

Bài 1 (4,0 điểm) Phân tích thành nhân tử:

a) $a^2 - 7a + 12$

b) $x^4 + 2015x^2 + 2014x + 2015$

c) $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$

d) $(x^2 - 8)^2 + 36$

Bài 2. (4,0 điểm) Tìm x biết:

a) $\frac{2}{3}x + 4 = -12$

b) $\frac{3}{4} + \frac{1}{4} : x = -3$

c) $|3x - 5| = 4$

d) $\frac{x+4}{2011} + \frac{x+3}{2012} = \frac{x+2}{2013} + \frac{x+1}{2014}$

Bài 3. (2,0 điểm)

a) Cho $A = \frac{a^2 + 4a + 4}{a^3 + 2a^2 - 4a - 8}$. Tìm $a \in \mathbb{Z}$ để A là số nguyên.

b) Tìm số tự nhiên n để $n^5 + 1$ chia hết cho $n^3 + 1$

Bài 4. (2,0 điểm)

a) Tìm a, b, c biết $5a - 3b - 4c = 46$ và $\frac{a-1}{2} = \frac{b+3}{4} = \frac{c-5}{6}$

b) Tìm 2 số hữu tỉ a và b biết: $a + b = ab = a : b (b \neq 0)$

Bài 5. (2,0 điểm)

a) Cho $a + b + c = 1$ và $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$. Tính $a^2 + b^2 + c^2$

b) Cho $a + b + c = 2014$ và $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} = \frac{1}{2014}$

Tính $S = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b}$

Bài 6. (3,0 điểm) Cho tam giác ABC có góc A nhỏ hơn 90^0 . Trên nửa mặt phẳng không chứa điểm C, bờ là đường thẳng AB vẽ AF vuông góc với AB và $AF = AB$. Trên nửa mặt phẳng không chứa điểm B, bờ là đường thẳng AC vẽ AH vuông góc với AC và $AH = AC$. Gọi D là trung điểm của BC. Trên tia đối của tia DA lấy điểm I sao cho $DI = DA$. Chứng minh rằng:

a) $AI = FH$

b) $DA \perp FH$

Bài 7. (2 điểm) Cho hình bình hành $ABCD$ có E, F thứ tự là trung điểm AB, CD.

a) Chứng minh rằng các đường thẳng AC, BD, EF cắt nhau tại trung điểm mỗi đường

b) Gọi giao điểm của AC với DE và BF theo thứ tự là M và N. Chứng minh rằng $EMFN$ là hình bình hành.

Bài 8 (1 điểm) Tìm giá trị nhỏ nhất của : $A_{(x)} = (x-1)(x-3)(x-4)(x-6) + 10$

ĐÁP ÁN

Bài 1.

a) $a^2 - 7a + 12 = a^2 - 3a - 4a + 12 = (a - 3)(a - 4)$

b) $x^4 + 2015x^2 + 2014x + 2015$
 $= x^4 + x^3 + x^2 + 2014x^2 + 2014x + 2014 - x^3 + 1$
 $= x^2(x^2 + x + 1) + 2014(x^2 + x + 1) - (x - 1)(x^2 + x + 1)$
 $= (x^2 + x + 1)(x^4 + 2014 - x + 1)$
 $= (x^2 + x + 1)(x^4 - x + 2015)$

c) $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y)^3 - 3xy(x + y) - 3xyz$
 $= (x + y + z)^3 - 3z(x + y)(x + y + z) - 3xy(x + y + z)$
 $= (x + y + z) \left[(x + y + z)^2 - 3z(x + y) - 3xy \right]$
 $= (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx - 3zx - 3zy - 3xy)$
 $= (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - xz)$

d) $(x^2 - 8)^2 + 36 = (x^2 + 6x + 10)(x^2 - 6x + 10)$

Bài 2.

