

ĐS6. CHUYÊN ĐỀ 2+ LŨY THỪA VỚI SỐ MŨ TỰ NHIÊN

CHỦ ĐỀ 6: PHƯƠNG PHÁP ĐÁNH GIÁ ĐỂ TÌM THÀNH PHẦN CHƯA BIẾT CỦA LŨY THỪA

PHẦN I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. KHÁI NIỆM:

Lũy thừa với số mũ tự nhiên: $a^n = a.a...a$ (n thừa số a với $a \neq 0; n \in \mathbb{N}$).

2. QUI ƯỚC: $a^0 = 1$ ($a \neq 0$) và $a^1 = a$

a^2 : Bình phương của a ($a \neq 0$)

a^3 : Lập phương của a ($a \neq 0$)

Các chữ cái là biến số cần đưa vào mathtype

3. CÁC PHÉP TÍNH LŨY THỪA:

+ Nhân hai lũy thừa cùng cơ số: $a^m . a^n = a^{m+n}$

+ Chia hai lũy thừa cùng cơ số: $a^m : a^n = a^{m-n}$ ($a \neq 0; m \geq n$)

+ Lũy thừa của một thương: $(a : b)^n = a^n : b^n$ ($b \neq 0$)

+ Lũy thừa của lũy thừa: $(a^m)^n = a^{m.n}$

+ Lũy thừa tầng: $a^{m^n} = a^{(m^n)}$

+ Lũy thừa với số mũ âm: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ ($a \neq 0$)

PHẦN II. CÁC DẠNG BÀI

I. Phương pháp giải

Nội dung bài toán: Tìm x để $VT(x) = VP$, ta đi đánh giá như sau

+ Nếu $x > x_0 \Rightarrow VT(x) > VP$

+ Nếu $x < x_0 \Rightarrow VT(x) < VP$

+ Nếu $x = x_0 \Rightarrow VT(x) = VP$

Kết luận: $x = x_0$ là giá trị cần tìm.

II. Bài toán

Bài 1: Tìm các số nguyên n thỏa mãn $3^{64} < n^{48} < 5^{72}$

Phân tích: số cần tìm đóng vai trò cơ số, phần số mũ đã biết ta cần phân tích về lũy thừa có cùng số mũ để có thể so sánh được phần cơ số với nhau.

Ta có: Hai lũy thừa đầu có số mũ là $64, 48$ cùng chia hết cho 16 . Hai lũy thừa sau có số mũ $48, 72$ cùng chia hết cho 24

Lời giải

Với $n \in \mathbb{Z}$, ta có: $3^{64} < n^{48}$

$$\Rightarrow (n^3)^{16} > (3^4)^{16}$$

$$\Rightarrow (n^3)^{16} > 81^{16}$$

$$\Rightarrow n^3 > 81 \Rightarrow n > 4 \quad (1)$$

Mặt khác, với $n \in \mathbb{Z}$, ta có: $n^{48} < 5^{72}$

$$\Rightarrow (n^2)^{24} < (5^3)^{24}$$

$$\Rightarrow (n^2)^{24} < 125^{24}$$

$$\Rightarrow n^2 < 125 \Rightarrow -11 \leq n \leq 11 \quad (n \in \mathbb{Z}) \quad (2)$$

Từ (1); (2) $\Rightarrow 4 < n \leq 11$, mà $n \in \mathbb{Z} \Rightarrow n \in \{5; 6; 7; 8; 9; 10; 11\}$

Vậy n nhận các giá trị nguyên là: $5; 6; 7; 8; 9; 10; 11$

Bài 2: Tìm số nguyên dương n biết rằng:

a) $64 < 2^n < 512$

b) $243 > 3^n \geq 9$

Phân tích: số cần tìm đóng vai trò số mũ trong lũy thừa, phần cơ số đã biết ta cần phân tích về lũy thừa có cùng cơ số để có thể so sánh được phần số mũ với nhau.

Lời giải

a) Ta có: $64 < 2^n < 512$

$$\Rightarrow 2^6 < 2^n < 2^8$$

$$\Rightarrow 6 < n < 8$$

mà $n \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow n = 7$

b) Ta có: $243 > 3^n \geq 9$

$$\Rightarrow 3^5 > 3^n \geq 3^2$$

$$\Rightarrow 5 > n \geq 2$$

mà $n \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow n \in \{2; 3; 4\}$

Bài 3: Tìm số tự nhiên n , biết rằng:

a) $32 < 2^n < 512$

b) $3^{18} < n^{12} < 20^8$

Phân tích: Nhận xét tương tự bài 1 và bài 2.

Câu a phân tích đưa về lũy thừa có cùng cơ số để so sánh số mũ.

