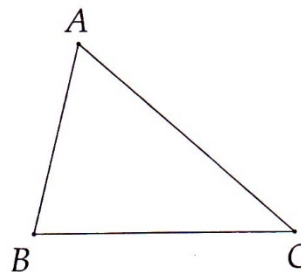


CHỦ ĐỀ 3. QUAN HỆ GIỮA BA CẠNH CỦA MỘT TAM GIÁC BẤT ĐẲNG THỨC TAM GIÁC

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Trong một tam giác, độ dài của một cạnh bao giờ cũng lớn hơn giá trị tuyệt đối của hiệu và nhỏ hơn tổng các độ dài của hai cạnh còn lại. Cụ thể:

$$|AB - AC| < BC < AB + AC.$$



II .BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Khẳng định có tồn tại hay không một tam giác biết độ dài ba cạnh

Phương pháp giải:

- Tồn tại một tam giác có độ dài ba cạnh là a, b, c nếu:

$$\begin{cases} a < b + c \\ b < a + c \\ c < a + b \end{cases} \text{ hoặc } |b - c| < a < b + c$$

- Trong trường hợp xác định được a là số lớn nhất trong ba số a, b, c thì điều kiện để tồn tại tam giác chỉ cần: $a < b + c$.

1A. Bộ ba độ dài nào dưới đây có thể tạo thành độ dài của 3 cạnh trong tam giác?

a) 5 cm; 10 cm; 12 cm,

b) 1 m; 2 m; 3 m.

c) 6 m; 9 m; 8 m.

1B. Bộ ba độ dài nào dưới đây có thể tạo thành độ dài của 3 cạnh trong tam giác?

a) 3 cm; 4 cm; 5 cm.

b) 2 m; 2 m; 5 m.

c) 5 m; 10 m; 15 m.

2A. Một tam giác cân có một cạnh bằng 6 cm. Tính hai cạnh còn lại, biết chu vi của tam giác đó bằng 20 cm

2B. Tính chu vi của một tam giác cân biết độ dài hai cạnh của nó là 3,9 cm và 7,9 cm.

3A. Cho tam giác ABC có $BC = 1$ cm, $AC = 7$ cm. Tìm độ dài cạnh AB, biết độ dài này là một số nguyên (cm).

3B. Cho tam giác MNP có $MN = 1$ m, $NP = 3$ m, độ dài cạnh MP là một số nguyên. Tính độ dài MP.

Dạng 2. Chứng minh các bất đẳng thức về độ dài

Phương pháp giải: Sử dụng bất đẳng thức tam giác và các biến đổi về bất đẳng thức.

- Cộng cùng một số vào hai vế của bất đẳng thức:

$$a < b \Rightarrow a + c < b + c.$$

- Cộng từng vế hai bất đẳng thức cùng chiều:

$$\begin{cases} a < b \\ c < d \end{cases} \Rightarrow a + c < b + d$$

4A. tam giác ABC, điểm M thuộc cạnh AB.

a) So sánh MC với $AM + AC$.

b) Chứng minh $MB + MC < AB + AC$.

4B. Cho tam giác ABC, trên tia đối của tia AC lấy điểm K.

a) So sánh AB với $KA + KB$.

b) Chứng minh $AB + AC < KB + KC$.

5A. Cho tam giác ABC, điểm M bất kỳ nằm trong tam giác.

a) So sánh $MB + MC$ với BC

b) Chứng minh $MA + MB + MC > \frac{AB + BC + CA}{2}$

5B. Cho tam giác ABC, điểm D thuộc cạnh BC.

a) So sánh AD với $BA + BD$.

b) Chứng minh $AD < \frac{AB + BC + CA}{2}$

6A. Cho tam giác ABC cân tại A. Trên tia đối của tia BA lấy điểm D sao cho $BD = BA$. Chứng minh $DC > AB$

6B. Cho tam giác ABC cân tại A. Trên tia đối của tia CA lấy điểm D. Chứng minh $DB > DC$.

III. BÀI TẬP VỀ NHÀ

7. Có hay không tam giác với độ dài các cạnh là

a) 2 m; 3 m; 5 m?

b) 6 cm; 8 cm; 10 cm?