a) $\frac{2}{3}x + 4 = -12 \Leftrightarrow x = -24$

b) $\frac{3}{4} + \frac{1}{4} : x = -3 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{15}$

c) $|3x - 5| = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 5 = 4 (x \geq \frac{5}{3}) \\ 3x - 5 = -4 (x < \frac{5}{3}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3(tm) \\ x = \frac{1}{3}(tm) \end{cases}$

$$\begin{aligned}
 d) \frac{x+4}{2011} + \frac{x+3}{2012} &= \frac{x+2}{2013} + \frac{x+1}{2014} \Leftrightarrow \frac{x+4}{2011} + 1 + \frac{x+3}{2012} + 1 = \frac{x+2}{2013} + 1 + \frac{x+1}{2014} + 1 \\
 \Leftrightarrow \frac{x+2015}{2011} + \frac{x+2015}{2012} &= \frac{x+2015}{2013} + \frac{x+2015}{2014} \\
 \Leftrightarrow (x+2015) \left(\frac{1}{2011} + \frac{1}{2012} - \frac{1}{2013} - \frac{1}{2014} \right) &= 0 \\
 \Rightarrow x+2015=0 \quad (Vi \frac{1}{2011} + \frac{1}{2012} - \frac{1}{2013} - \frac{1}{2014} \neq 0)
 \end{aligned}$$

Vậy $x = -2015$

Bài 3.

a) Rút gọn $A = \frac{1}{a-2}$

Để A nguyên $\Leftrightarrow \frac{1}{a-2}$ nguyên $\Leftrightarrow 1:(a-2) \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ a=3 \end{cases}$

b) $n^5 + 1 : n^3 + 1 \Leftrightarrow n^2(n^3 + 1) - (n^2 - 1):(n^3 + 1) \Leftrightarrow (n+1)(n-1):(n^3 + 1)$
 $\Leftrightarrow (n+1)(n-1):(n+1)(n^2 - n + 1) \Leftrightarrow (n-1):(n^2 - n + 1) (Vi \quad n+1 \neq 0)$

+) Nếu $n=1 \Rightarrow 0:1$

+) Nếu $n > 1$ thì $(n-1) < n(n-1) + 1 < n^2 - n + 1$ nên không thể xảy ra

$\Leftrightarrow n-1 : n^2 - n + 1$

Vậy $n=1$

Bài 4.

a) Ta có:

$$\begin{aligned}
 \frac{a-1}{2} &= \frac{b+3}{4} = \frac{c-5}{6} = \frac{5a-5}{10} = \frac{3b+9}{12} = \frac{4c-20}{24} \\
 \Rightarrow \frac{a-1}{2} &= \frac{b+3}{4} = \frac{c-5}{6} = \frac{(5a-3b-4c)-5-9+20}{10-12-24} = \frac{46+6}{-26} = -2 (Vi \ 5a-3b-4c=46) \\
 \Rightarrow \begin{cases} a-1=-4 \\ b+3=-8 \\ c-5=-12 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a=-3 \\ b=-11 \\ c=-7 \end{cases}
 \end{aligned}$$

b) Ta có: $a + b = ab \Leftrightarrow a = ab - b = b(a - 1)$

Do đó: $a : b = b(a - 1) : b = a - 1$

Nên $a + b = a - 1 \Leftrightarrow b = -1$ và $a = -1(a - 1) \Leftrightarrow a = -a + 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$

Vậy $a = \frac{1}{2}; b = -1$

Bài 5.

a) Phân tích 2 giả thiết để suy ra đpcm

Phân tích $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$, phần nào có $a + b + c$ thì thay bằng 1

b) Ta có: $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} = \frac{1}{2011}$

