ĐỀ 81
HSG TOÁN 9 THÁI BÌNH 2023-2024

Câu 1. (3,0 điểm)

a) Rút gọn biểu thức: A = $\frac{\sqrt{3+\sqrt{3-\sqrt{13-\sqrt{48}}}}}{\sqrt{3}+1}$

b) Cho hai số a, b thỏa mãn $\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)\left(3b+\sqrt{9b^2+1}\right)=1$

Tính giá trị biểu thức $P=a^3+27b^3+2a+6b+2022$

Câu 2. (3,0 điểm)

a) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng (d): $y=mx+2m-1$ (m là tham số). Tìm m để đường thẳng (d) cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại A, B (A, B không trùng điểm O) sao cho $T=\text{¿}\frac{1}{OA^2}\frac{+1}{OB^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

b) Cho đa thức $\mathrm{P}(x)=6x^4-7x^3+mx^2+3x+2$ và đa thức $\mathrm{Q}(x)=x^2-x+n$. Tìm m, n để đa thức $\mathrm{P}(x)$ chia hết cho đa thức $\mathrm{Q}(x)$

Câu 3. (4,0 điểm)

a) Giải phương trình: $4x^3+18x^2+28x+15=\sqrt[3]{2x+3}$

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x+4y-1-2.\sqrt{4xy+x-8y-2}=0 \\ \sqrt{x-2}+3\sqrt{4y+1}=4 \end{cases}$

Câu 4. (2,0 điểm)

Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn: $\frac{a}{bc}\frac{+b}{ca}+\frac{c}{ab}\text{¿}1$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: P = $\frac{a}{a^2+bc}+\frac{b}{b^2+ca}+\frac{c}{c^2+ab}$

Câu 5. (3,0 điểm)

Cho tam giác ABC có BC = a và đường cao AH = h. Từ điểm D bất kì trên đoạn thẳng AH vẽ đường thẳng song song với BC cắt hai cạnh AB, AC lần lượt tại M, N. Vẽ MI, NK cùng vuông góc với đường thẳng BC (I, K thuộc đường thẳng BC). Xác định vị trí điểm D trên đoạn thẳng AH để diện tích tứ giác MNKI đạt giá trị lớn nhất.

Câu 6. (3,0 điểm)

Cho đường tròn (O; R) và điểm M nằm ngoài đường tròn (O), vẽ tiếp tuyến MA, MB (A, B là các tiếp điểm), MO cắt AB tại H , điểm I là trung điểm MH , vẽ tiếp tuyến IN với đường tròn tâm O (N là tiếp điểm).

Chứng minh rằng: $\frac{1}{NO^2}\frac{+1}{\text{¿}^2}\text{¿}\frac{1}{NH^2}\frac{+1}{MN^2}$

Câu 7. (2,0 điểm)

Tìm tất cả các cặp số tự nhiên (x,y) thỏa mãn:

$$x^3+3x^2+3x+2=(9y+1945)^2$$

-----------**HẾT**------------

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. (3,0 điểm)

a) A = $\dfrac{\sqrt{3+\sqrt{3-\sqrt{\left(2\sqrt{2}-5\right)^2}}}}{\sqrt{3}+1} = \dfrac{\sqrt{3+\sqrt{3-2\sqrt{3}+1}}}{\sqrt{3}+1}$

$= \dfrac{\sqrt{3+\sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}}}{\sqrt{3}+1} = \dfrac{\sqrt{3+\sqrt{3}-1}}{\sqrt{3}+1}$

A = $\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{3}+1} = \dfrac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)} = \dfrac{\sqrt{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}}{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)} = \dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

b) Đặt m = 3b thì $\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)\left(3b+\sqrt{9b^2+1}\right)=1$

$\Leftrightarrow a+\sqrt{a^2+1}=\text{¿}\ \dfrac{1}{m+\sqrt{m^2+1}} \Leftrightarrow a+\sqrt{a^2+1}=\text{¿}\ -m+\sqrt{m^2+1}$

$\Leftrightarrow \left(a+m\right)+\dfrac{\left(a+m\right)\left(a-m\right)}{\sqrt{a^2+1}+\sqrt{m^2+1}}=\text{¿}\ 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-m \\ \sqrt{a^2+1}+\sqrt{m^2+1}=m-a \end{array}\right.$

- Nếu $a=-m$ thì:

  P = $a^3+27a^2+2a+6b+2022$

  $\text{¿}\left(-m\right)^3+m^2+2\left(-m\right)+2m+2022$ = 2022

- Nếu $\sqrt{a^2+1}+\sqrt{m^2+1}=m-a$

  Nx: $\sqrt{a^2+1} > |a|$; $\sqrt{m^2+1} > |m|$

  Suy ra VT > $|a| + |m| \geq m-a$

Vậy nếu $\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)\left(3b+\sqrt{9b^2+1}\right)=1$ thì P = 2022

Câu 2. (3,0 điểm)

a) Đường thẳng (d) cắt trục Ox, Oy tại hai điểm A, B khác

$\Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ 2m-1\neq 0 \end{cases}$

Khi đó đường thẳng (d) cắt trục Ox, Oy lần lượt tại A$\left(\dfrac{1-2m}{m};0\right)$ và B $\left(0;2m-1\right)$

$\Rightarrow$OA = $\left|\dfrac{1-2m}{m}\right|$, OB = $|2m-1|$

Ta có: $T=\text{¿}\ \dfrac{1}{OA^2}\ \dfrac{+1}{OB^2}\ \text{¿}\ \dfrac{m^2}{\left(2m-1\right)^2}\ \dfrac{+1}{\left(2m-1\right)^2} > 0$

$T = \frac{m^2+1}{(2m-1)^2}$

$\Rightarrow$ T $\geq \frac{1}{5} \Rightarrow T_{min} = \frac{1}{5}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ m = 2 (thỏa mãn các điều kiện)

Vậy với m = 2 thì $T_{min} = \frac{1}{5}$

b) Đặt phép chia:

$$\begin{array}{l|l} 6x^4 - 7x^3 + mx^2 + 3x + 2 & x^2 - x + n \\ \hline 6x^4 - 6x^3 + 6nx^2 & 6x^2 - x + m - 6n - 1 \\ \hline -x^3 + (m-6n)x^2 + 3x + 2 & \\ -x^3 + x^2 - nx & \\ \hline (m-6n-1)x^2 + (3+n)x + 2 & \\ (m-6n-1)x^2 + (6n-m+1)x + mn - 6n^2 - n & \\ \hline (m-5n+2)x + 6n^2 - mn + n + 2 & \end{array}$$

Để P(x) $\vdots$ Q(x) $\Leftrightarrow (m-5n+2)x+6n^2-mn+n+2=0 \, \forall x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m-5n+2=0 \\ 6n^2-mn+n+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=5n-2 \\ 6n^2-(5n-2)n+n+2=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m=5n-2 \\ n^2+3n+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=5n-2 \\ \left[\begin{array}{l} n=-1 \\ n=-2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n=-1, m=-7 \\ n=-2, m=-12 \end{array}\right.$$

Vậy giá trị cần tìm là: $\left[\begin{array}{l} n=-1, m=-7 \\ n=-2, m=-12 \end{array}\right.$

Câu 3. (4,0 điểm)

a) $4x^3+18x^2+28x+15=\sqrt[3]{2x+3}$

$\Leftrightarrow (2x+3)(2x^2+6x+5)=\sqrt[3]{2x+3}$

$\Leftrightarrow (2x+3)(4x^2+12x+10)=2\sqrt[3]{2x+3}$

$\Leftrightarrow (2x+3)\left[(2x+3)^2+1\right]=2\sqrt[3]{2x+3}$

$\Leftrightarrow t^3(t^6+1)=2t$(với t = $\sqrt[3]{2x+3}$)

$\Leftrightarrow t(t^8+t^2-2)=0 \Leftrightarrow t(t^2-1)(t^6+t^4+t^2+1)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t^2-1=0 \end{array}\right.$ (vì $t^6+t^4+t^2+1>0\,\forall$t)

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=\pm 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt[3]{2x+3}=0 \\ \sqrt[3]{2x+3}=\pm 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x+3=0 \\ 2x+3=\pm 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{-3}{2} \\ x=-1 \\ x=-2 \end{array}\right.$

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là S = $\left\{-1;-2;-\frac{3}{2}\right\}$

b) ĐK: $x\geq$ 2, $y\geq -\frac{1}{4}$

Đặt a = $\sqrt{x-2}$, b = $\sqrt{4y+1}$ (a,b ≥ 0), hệ đã cho trở thành:

$\left\{\begin{array}{l} a^2+b^2-2ab=0 \\ a+3b=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} (a-b)^2=0 \\ a+3b=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=b \\ a+3b=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow a=b=1$

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \sqrt{x-2}=1 \\ \sqrt{4y+1}=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=3 \\ y=0 \end{array}\right.$ (tmđk)