Câu b phân tích đưa về lũy thừa có cùng số mũ để so sánh cơ số.

Lời giải

a) Với $n \in \mathbb{N}$, ta có:

$$32 < 2^n \Rightarrow 2^5 < 2^n \Rightarrow 5 < n \quad (1)$$

$$2^n < 512 \Rightarrow 2^n < 2^9 \Rightarrow n < 9 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow 5 < n < 9$, mà $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n \in \{6; 7; 8\}$

Vậy $n \in \{6; 7; 8\}$

b) Với $n \in \mathbb{N}$, ta có:

$$\text{Vì } 5^2 < 27 < 6^2, \text{ nên } 6^2 \leq n^2 \Rightarrow 6 \leq n \quad (1)$$

Với $n \in \mathbb{N}$, ta có:

$$\text{Vì } 7^3 < 400 < 8^3, \text{ nên } n^3 \leq 7^3 \Rightarrow n \leq 7 \quad (2)$$

Từ (1) và (2), suy ra $6 \leq n \leq 7$, mà $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n \in \{6; 7\}$

Bài 4: Tìm số tự nhiên $x > 0$ thỏa mãn

a) $4^{x-1} + 4^x = 5$

b) $3^x + 3^{2x-1} = 2268$

Phân tích: Các lũy thừa có cùng cơ số, nên học sinh hướng tới nghĩ đến đưa về cùng cơ số để nhóm, rút gọn đơn giản phép tính. Dễ dàng thực hiện được câu a. Hướng dẫn cách đánh giá để có cách khác tìm x .

Câu b làm theo cách 1 thì sẽ gặp phải vấn đề xuất hiện bình phương trong phép tính khó thu gọn ở câu 4. Hướng dẫn cách nhằm nghiệm và đánh giá so sánh để làm được theo cách 2 ở câu a.

Lời giải

a) $4^{x-1} + 4^x = 5$

Cách 1.

$$4^{x-1} + 4^x = 5$$

$$\Leftrightarrow 4^x : 4 + 4^x = 5$$

$$\Leftrightarrow 4^x \cdot \frac{1}{4} + 4^x = 5$$

$$\Leftrightarrow 4^x \cdot \frac{5}{4} = 5$$

$$\Leftrightarrow 4^x = 4$$

$$\Leftrightarrow x = 1$$

Vậy $x=1$ là giá trị cần tìm.

Cách 2.

Theo đề, x số tự nhiên $x > 0 \Rightarrow x \geq 1$

+ TH1: $x > 1$

Ta có: $x > 1 \Rightarrow x - 1 > 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4^{x-1} > 4^{1-1} \\ 4^x > 4^1 = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4^{x-1} > 4^0 \\ 4^x > 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4^{x-1} > 1 \\ 4^x > 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 4^{x-1} + 4^x > 5$$

$\Rightarrow x > 1$ không thỏa mãn

+ TH2: $x = 1 \Rightarrow 4^{x-1} + 4^x = 4^0 + 4^1 = 5 = VP$ (thỏa mãn)

Vậy $x=1$ là giá trị cần tìm.

b) $3^x + 3^{2x-1} = 2268$

Ta có:

+ Nếu $x = 4 \Rightarrow 3^4 + 3^{2 \cdot 4 - 1} = 2268 \Rightarrow VT = VP$ (thỏa mãn)

$$+ \text{ Nếu } x > 4 \Rightarrow 3^x + 3^{2x-1} > 3^4 + 3^7 = 2268 \text{ (không thỏa mãn)}$$

$$+ \text{ Nếu } x < 4 \Rightarrow 3^x + 3^{2x-1} < 226 = VP \text{ (không thỏa mãn)}$$

Vậy $x=4$ là giá trị cần tìm.

Bài 5: Tìm số tự nhiên $x > 0$ thỏa mãn

$$a) 2^x + 5^x + 7^x = 14$$

$$b) 2^x + x = 20$$

$$c) 2^x = 46 - 3x$$

Phân tích: Câu a các lũy thừa không cùng cơ số nên không thu gọn biến đổi được biểu thức về trái. Nhận thấy tổng các cơ số $2+5+7=14$ nên $x=1$ là một giá trị thỏa mãn. Đánh giá với các giá trị $x < 1$ (vì $x > 0$ theo đề bài nên loại) và $x > 1$

Câu b và c số cần tìm xuất hiện ở số mũ trong lũy thừa và cả ở biểu thức, ta thay các giá trị x lần lượt từ 1, 2, 3, 4, ... và nhận xét kết quả. Sau đó dựa vào kết quả nhận được để chia các trường hợp đánh giá.

