

**ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI
GIẢI TOÁN TRÊN MÁY TÍNH CASIO
NĂM HỌC 2009 – 2010 -Lớp 12 THPT**

Qui ước: Nếu không nói gì thêm, hãy tính chính xác đến 10 chữ số

Bài 1(5 điểm): Tính giá trị gần đúng (chính xác đến 4 chữ số thập phân) biểu thức sau:

$$A = \left(1 - \frac{2}{1 \times 2 \times 3}\right)^3 + \left(3 - \frac{5}{2 \times 3 \times 4}\right)^3 + \left(5 - \frac{10}{3 \times 4 \times 5}\right)^3 + \left(7 - \frac{17}{4 \times 5 \times 6}\right)^3 + \dots + \left(45 - \frac{530}{23 \times 24 \times 25}\right)^3$$

Bài 2(5 điểm): Tìm chữ số lẻ thập phân thứ 12^{2007} kể từ dấu phẩy của số thập phân vô hạn tuần hoàn của số hữu tỉ: $\frac{1122007}{23}$

Bài 3(5 điểm): Tính giá trị của biểu thức:

$$\sqrt{1 + \frac{1}{2}} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}} \dots \sqrt{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{20}}$$

Bài 4(5 điểm): Cho $u_1 = 4, u_2 = 7, u_3 = 5$ & $u_n = 2u_{n-1} - u_{n-2} + u_{n-3}$ ($4 \leq n \in \mathbb{N}$). Tính u_{30}

Bài 5(5 điểm): Dãy số $\{u_n\}$ được cho bởi công thức: $u_n = n + \frac{2006}{n^2}$, với mọi n nguyên dương. Tìm số hạng nhỏ nhất của dãy số đó.

Bài 6(10 điểm): Cho hàm số $y = \frac{2x^2 - 7x - 4}{x^2 - 5x + 6}$. Tính $y^{(5)}$ tại $x = \frac{3}{5}$

Bài 7(5 điểm): Đường tròn $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ đi qua ba điểm $A(5;2), B(3;-4), C(4;7)$. Tính giá trị của a, b, c .

Bài 8(10 điểm) Tìm hai chữ số tận cùng của số: 112^{2007}

Bài 9(5 điểm) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho ΔABC . Biết $A(2; -4), B(-4;-1), C(6;4)$. Gọi D và E là chân các đường phân giác góc A trên đường thẳng BC. Tính diện tích ΔADE

Bài 10(10 điểm) Cho tứ giác ABCD có $A(10;1), B$ nằm trên trục hoành, $C(1;5)$; A và C đối xứng nhau qua BD; M là giao điểm của hai đường chéo AC và BD; $BM = \frac{1}{4} BD$

a) Tính diện tích tứ giác ABCD.

b) Tính độ dài đường cao đi qua đỉnh D của của ΔABD

Bài 11(10 điểm): Cho ΔABC cân tại A và nội tiếp trong đường tròn bán kính $R = 2006$ Tính giá trị lớn nhất của đường cao BH

Bài 12(5 điểm): Cho hàm số $y = 24x - \cos 12x - 3\sin 8x$. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}]$

Bài 13(10 điểm): Hãy rút gọn công thức: $S_n(x) = 2 + 2.3x + 3.4x^2 + \dots + n(n-1)x^{n-2}$.

Hãy tính $S_{17}(-\sqrt{2})$

Bài 14(5 điểm): Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số:

$$y = f(x) = \frac{2 \sin x + 3 \cos x - 1}{\sin x + 2}$$

Bài 15(5 điểm): Tìm nghiệm gần đúng(độ, phút ,giây) của phương trình:

$$2\sin^2 x + 9\sin x \cdot \cos x - 4\cos^2 x = 0$$

ĐÁP ÁN

Bài 1: Khai báo : $\sum_{x=1}^{29} \left((2x-1) \cdot \frac{x^2+1}{x(x+1)(x+2)} \right)^3$

Kết quả: 55662,0718

Bài 2: Ta có: $\frac{1122007}{23} = 48782,913043478260869565217391304\dots$

$\Rightarrow \frac{1122007}{23}$ là số hữu tỉ được đưa về số thập phân vô hạn tuần hoàn có chu kì 22

Mà: $12^1 \equiv 12 \pmod{22}$; $12^2 \equiv 12 \pmod{22} \Rightarrow 12^{2007} \equiv 12 \pmod{22}$

Vậy chữ số lẻ thập phân thứ 12^{2007} là 9

Bài 3 Gán $A = 0, B = 0$

Khai báo: $A = A + 1$; $B = B + 1$ $A : C + C \cdot \sqrt{B}$

Kết quả: 17667,97575

Bài 4: $u_{30} = 20\,929\,015$

Bài 5: $f(x) = x + \frac{2006}{x^2}, \forall x \in [1; +\infty)$

$f'(x) = 1 - \frac{4012}{x^3} = \frac{x^3 - 4012}{x^3}$;

