập thành hệ thặng dư đầy đủ theo 

Chứng minh bổ đề: Giả sử trong bộ trên có hai số  sao cho  thì . Theo định lý Fermat nhỏ thì  nên



kéo theo  hay , vô lý vì  và  (Bổ đề được chứng minh)

\* Ta sẽ xây dựng hoán vị thỏa mãn đề bài sao cho  với mọi .

Với  số đầu tiên, theo nhận xét thì các số  có số dư đôi một khác nhau khi chia cho  nên ta sắp xếp chúng để số dư thay đổi từ .

Các số  cũng được thực hiện hoán vị tương tự.

Hoán vị này thỏa mãn vì

.

**Lưu ý:** Ta dễ dàng chứng minh bằng phương pháp qui nạp kết quả sau: Với mọi số tự nhiên  thì .

**Bài 4. (***5 điểm***)**

Tại một hội nghị khoa học có 100 đại biểu tham dự. Người ta nhận thấy rằng không có 3 đại biểu nào đôi một quen nhau. Biết rằng tồn tại số nguyên dương  sao cho không có đại biểu nào quen quá  đại biểu khác và với mọi ,  có ít nhất một đại biểu quen đúng  đại biểu khác. Hãy tìm giá trị lớn nhất của .

**Lời giải**

Ta chứng minh . Giả sử .

**Cách 1:**

Khi đó tồn tại đại biểu  quen 67 đại biểu , ,…, .

Gọi  là tập hợp các đại biểu , ,…,  thì .

Khi đó các đại biểu , ,…,  chỉ có thể quen  và các đại biểu thuộc ( vì các đại biểu ,  với  không thể quen nhau).

Suy ra họ quen không quá 33 đại biểu.

Vì vậy những đại biểu quen 34, 35, …, 65, 66 đại biểu khác phải thuộc .

Điều này vô lý bởi =33.

**Cách 2:**

Xét người  có  người quen. Xét người  có lớn hơn hoặc bằng  người quen.

Nếu  quen , khi đó trong  người còn lại có  người quen  và lớn hơn hoặc bằng  người quen .

Do  nên ,  phải có người quen chung (mâu thuẫn giả thiết ).

Vậy  không quen .

Vì có ít nhất  người có số người quen tương ứng là , ,…,  nên có ít nhất  người không quen . Điều này mâu thuẫn vì  quen với  người.

Vậy .

Ta xây dựng ví dụ thỏa mãn  như sau:

 quen với , ,…,,  quen với , ,…, ,…,  quen với ,…, .

Khi đó không có 3 người đôi một quen nhau và quen với người và  quen với  người ,  quen với  người .

Rõ ràng trường hợp trên thỏa mãn các yêu cầu đề bài.

🙢 **HẾT** 🙠