Lời giải

$$a) 2^x + 5^x + 7^x = 14$$

Ta có:

$$+ \text{ Nếu } x=0 \text{ thì } 2^0 + 5^0 + 7^0 = 3 \neq 14 \Rightarrow x=0 \text{ (loại)}$$

$$+ \text{ Nếu } x=1 \text{ thì } 2^1 + 5^1 + 7^1 = 14 \Rightarrow x=1 \text{ (thỏa mãn)}$$

$$+ \text{ Nếu } x > 1 \text{ thì } 2^x + 5^x + 7^x > 2^1 + 5^1 + 7^1 = 14 \text{ (loại)}$$

Vậy $x=1$ là giá trị cần tìm.

$$b) 2^x + x = 20$$

Ta có:

$$+ \text{ Nếu } x=4 \text{ thì } 2^4 + 4 = 20 \text{ (thỏa mãn)}$$

$$+ \text{ Nếu } x > 4 \text{ thì } 2^x + x > 2^4 + 4 = 20 \text{ (loại)}$$

$$+ \text{ Nếu } 0 < x < 4 \text{ thì } 2^x + x < 2^4 + 4 = 20 \text{ (loại)}$$

Vậy $x=4$ là giá trị cần tìm.

$$c) 2^x = 46 - 3x$$

$$\text{Ta có: } 2^x = 46 - 3x \Rightarrow 2^x + 3x = 46$$

$$+ \text{ TH1: } x \geq 5 \Rightarrow 2^x \geq 2^5 = 21$$

$$\text{mà } 3x \geq 3.5 = 15$$

$$\Rightarrow 2^x + 3x \geq 47 > 46$$

$$\Rightarrow x \geq 5 \text{ (không thỏa mãn)}$$

$$+ \text{ TH2: } 0 < x \leq 4 \Rightarrow 2^x \leq 2^4 = 16;$$

$$\text{mà } 3x \leq 3.4 = 12$$

$$\Rightarrow 2^x + 3x \leq 28 < 46 \text{ (loại)}$$

Vậy không tồn tại giá trị của x thỏa mãn yêu cầu đề bài

Bài 6: Tìm số tự nhiên x , biết $3^x + 3^{x+1} + 2^{x+2} = 388$ (1)

Phân tích: Các lũy thừa có cơ số khác nhau, không thực hiện được các phép biến đổi biểu thức, ta thay các giá trị x lần lượt từ $1, 2, 3, 4, \dots$ và nhận xét kết quả. Sau đó dựa vào kết quả nhận được để chia các trường hợp đánh giá.

Lời giải

$$+ \text{ TH1: } 0 \leq x < 4$$

$$\Rightarrow 3^x + 3^{x+1} + 2^{x+2} < 3^4 + 3^{4+1} + 2^{4+2}$$

$$\Rightarrow 3^x + 3^{x+1} + 2^{x+2} < 388$$

$$\Rightarrow VT(1) < VP(1)$$

$$\Rightarrow 0 \leq x < 4 \text{ không thỏa mãn}$$

$$+ \text{ TH2: } x > 4$$

$$\Rightarrow 3^x + 3^{x+1} + 2^{x+2} > 3^4 + 3^{4+1} + 2^{4+2}$$

$$\Rightarrow 3^x + 3^{x+1} + 2^{x+2} > 388$$

$$\Rightarrow VT(1) > VP(1)$$

$$\Rightarrow x > 4 \text{ không thỏa mãn}$$

$$+ \text{ TH3: } x = 4$$

$$\Rightarrow 3^x + 3^{x+1} + 2^{x+2} = 3^4 + 3^{4+1} + 2^{4+2}$$

$$\Rightarrow 3^x + 3^{x+1} + 2^{x+2} = 388$$

$$\Rightarrow VT(1) = VP(1)$$

$$\Rightarrow x = 4 \text{ thỏa mãn}$$

Vậy $x=4$ là giá trị cần tìm.

Bài 7: Tìm $x, y, z \in \mathbb{N}$, biết $x \leq y \leq z$ và $2^x + 3^y + 5^z = 156$ (1)

Phân tích: Các lũy thừa có cơ số khác nhau, không thực hiện được các phép biến đổi biểu thức, ta nhận thấy $2^x + 3^y + 5^z = 156 \Rightarrow 5^z < 156 \Rightarrow z \leq 3 \Rightarrow z \in \{0; 1; 2; 3\}$. Chia các trường hợp của x để tìm x, y .