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất (x;y) = (3;0)

Câu 4. (2,0 điểm)

Ta có: $\frac{a}{bc}\ \frac{+b}{ca}+\frac{c}{ab}$ ¿ 1 $\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2=abc$

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM cho hai số dương, ta có:

$a^2+bc\geq 2a\sqrt{bc}\Rightarrow \frac{a}{a^2+bc}\leq \frac{1}{2\sqrt{bc}}$

Tương tự, ta cũng có:

$\frac{b}{b^2+ca}\leq \frac{1}{2\sqrt{ca}};\ \frac{c}{c^2+ab}\leq \frac{1}{2\sqrt{ab}}$

Suy ra: P = $\frac{1}{2\sqrt{bc}}$ +¿ $\frac{1}{2\sqrt{ca}}+\frac{1}{2\sqrt{ab}}$ ¿ $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{2\sqrt{abc}}$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki, ta có:

$(1.\sqrt{a}+1.\sqrt{b}+1.\sqrt{c})^2\leq 3(a+b+c)$

hay $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\leq 3(a+b+c)$

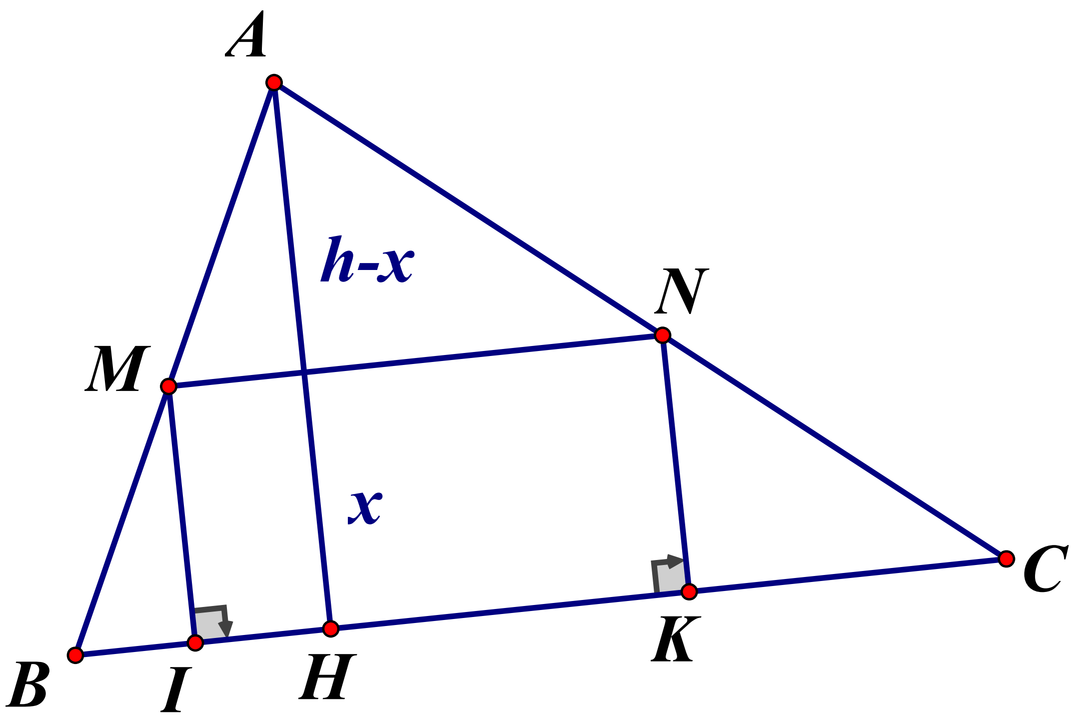
$(1.a+1.b+1.c)^2\leq 3(a^2+b^2+c^2)=3abc$

$\Rightarrow \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\leq 3\sqrt{3abc}$

$\Rightarrow \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{2\sqrt{abc}}\leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$ $\Rightarrow$ P $\leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$ $\Rightarrow$ $P_{max}=$¿ $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a=b=c \\ a^2+b^2+c^2=abc \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=1$

Câu 5. (3,0 điểm)



Đặt DH = x (0 < x < h) thì AD = h $-x$

Tứ giác MNIK có MN // IK (gt) và MN // NK (cùng vuông góc với BC) nên là hình bình hành; mà $\widehat{MIK}=90°$

$\Rightarrow$ *Tứ giác MNIK là hình chữ nhật*

Chứng minh tương tự ta có tứ giác MDHI là hình chữ nhật

$\Rightarrow$ MI = DH = x.