$a + b + c = 2014 \Rightarrow a = 2014 - (b + c);$

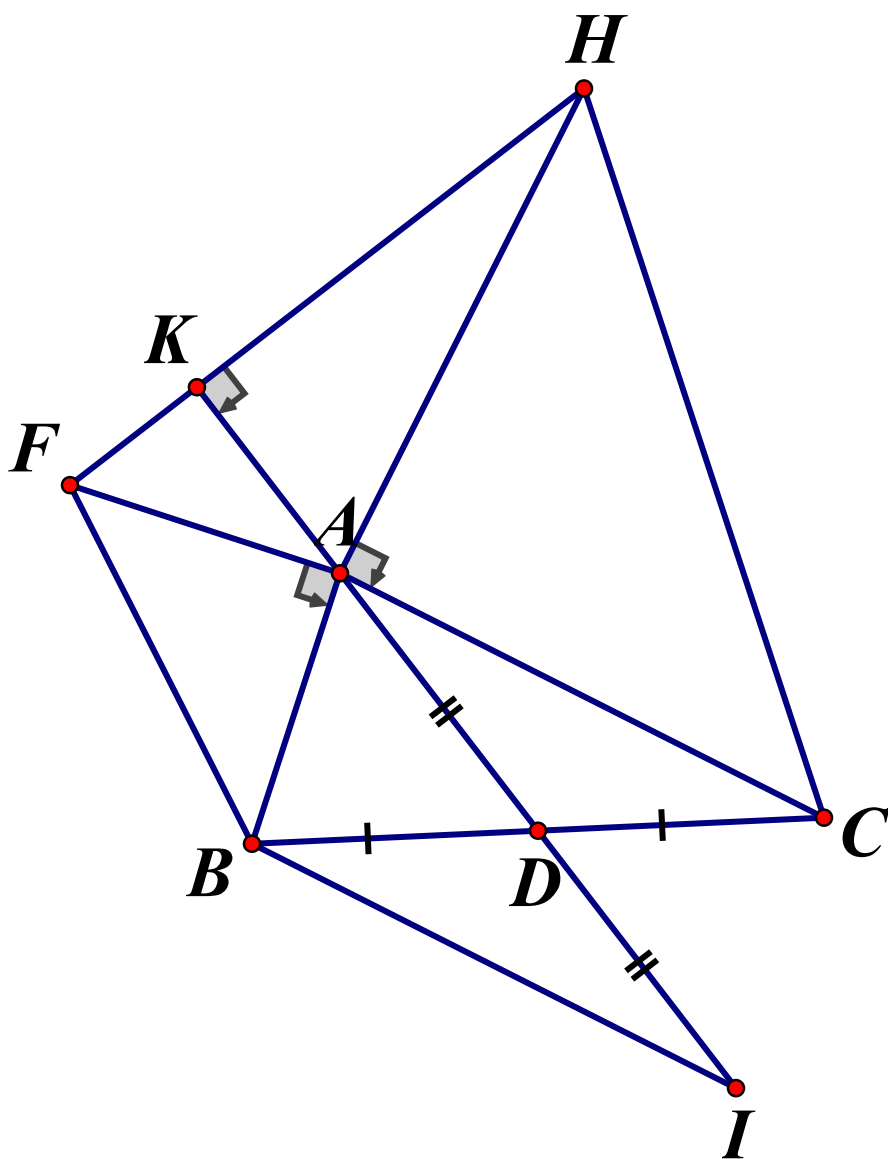
$b = 2014 - (a + c); c = 2014 - (a + b)$

Do đó:

$$\begin{aligned} S &= \frac{2014 - (b + c)}{b + c} + \frac{2014 - (a + c)}{a + c} + \frac{2014 - (a + b)}{a + b} \\ &= \frac{2014}{b + c} - 1 + \frac{2014}{a + c} - 1 + \frac{2014}{a + b} - 1 \\ &= 2014 \cdot \left(\frac{1}{b + c} + \frac{1}{a + c} + \frac{1}{a + b} \right) - 3 \\ &= 2014 \cdot \frac{1}{2011} - 3 = 1 - 3 = -2 \end{aligned}$$

Vậy $S = -2$

Bài 6.



a) Xét $\triangle BDI$ và $\triangle CDA$ có $DB = DC(gt)$, $\angle BDI = \angle CDA$ (đối đỉnh), $DA = DI(gt)$
 $\Rightarrow \triangle BDI = \triangle CDA(c.g.c) \Rightarrow BI = CA$ (hai cạnh tương ứng)

$\angle BID = \angle CAD$ (2 góc tương ứng) mà 2 góc này ở vị trí so le trong $\Rightarrow BI \parallel AC$

- Xét $\triangle ABI$ và $\triangle FAH$ có:

$AB = AF(gt)$; $\angle ABI = \angle FAH$ (cùng bù với $\angle BAC$)