Lời giải

Cách 1:

Ta có: $2^x + 3^y + 5^z = 156$

$$\Rightarrow 5^z < 156$$

$$\Rightarrow z \leq 3$$

$$\Rightarrow z \in \{0; 1; 2; 3\}$$

Vì $x \leq y \leq z$ nên ta xét trường hợp sau:

TH1: $z=0 \Rightarrow x \leq y \leq 0$ hay $x=y=z=0$, thay vào (1) ta được: $VT(1) = 2^0 + 3^0 + 5^0 = 3 < 156$ (loại)

TH2: $z=1 \Rightarrow x \leq y \leq 1$, thay vào (1) ta được: $VT(1) < 156$ (loại)

TH3: $z=2 \Rightarrow x \leq y \leq 2$, thay vào (1) ta được: $VT(1) \leq 2^2 + 3^2 + 5^2 < 156$ (loại)

TH4: $z=3 \Rightarrow x \leq y \leq 3$, thay vào (1) ta được $2^x + 3^y + 125 = 156 \Leftrightarrow 2^x + 3^y = 31$ (2)

Ta có $3^y < 31$ và $y \leq 3$

+ Nếu $y=3$, thay vào (2) ta được $2^x = 4 \Rightarrow x=2$ (thỏa mãn)

+ Nếu $y \in \{0, 1, 2\}$ thay vào (2) ta không tìm được giá trị của x thỏa mãn.

Vậy $x=2; y=3; z=3$

Cách 2:

Ta có: $5^z < 156 \Rightarrow z \leq 3$

+ Nếu $z=2 \Rightarrow x \leq y \leq 2$, thay vào (1) ta được: $VT(1) \leq 2^2 + 3^2 + 5^2 < 156 \Rightarrow$ loại trường hợp $z=2$

+ Nếu $z=3 \Rightarrow x \leq y \leq 3$, thay vào (1) ta được: $2^x + 3^y + 5^3 = 156 \Rightarrow 2^x + 3^y = 31$ (*)

+ Nếu $y \leq 2 \Rightarrow x \leq 2 \Rightarrow 2^x + 3^y \leq 2^2 + 3^2 = 13 < 31$ (loại)

$\Rightarrow y=3 \Rightarrow 2^x + 3^3 = 31 \Rightarrow 2^x = 4 \Rightarrow x=2.$

Vậy $(x; y; z) = (2; 3; 4)$

Bài 8: Tìm $x, y, z \in \mathbb{N}$, thỏa mãn $2^{x^2+2} + 3^{2y+1} + 5^z = 40$ và $2^x + 3^y + 5^z = 156$

Các lũy thừa có cơ số khác nhau, không thực hiện được các phép biến đổi biểu thức, ta thấy

Phân tích:

$$2^{x^2+2} < 32 \Rightarrow 2^{x^2+2} < 2^5 \Rightarrow x^2 + 2 \leq 5 \Leftrightarrow x^2 \leq 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases}$$

Chia các trường hợp của x để tìm y, z

Lời giải

Với $x, y, z \in \mathbb{N}$, mà $2^{x^2+2} + 3^{2y+1} + 5^z = 40$ (1), nên ta có:

$$2^{x^2+2} < 32 \Rightarrow 2^{x^2+2} < 2^5$$

$$\Rightarrow x^2 + 2 \leq 5$$

$$\Leftrightarrow x^2 \leq 3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases}$$

TH1: $x=0$

Với $x=0$, từ (1) ta có $2^2 + 3^{2y+1} + 5^z = 40 \Leftrightarrow 3^{2y+1} + 5^z = 36$ (2)

Ta có vế trái của (2) không chia hết cho 3 và vế phải của (2) chia hết cho 3 nên $x=0$ loại

TH2: $x=1$

Với $x=1$, từ (1) ta có: $2^3 + 3^{2y+1} + 5^z = 40 \Leftrightarrow 3^{2y+1} + 5^z = 32$ (3)

Ta có $3^{2y+1} < 32 \Leftrightarrow 2y+1 \leq 3 \Leftrightarrow y \leq 1$

+ Nếu $y=1 \Rightarrow$ thay vào (3) ta được $27 + 5^z = 32 \Leftrightarrow 5^z = 5$ (thỏa mãn)

+ Nếu $y=0 \Rightarrow$ thay vào (3) ta được $3 + 5^z = 32 \Leftrightarrow 5^z = 29$ (loại)

Vậy $x=y=z=1$

Bài 9*: Tìm $x, y, z \in \mathbb{N}$, thỏa mãn $2^x + 2^y + 2^z = 2^{10}$

Phân tích: Các lũy thừa có cơ số giống nhau, vai trò của x, y, z sẽ như nhau nên không mất tính tổng quát, ta giả sử $x \leq y \leq z$ từ đó đánh giá được $x \leq 8$. Tiếp tục để đánh giá lần lượt được y và z ta biến đổi phân tích đặt 2^x ra ngoài làm thừa số chung để đánh giá được $y-x$ và $z-x$.