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{4012}$

Vậy: $\min_{[1;+\infty)} f(x) = f(\sqrt[3]{4012}) \Rightarrow n = 16$

| | | | |
|---------|---|------------------|-----------|
| x | 1 | $\sqrt[3]{4012}$ | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | - | 0 | + |
| $f(x)$ | | | |

Bài 6: $y^{(n)} = (-1)^{n+1} \cdot 7 \cdot \frac{n!}{(x-3)^{n+1}} + (-1)^n \cdot 10 \cdot \frac{n!}{(x-2)^{n+1}}$

$y^{(5)}\left(\frac{3}{5}\right) \approx -154,97683$

Bài 7: $a = \frac{49}{4}$; $b = -\frac{19}{4}$; $c = -\frac{323}{4}$

Bài 8: $112^1 \equiv 12 \pmod{100}$; $112^2 \equiv 12^2 \equiv 44 \pmod{100}$; $112^5 \equiv 12^5 \equiv 32 \pmod{100}$

$112^7 \equiv 08 \pmod{100}$; $112^{10} \equiv (112^5)^2 \equiv 32^2 \equiv 24 \pmod{100}$; $112^{20} \equiv 24^2 \equiv 76 \pmod{100}$

$\Rightarrow 112^{2000} \equiv 76 \pmod{100}$; $112^{2007} \equiv 112^{2000} \cdot 112^7 \equiv 76 \cdot 8 \equiv 08 \pmod{100}$

Vậy hai chữ số tận cùng của số 112^{2007} là 08

Bài 9: Áp dụng tính chất đường phân giác của tam giác ,tính được: $D\left(\frac{2}{7}; \frac{8}{7}\right), E(-34; -36)$

$S_{\triangle ADE} = \frac{1}{2} AE \cdot AD = \frac{720}{7}$

Bài 10: $B\left(\frac{25}{6}; 0\right), D\left(\frac{19}{2}; 12\right); S_{ABCD} = \frac{1}{2} BD \cdot AC = \frac{194}{3}$

Bài 11: Đặt $\widehat{BAC} = 2x$ ($0 < x < \frac{\pi}{2}$). $\triangle ABC$ cân tại A nên: $B = C = \frac{1}{2}(\pi - 2x) = \frac{\pi}{2} - x$

* Theo định lý sin trong $\triangle ABC$ thì :

$\frac{AB}{\sin C} = 2R \Leftrightarrow AB = 2R \cdot \sin C = 2R \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 2R \cdot \cos x$

* $\triangle ABH$ vuông tại H có: $BH = AB \cdot \sin 2x = 2R \cdot \cos x \cdot \sin 2x \Leftrightarrow BH = 4R \cdot \sin x \cos^2 x = 4R \cdot \sin x \cdot (1 - \sin^2 x)$

Đặt $t = \sin x$ ($0 < t < 1$) và $y = BH$

$y = 4Rt(1 - t^2) = 4R(-t^3 + t), 0 < t < 1$; $y' = 4R(-3t^2 + 1)$; $y' = 0 \Leftrightarrow t = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$

Lập bảng biến thiên

| | | | |
|----|---|----------------------|-----------|
| x | 0 | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | $+\infty$ |
| y' | | + | 0 - |
| y | | | |

Suy ra: $\max_{(0;1)} y = y\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{8R\sqrt{3}}{9} = \frac{8.2006.\sqrt{3}}{9} \approx 3088,43904$

Bài 12: GTLN $\approx 14,16445$; GTNN $\approx -16,16445$

Bài 13: $S_n(x) = (2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots + n \cdot x^{n-1})' = [(x+x^2+x^3+x^4+\dots+x^n)' - 1]'$
 $= [(x+x^2+x^3+x^4+\dots+x^n)']'$

$$= \left[\left(x \cdot \frac{x^n - 1}{x - 1} \right)' \right]' = \left[\frac{n \cdot x^n - (n+1)x^{n-1} + 1}{(x-1)^2} \right]'$$

$$= \frac{n(n-1)x^{n+1} - 2(n^2-1)x^n + n(n+1)x^{n-1} - 2}{(x-1)^3}$$

$S_{17}(-\sqrt{2}) \approx -26108,91227$

Bài 14: GTLN $\approx 1,07038$; GTNN $\approx -3,73703$

Bài 15: $x_1 \approx 22^{\circ}10'22'' + k \cdot 180^{\circ}$; $x_2 \approx 78^{\circ}28'57'' + k \cdot 180^{\circ}$