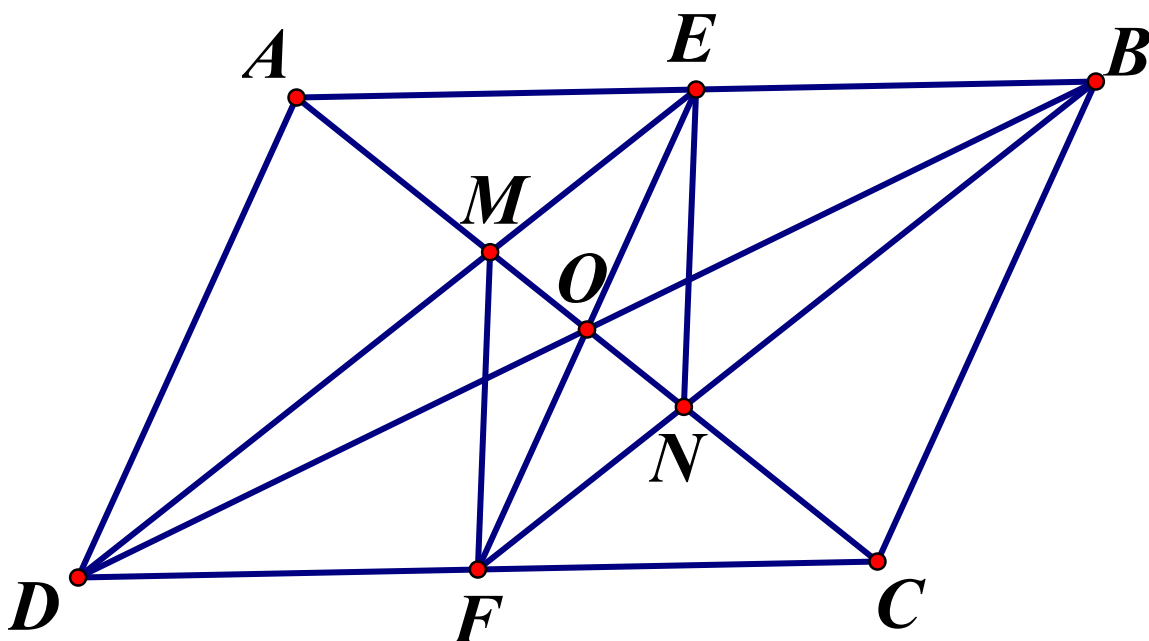
$BI = AH$ (cùng $= AC$) $\Rightarrow \triangle ABI = \triangle FAH(c.g.c) \Rightarrow AI = FH$ (2 cạnh tương ứng)

b) Gọi K là giao điểm của DA và FH ta có:

$\angle BAI + \angle PAK = 90^\circ$ mà $\angle AFH = \angle BAI$ hay $\angle AFK = \angle BAI$ nên $\angle AFH + \angle PAK = 90^\circ$
 $\Rightarrow \angle FKA = 90^\circ \Rightarrow AK \perp FK \Rightarrow AI \perp FH$

(Vì I, K thuộc đường thẳng AD, K thuộc EH)

Bài 7.



a)

Gọi O là giao điểm hai đường chéo hình bình hành $ABCD$, ta có O là trung điểm của BD.

Chứng minh $BEDF$ là hình bình hành

Có O là trung điểm của BD nên O cũng là trung điểm EF

Vậy EF, BD, AC đồng quy tại O

b) Xét $\triangle ABD$ có M là trọng tâm, nên $OM = \frac{1}{3}OA$

Xét $\triangle BCD$ có N là trọng tâm nên $ON = \frac{1}{3}OC$

Mà $OA = OC$ nên $OM = ON$

Tứ giác $EMFN$ có $OM = ON, OE = OF$ nên là hình bình hành

Bài 8.

$$A_{(x)} = (x^2 - 7x + 6)(x^2 - 7x + 12) + 10$$

Đặt $x^2 - 7x + 6 = t \Rightarrow A_{(t)} = t(t + 6) + 10$

$$= t^2 + 6t + 9 + 1 = (t + 3)^2 + 1 \geq 1$$

$$t = -3 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 6 = -3 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7 + \sqrt{13}}{2} \\ x = \frac{7 - \sqrt{13}}{2} \end{cases}$$

Khi đó:

$$\text{Min} A_{(x)} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7 + \sqrt{13}}{2} \\ x = \frac{7 - \sqrt{13}}{2} \end{cases}$$

Vậy