Nhận xét nếu $y - x > 0$ vô lí nên ta có được $y = x$, thay vào biểu thức nhận xét và tìm được giá trị của z

Từ đó tìm được x và y

Lời giải

Vì x, y, z có vai trò như nhau nên không mất tính tổng quát, ta giả sử $x \leq y \leq z$

Ta có: $2^{10} = 1024$

$$\text{Mà } x \leq y \leq z \Rightarrow 2^x + 2^y + 2^z \geq 3 \cdot 2^x$$

$$\Rightarrow 3 \cdot 2^x \leq 2^{10} \Rightarrow x \leq 8$$

Lại có: $2^x + 2^y + 2^z = 2^{10}$

$$\Rightarrow 2^x (1 + 2^{y-x} + 2^{z-x}) = 2^{10}$$

$$\Rightarrow 1 + 2^{y-x} + 2^{z-x} = 2^{10-x}$$

$$\Rightarrow 1 + 2^{y-x} + 2^{z-x} = 2^{10-x}$$

$$\text{Mà } x \leq 8 \Rightarrow 1 + 2^{y-x} + 2^{z-x} = 2^{10-x} \geq 2^{10-8}$$

$$\Rightarrow 1 + 2^{y-x} + 2^{z-x} = 2^{10-x} \geq 4 \quad (*)$$

+ Nếu $y > x \Rightarrow y - x > 0 \Rightarrow y - x \geq 1; z - x \geq 1$

Ta có VT(*) là số lẻ và VP(*) là số chẵn $\Rightarrow$ loại trường hợp $y > x$,

do vậy $y = x$, thay vào (*) ta được:

$$(*) \Leftrightarrow 1 + 2^0 + 2^{z-x} = 2^{10-x} \geq 2^{10-8} \quad (**)$$

+ Nếu $z - x = 0 \Rightarrow VT(**) = 3$ còn $VP(**)$ là số chẵn nên loại

$$\Rightarrow z - x \geq 1$$

$$\text{Do đó } (**) \Leftrightarrow 2 + 2^{z-x} = 2^{10-x}$$

$$\Leftrightarrow 1 + 2^{z-x-1} = 2^{9-x} \quad (***)$$

+ Nếu $z - x - 1 \geq 1 \Rightarrow VT(***)$ là số lẻ và $VP(***)$ là số chẵn $\Rightarrow$ loại $\Rightarrow z - x - 1 = 0$

$$\text{Từ } (***) \Rightarrow 2 = 2^{9-x} \Rightarrow x = 8 \Rightarrow y = 8; z = 9$$

Vậy $x = 8; y = 8; z = 9$

Bài 10: Tìm các số nguyên dương x sao cho $3^x + 4^x = 5^x$

Phân tích: Các lũy thừa có cơ số khác nhau, không thực hiện được các phép biến đổi biểu thức, ta thay các giá trị x lần lượt từ $1, 2, 3, 4, \dots$ và nhận xét kết quả. Sau đó dựa vào kết quả nhận được đánh giá. Để dễ dàng đánh giá thì ta biến đổi một vế không chứa x bằng cách chia cả hai vế cho 5^x .

Lời giải

$$3^x + 4^x = 5^x \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x = 1$$

Ta có

$$+ \text{ Với } x=1, \text{ ta có: } \left(\frac{3}{5}\right)^1 + \left(\frac{4}{5}\right)^1 = \frac{7}{5} \neq 1$$

$\Rightarrow x=1$ không thỏa mãn;

$$+ \text{ Với } x=2, \text{ ta có: } \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25} + \frac{16}{25} = \frac{25}{25} = 1$$

$\Rightarrow x=2$ thỏa mãn;

$$+ \text{ Với } x > 2, \text{ mà các cơ số } \frac{3}{5} < \frac{4}{5} < 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{3}{5}\right)^x < \left(\frac{3}{5}\right)^2 \\ \left(\frac{4}{5}\right)^x < \left(\frac{4}{5}\right)^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x < \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 < 1$$

$\Rightarrow x > 2$ không thỏa mãn;

Vậy $x=2$ là giá trị cần tìm.

Bài 11: Tìm các số nguyên dương x, y sao cho $5x^3 = 3^y + 317$

Phân tích: Các lũy thừa có cơ số, số mũ khác nhau đều chứa số cần tìm, không thực hiện được các phép biến đổi biểu thức, ta thay các giá trị x, y lần lượt từ $1, 2, 3, 4, \dots$ và nhận xét kết quả. Sau đó dựa vào kết quả nhận được đánh giá.