8. Tìm chu vi của tam giác cân, nếu biết hai cạnh của nó bằng:

2.Đường tuy gần không đi sẽ không đến-Việc tuy nhỏ không làm sẽ không nên

- a) 7 cm và 3 cm; b) 8 cm và 2 cm.

9. Cho tam giác ABC có $AB = 1$ cm, $AC = 4$ cm, độ dài cạnh BC là một số nguyên. Tính độ dài BC.

10. Cho tam giác ABC điểm O nằm trong tam giác, tia BO cắt cạnh AC tại I

a) So sánh OA và $IA + IO$, từ đó suy ra $OA + OB < IA + IB$;

b) Chứng minh $OA + OB < CA + CB$.

c) Chứng minh

$$\frac{AB + BC + CA}{2} < OA + OB + OC < AB + BC + CA.$$

11. Cho tam giác ABC có $AB < AC$. Tia phân giác góc A cắt cạnh BC tại D, trên cạnh AC lấy E sao cho $AE = AB$.

a) So sánh DB và DE.

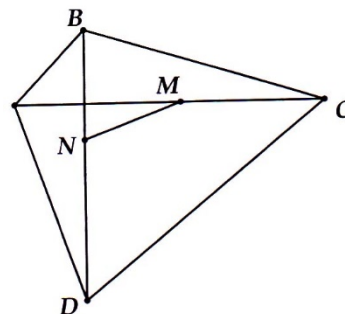
b) Chứng minh $AC - AB > DC - DB$.

12* Cho tam giác ABC. Gọi M là trung điểm của BC.

$$\frac{AB + AC}{2}$$

a) Chứng minh $AM < \frac{AB + AC}{2}$

b) Cho bốn điểm A, B, C, D như hình vẽ. Gọi thứ tự là trung điểm của AC và BD. Chứng minh $AB + BC + C + DA > 4MN$



HƯỚNG DẪN

1A. a) Có, vì $12 < 5 + 10$. b) Không, vì $1 + 2 = 3$

c) Có, vì $9 < 6 + 8$.

1B. a) Có, vì $5 < 3 + 4$. b) Không, vì $5 > 2 + 2$

b) Không, vì $5 + 10 = 15$.

2A. Nếu cạnh đã cho (6cm) là cạnh đáy thì hai cạnh còn lại là 7 cm và 7 cm, thỏa mãn bất đẳng thức tam giác.

Nếu cạnh đã cho (6 cm) là cạnh bên thì hai cạnh còn lại là 6 cm và 8 cm, thỏa mãn bất đẳng thức tam giác.

2B. Nhận xét: Cạnh thứ ba của tam giác cân bằng một trong hai cạnh kia.

Loại trường hợp cạnh thứ ba bằng 3,9 cm vì $3,9 + 3,9 < 7,9$.

Trường hợp cạnh thứ ba bằng 7,9 cm thỏa mãn bất đẳng thức tam giác vì $7,9 < 7,9 + 3,9$. Từ đó tính được chu vi của tam giác là 19,7 cm.

3A. Chú ý $|AC - BC| < AB < AC + BC \Rightarrow 6 < AB < 8$. Do AB là số nguyên nên $AB = 7$ cm.

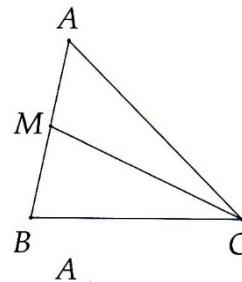
3B. Tương tự **3A**, ta có

$$2 < MP < 4 \Rightarrow MP \text{ 3cm}$$

4A. a) $\triangle AMC$ có $MC < AM + AC$.

b) Dùng kết quả câu a, ta có

$$\begin{aligned} MB + MC' &< MB + MA + AC \\ &= AB + AC. \end{aligned}$$



4B. Tương tự **4A**.