$\triangle$ABC có MN // BC (gt) $\Rightarrow \dfrac{MN}{BC}$ ¿ $\dfrac{AD}{AH}$

$\Rightarrow MN = \dfrac{AD.BC}{AH}$ ¿ $\dfrac{a(h-x)}{h}$

Ta có: S = S_{MNKI} = MN.MI = $\dfrac{ax(h-x)}{h}$

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM cho hai số dương, ta có:

$\sqrt{x(h-x)} \le \dfrac{x+h-x}{2} = \dfrac{h}{2} \Rightarrow x(h-x) \le \dfrac{h^2}{4} \Rightarrow$ S $= \dfrac{ax(h-x)}{h} \le \dfrac{ah}{2}$

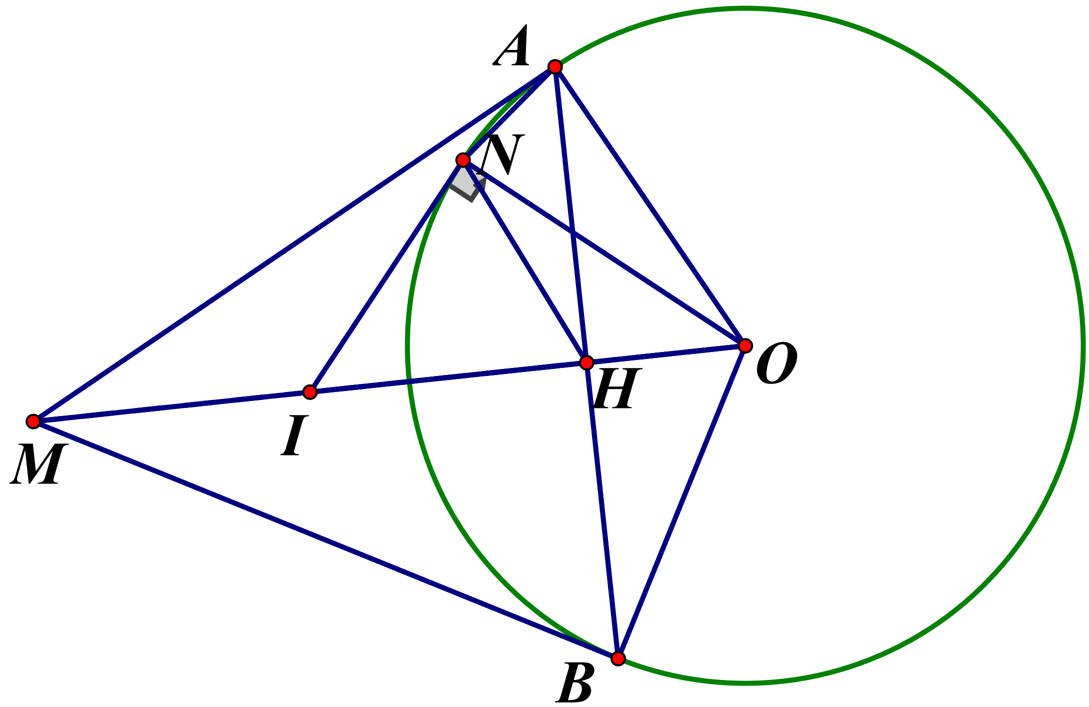
$\Rightarrow S_{max} = \frac{ah}{2}$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow x = h - x \Leftrightarrow x = \frac{h}{2} \Leftrightarrow$ D là trung diểm của BC

Vậy để diện tích tứ giác MNKI đạt giá trị lớn nhất thì D phải là trung điểm của của AH

Câu 6. (3,0 điểm)

Cho đường tròn (O; R) và điểm M nằm ngoài đường tròn (O) , vẽ tiếp tuyến MA, MB (A, B là các tiếp điểm), MO cắt AB tại H , điểm I là trung điểm MH , vẽ tiếp tuyến IN với đường tròn tâm O (N là tiếp điểm).



Chứng minh rằng: $\frac{1}{NO^2} \frac{+1}{¿^2} ¿ \frac{1}{NH^2} \frac{+1}{MN^2}$

Kẻ $NK \perp OM$. Gọi J là giao điểm của ON và AB, P là giao điểm của OJ với NH.