Lời giải

+ Nếu $y=0 \Rightarrow 5x^3 = 1 \Rightarrow$ không có giá trị nguyên nào của x thỏa mãn

+ Nếu $y=1 \Rightarrow x=4$ (thỏa mãn)

+ Nếu $y \geq 2$ thì 3^y chia hết cho 9, mà 317 chia cho 9 dư 2 và $5x^3 = 3^y + 317$ nên $5x^3$ chia 9 dư 2

Điều này mẫu thuẫn vì $5x^3$ chia 9 dư 0 hoặc 4

Vậy $x=4; y=1$ thỏa mãn bài toán

Bài 12: Tìm $x \in \mathbb{N}$, biết

a) $16^x < 128^4$

$$5^x \cdot 5^{x+1} \cdot 5^{x+2} \leq \underbrace{100 \dots 0}_{18 \text{ chữ số } 0} : 2^{18}$$

b)

Phân tích:

Câu a các lũy thừa có cơ số khác nhau, nhưng đều đưa được về lũy thừa cơ số 2. Dùng công thức lũy thừa đưa về cùng cơ số để so sánh.

Câu b các lũy thừa có cùng một cơ số dùng phép biến đổi đưa về cùng lũy thừa số sau đó so sánh để tìm ra giá trị của x .

Lời giải

a) Theo đề, ta có: $16^x < 128^4$

$$\Rightarrow (2^4)^x < (2^7)^4$$

$$\Rightarrow 2^{4x} < 2^{28}$$

$$\Rightarrow 4x < 28$$

$$\Rightarrow x < 7$$

Mà $x \in \mathbb{N} \Rightarrow x \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

$$5^x \cdot 5^{x+1} \cdot 5^{x+2} \leq \underbrace{100 \dots 0}_{18 \text{ chữ số } 0} : 2^{18}$$

b) Ta có:

$$\Rightarrow 5^{3x+3} \leq 10^{18} : 2^{18}$$

$$\Rightarrow 5^{3x+3} \leq 5^{18}$$

$$\Rightarrow 3x+3 \leq 18$$

$$\Rightarrow x \leq 5$$

Mà $x \in \mathbb{N} \Rightarrow x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

Bài 13: Tìm các số nguyên dương m và n sao cho: $2^m - 2^n = 256$

Phân tích: Các lũy thừa có cùng cơ số 2, nhận thấy $256 > 0$ nên $m > n$.

Đặt 2^n ra ngoài làm thừa số chung chia các trường hợp để nhận xét tính được m, n .

Lời giải

$$2^m - 2^n = 256 = 2^8 \Rightarrow 2^n (2^{m-n} - 1) = 2^8 \quad (1)$$

Ta có:

Dễ thấy $m \neq n$, ta xét 2 trường hợp:

$$+ \text{ TH1: } m - n = 1, \text{ từ } (1) \quad 2^n (2^1 - 1) = 2^8 \Leftrightarrow 2^n = 2^8 \Leftrightarrow n = 8$$

$$\text{Do } m - n = 1 \Rightarrow m = 9$$

$$\Rightarrow n = 8; m = 9$$

+ TH2: $m - n \geq 2 \Rightarrow 2^{m-n} - 1$ là một số lẻ lớn hơn 1 nên về trái của (1) chứa thừa số nguyên tố lẻ khi phân tích ra thừa số nguyên tố. Còn về phải của (1) chỉ chứa thừa số nguyên tố 2 $\Rightarrow$ mâu thuẫn.

Vậy $m = 9; n = 8$.

Bài 14: Tìm các số tự nhiên x , biết: $100 < 5^{2x-1} < 5^6$

Phân tích: Các lũy thừa của $5^{2x-1} < 5^6$ có cùng cơ số 5, dễ dàng tìm được $2x < 7$.

Không biến đổi được 100 về cơ số 5, ta so sánh được $5^2 < 100$.

Theo tính chất bắc cầu ta có: $5^2 < 100 < 5^{2x+1}$

Từ đó tìm được các số tự nhiên x

Lời giải

$$\text{Ta có: } 100 < 5^{2x-1} < 5^6$$

$$\Rightarrow 5^2 < 100 < 5^{2x-1} < 5^6$$

$$\Rightarrow 2 < 2x - 1 < 6$$

$$\Rightarrow 3 < 2x < 7$$

Vì x là các số tự nhiên $\Rightarrow x \in \{2; 3\}$

Bài 15: Tìm số tự nhiên a, b sao cho: $(a + b)^3 = \overline{aba}$

Phân tích: $\overline{aba}$ là số tự nhiên có 3 chữ số nên $100 \leq \overline{aba} \leq 999 \Rightarrow 100 \leq (a + b)^3 \leq 999$

$$\Rightarrow 5 \leq a + b \leq 9$$

Từ đó ta có bảng giá trị chia cá trường hợp và tìm được số tự nhiên a, b .