5A. a) $\triangle MBC$ có $MB + MC > BC$.

b) Tương tự ý a, ta có

$$MA + MC > AC, MA + MB > AB.$$

Cộng từng vế của ba bất đẳng thức

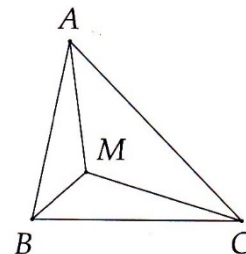
$$\Rightarrow 2(MA + MB + MC) > AB + BC + CA.$$

$$MA + MB + MC > \frac{AB + BC + CA}{2}$$

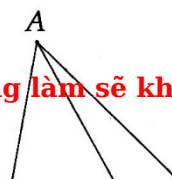
Chú ý rằng kết quả trên vẫn đúng khi M ở ngoài tam giác hoặc ở trên hai cạnh AB hoặc AC. Riêng khi M thuộc BC thì

$$BM + MC = BC$$

5B. a) $\triangle ABD$ có $AD < BA + BD$



4.Đường tuy gần không đi sẽ không đến-Việc tuy nhỏ không làm sẽ không nên



b) Tương tự ý a, ta có : $AD < CA + CD$

Cộng trừ hai vế bất đẳng thức

$$\Rightarrow 2AD < BA + BC + AC \Rightarrow \text{ĐPCM.}$$

6A. $\triangle ADC$ có $DC > AD - AC = AB$

6B. Tương tự **6A.**

7. a) Không, vì $2 + 3 = 5$.

b) Có, vì $6 + 8 > 10$.

8. Tương tự **2B**, ta có:

a) Chu vi tam giác là $7 + 7 + 3 = 17\text{cm}$.

b) Chu vi tam giác là $8 + 8 + 2 = 18\text{cm}$.

9. Tương tự 3A, ta có $3 < BC < 5 \Rightarrow BC = 4\text{cm}$.

10. a) $\triangle OIA$ có $OA < IA + IO$, do đó

$$OA + OB < IA + IO + OB = IA + IB.$$

b) Tương tự ý a, chứng minh được

$$IA + IB < CA + CB.$$

$$\text{Bởi vậy } OA + OB < IA + IB < CA + CB.$$

c) Chứng minh được các bất đẳng thức tương tự $OB + OC < AB + AC$, $OC + OA < BA + BC$.

Cộng từng vế của ba bất đẳng thức, ta được

$$OA + OB + OC < AB + BC + CA.$$

Kết hợp với kết quả của **5A**, ta có ĐPCM

11. a) Chứng minh được

$$\triangle ADB = \triangle ADE \text{ (c.g.c)} \Rightarrow DB = DE.$$

b) $\triangle EDC$ có $EC > DC - DE$.

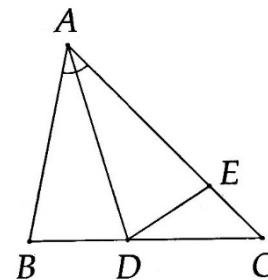
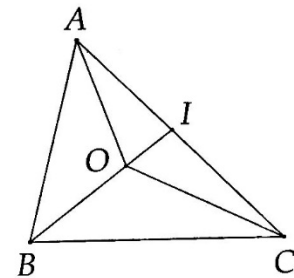
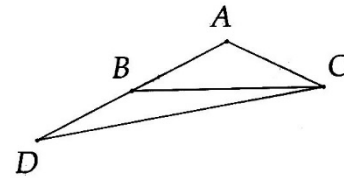
$$\text{Chú ý rằng } AC - AB = AC - AE =$$

$$\text{và } DC - DE = DC - DB.$$

$$\text{Từ đó ta có } AC - AB > DC - DB.$$

12*. a) Trên tia đối của tia MA lấy điểm D

5.Đường tuy gần không đi sẽ không đến-Việc tuy nhỏ không làm sẽ không nên



sao cho $MD = MA$. Chứng minh được

$$\triangle MAB = \triangle MDC \text{ (c.g.c)} \Rightarrow AB = CD.$$

$\triangle ACD$ có $AC + CD > AD$, chú ý rằng

$$AD = 2AM, AB = CD \text{ nên}$$

$$2AM < AB + AC \Rightarrow AM < \frac{AB + AC}{2}$$

b) Sử dụng kết quả ý a) ta có:

$$BA + BC > 2BM, DA + DC > 2DM.$$

$$\text{Suy ra } AB + BC + CD + DA > 2(MB + MD). \quad (1)$$

Trong $\triangle BMD$, lại có

$$MB + MD > 2MN.$$

Từ (1) và (2), ta có ĐPCM