$\Rightarrow$ OA $\perp$ AM, MA = MB, OA = OB

$\Rightarrow$ OM là đường trung trực của AB $\Rightarrow$ OM $\perp$ AB tại H $\Rightarrow$ AH $\perp$ OM

$\triangle$OAM vuông tại A có AH $\perp$ OM nên $OA^2 = OH.OM$

$\Rightarrow ON^2 = OH.OM$ (vì ON = OM = R) $\Rightarrow \frac{ON}{OH} ¿ \frac{OM}{ON}$

Xét △OHN và △ONB có: $\widehat{MON}$ chung: $\frac{ON}{OH}\text{¿}\frac{OM}{ON}$

⇒ △OHN   △ONB (c-g-c) ⇒ $\widehat{ONH}=\widehat{OMN}$ (1)

Tứ giác INJO có $\widehat{INJ}=90^o$ (vì NI là tiếp tuyến của (O)) và $\widehat{IHJ}=90^o$ (vì AB ⊥ OM)

⇒ 4 điểm I, N, J cùng thuộc đường tròn đường kính IJ

⇒ $\widehat{JNH}=\widehat{JIH}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung HJ) hay $\widehat{ONH}=\widehat{OIJ}$ (2)

Từ (1) và (2) ⇒ $\widehat{OIJ}=\widehat{OMN}$

Mà hai góc này ở vị trí đồng vị nên IJ//MN, hay IP//MN

Xét △HMN có I là trung điểm của NH (gt), IP//MN (cmt)

⇒ P là trung điểm của NH

Xét đường tròn đường kính IJ có đường kính IJ đi qua trung điểm P của dây NH

⇒ IJ ⊥ NH

Mà IJ // MN (cmt) ⇒ MN ⊥ NH ⇒ △MNH vuông tại N

Vì △MNH và △ONI cùng vuông tại N và cùng có NK là đường cao nên ta có:

NK.MH = NM.NH, NK.OI = NI.NO

$MH^2=NH^2+NM^2$; $OI^2=NO^2+\text{¿}^2$

$\Rightarrow \frac{NK.MH}{NK.OI}=\frac{NM.NH}{\text{¿}.NO}$ hay $\frac{MH}{OI}=\frac{NM.NH}{\text{¿}.NO}\Rightarrow\frac{OI}{\text{¿}.NO}=\frac{MH}{NM.NH}$

$\Rightarrow\frac{OI^2}{\text{¿}^2.NO^2}=\frac{MH^2}{NM^2.NH^2}\Rightarrow\frac{NO^2+\text{¿}^2}{\text{¿}^2.NO^2}=\frac{NH^2+NM^2}{NM^2.NH^2}$

Hay $\frac{1}{NO^2}\frac{+1}{\text{¿}^2}\text{¿}\frac{1}{NH^2}\frac{+1}{MN^2}$ (đpcm)

Câu 7. (2,0 điểm)

Ta có: $x^3+3x^2+3x+2=(9y+1945)^2$

$\Leftrightarrow (x+1)^3+1=[3(3y+368)+1]^2$

Đặt a = x + 1, b = 3y + 368, phương trình trên trở thành:

$a^3+1=(3b+1)^2 \Leftrightarrow (3b+1)^2=(a+1)(a^2-a+1)$ (1)

Vì x, y ∈ N ⇒ a, b ∈ N, a ≥ 1, b ≥ 368

- Nếu a = 1 thì (1) trở thành: $(3b+1)^2=2$

Phương trình này vô nghiệm, vì $(3b+1)^2$ là số chính phương, còn 2 không phải là số chính phương

- Nếu a ≥ 2 thì a + 1 ≥ 3, a^2-a+1 = a$(a-1)+1 \geq 3$

Đặt d = UCLN(a + 1, a^2-a+1) (d ≥ 1)

$\Rightarrow \begin{cases} a+1 \vdots d \\ a^2-a+1 \vdots d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2+a \vdots d \\ a^2-a+1 \vdots d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+1 \vdots d \\ 2a \vdots d \end{cases}$

$\Rightarrow 2(a+1)-(2a-1)=3 \vdots d$ ⇒ d ∈ {1; 3}

Do $(3b+1)^2$ không chia hết cho 3 nên từ (1) ⇒ d ≠ 3⇒ d = 1

Các số nguyên dương a + 1 và a^2-a+1 nguyên tố cùng nhau có tích là một số chính phương nên mỗi số đều là số chính phương

Nhưng $(a-1)^2 < a^2-a+1 < a^2$ (do $a^2 \geq 2$) nên a^2-a+1 không thể là số chính phương.

Như vậy không tồn tại cặp số tự nhiên (x;y) thỏa mãn điều kiện đề bài.

-----------HẾT------------