Lời giải

Vì $\overline{aba}$ là số tự nhiên có ba chữ số nên $100 \leq \overline{aba} \leq 999$

$$\Rightarrow 100 \leq (a+b)^3 \leq 999$$

$$\Rightarrow 5 \leq a+b \leq 9$$

Ta có bảng:

$a+b$	5	6	7	8	9
$\overline{aba} = (a+b)^3$	125	216	343	512	729
a	/	/	3	/	/
b	/	/	4	/	/

Vậy $a=3; b=4$.

Bài 16: Tìm số tự nhiên x, y sao cho: $5^x + 11^y = 26$

Phân tích: Các lũy thừa có cơ số, số mũ khác nhau, không thực hiện được các phép biến đổi biểu thức, ta thay các giá trị x, y lần lượt từ $1, 2, 3, 4, \dots$ và nhận xét kết quả. Sau đó dựa vào kết quả nhận được để chia các trường hợp đánh giá.

Lời giải

+ Với $y=0$, ta có: $5^x + 11^0 = 26$

$$\Leftrightarrow 5^x + 1 = 26$$

$$\Leftrightarrow 5^x = 25$$

$$\Leftrightarrow 5^x = 5^2$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \text{ (thỏa mãn)}$$

+ Với $y=1$, ta có: $5^x + 11^1 = 26$

$$\Leftrightarrow 5^x = 26 - 11 = 15$$

Vì x là số tự nhiên nên không có giá trị của x thỏa mãn $5^x = 15$

$\Rightarrow y=1$ không thỏa mãn

+ Với $y \geq 2$, ta có: $11^2 = 121 > 26$, nên không có giá trị thỏa $5^x + 11^y = 26$ khi $y \geq 2$.

Vậy $x=2; y=0$.

Bài 17: Tìm $x, y \in \mathbb{N}$ sao cho: $2^x + 624 = 5^y$

Phân tích: Các lũy thừa có cơ số, số mũ khác nhau, không thực hiện được các phép biến đổi biểu thức, ta thay các giá trị x, y lần lượt từ 1,2,3,4... và nhận xét kết quả. Sau đó dựa vào kết quả nhận được để chia các trường hợp đánh giá.

Lời giải

+ Với $x = 0$ thì $2^0 + 624 = 5^y \Leftrightarrow 5^y = 625 \Leftrightarrow 5^y = 5^4 \Rightarrow y = 4$

+ Với $x \geq 1$, ta có $2^x + 624$ là số chẵn, 5^y là số lẻ với mọi $y \in \mathbb{N}$: vô lí

Vậy $x = 0; y = 4$

$$M = \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} + \dots + \frac{1}{(2n)^2} < \frac{1}{4}$$

: Chứng minh rằng:

Bài 18

Phân tích: Nhận thấy mẫu đều là các số chẵn chia hết cho 2, khi bình phương lên xuất hiện $\frac{1}{4}$, ta biến đổi đặt được $\frac{1}{4}$ ra ngoài làm thừa số chung. Để $M < \frac{1}{4}$ thì biểu thức còn lại so sánh 1.

Bằng tính chất của phân số, ta so sánh biểu thức còn lại với 1 và chứng minh được $M < \frac{1}{4}$

Lời giải

$$M = \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} + \dots + \frac{1}{(2n)^2}$$

Ta có:

$$= \frac{1}{(2.2)^2} + \frac{1}{(2.3)^2} + \frac{1}{(2.4)^2} + \dots + \frac{1}{(2.n)^2}$$

$$= \frac{1}{4.2^2} + \frac{1}{4.3^2} + \frac{1}{4.4^2} + \dots + \frac{1}{4.n^2}$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \right)$$

Mà $\frac{1}{2^2} < \frac{1}{1.2}; \quad \frac{1}{3^2} < \frac{1}{2.3}; \quad \frac{1}{4^2} < \frac{1}{3.4}; \quad \frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n-1).n}$

$$M < \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{(n-1).n} \right)$$

Suy ra

$$\Rightarrow M < \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{(n-1)} - \frac{1}{n} \right)$$

$$\Rightarrow M < \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{n} \right) < \frac{1}{4}$$

Vậy $M < \frac{1}{4}$

PHẦN III. BÀI TOÁN THƯỜNG GẶP TRONG ĐỀ HSG.

Bài 1: Tìm các số tự nhiên x, y , sao cho $7^x + 12^y = 50$

(Trích đề thi Olympic lớp 6 huyện Thanh Oai năm học 2017 – 2018)

Lời giải

+ Với $y = 0$, ta có: $7^x + 12^0 = 50$

$$\Leftrightarrow 7^x + 1 = 50$$

$$\Leftrightarrow 7^x = 49$$

$$\Leftrightarrow 7^x = 7^2$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \text{ (thỏa mãn)}$$

+ Với $y = 1$, ta có: $7^x + 12^1 = 50$

$$\Leftrightarrow 7^x = 50 - 12 = 38$$

Vì x là số tự nhiên nên không có giá trị của x thỏa mãn $7^x = 38 \Rightarrow y = 1$ không thỏa mãn

+ Với $y \geq 2$, ta có: $12^2 = 144 > 50$, $\Rightarrow VT > VP$ nên không có giá trị thỏa $7^x + 12^y = 50$ khi $y \geq 2$.

Bài 2: Tìm $x, y \in \mathbb{N}$, sao cho $2^x + 624 = 5^y$

(Trích đề thi HSG lớp 6 trường THCS Nguyễn Khuyến năm học 2016 – 2017)

Lời giải

+ Với $x = 0$, ta có: $2^0 + 624 = 5^y$

$$\Leftrightarrow 5^y = 625$$

$$\Leftrightarrow 5^y = 5^4$$

$$\Leftrightarrow y = 4 \text{ (thỏa mãn)}$$

+ Với mọi $x \in \mathbb{N}$, $x \neq 0$, ta có: vế trái $2^x + 624$ là số chẵn, vế phải 5^y là số lẻ $\Rightarrow$ vô lí

Vậy $x = 0; y = 4$

Bài 3: Tìm các số tự nhiên a, b thỏa mãn $(100a + 3b + 1)(2^a + 10a + b) = 225$

(Trích đề thi HSG lớp 6 huyện Thạch Thành năm học 2018 – 2019)

Lời giải

Ta có: $(100a + 3b + 1)(2^a + 10a + b) = 225$ (1)

Vì 225 là số lẻ nên $(100a + 3b + 1)(2^a + 10a + b)$ là lẻ $\Rightarrow \begin{cases} 100a + 3b + 1 \\ 2^a + 10a + b \end{cases}$ cùng là số lẻ (2)

+ Với $a = 0$, từ (1) $\Rightarrow (100 \cdot 0 + 3b + 1)(2^0 + 10 \cdot 0 + b) = 225$

$$\Leftrightarrow (3b + 1)(b + 1) = 225$$

$$\Leftrightarrow (3b + 1)(b + 1) = 3^2 \cdot 5^2 \quad (3)$$

Vì $3b + 1$ chia 3 dư 1 và $3b + 1 > b + 1$ nên

Từ (3) $\Rightarrow (3b + 1)(b + 1) = 25 \cdot 9$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3b + 1 = 25 \\ b + 1 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow b = 8$$

(thỏa mãn)

+ Với $a \in \mathbb{N}, a \geq 1 \Rightarrow 100a$ chẵn, mà từ (2) ta có $100a + 3b + 1$ là số lẻ

$$\Rightarrow 3b + 1 \text{ là số lẻ} \Rightarrow b \text{ là số chẵn}$$

Vì b là số chẵn nên $2^a + 10a + b$ cũng là số chẵn, trái với (2) $\Rightarrow$ vô lí với giả thiết
 $\Rightarrow b \in \emptyset$

Vậy $a = 0; b = 8$

Bài 4: Tìm các số tự nhiên a, b thỏa mãn $2^a + 124 = 5^b$ (1)

(Trích đề thi HSG lớp 6 huyện Nguyễn Khuyến năm học 2018 – 2019)

Lời giải

+ Với $a = 0$, từ (1) suy ra $2^0 + 124 = 5^b$

$$\Rightarrow 5^b = 125$$

$$\Rightarrow 5^b = 5^3$$

$$\Rightarrow b = 3 \quad (\text{thỏa mãn})$$

+ Với $a \geq 1$, ta có vế trái $2^a + 124$ luôn là số chẵn, mà vế phải 5^b luôn là số lẻ với mọi $a \geq 1, a, b \in \mathbb{N}$, điều này vô lí.

Vậy $a = 0; b = 3$

Bài 5: Tìm $a, b \in \mathbb{N}$ thỏa mãn $10^a + 168 = b^2$ (2)

(Trích đề thi HSG lớp 6)

Lời giải

+ Với $a = 0$, từ (2) suy ra $10^0 + 168 = b^2$

$$\Rightarrow b^2 = 169$$

$$\Rightarrow b^2 = 13^2 \text{ mà } a, b \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow b = 13 \text{ (thỏa mãn)}$$

+ Với $a \geq 1$, ta có 10^a có chữ số tận cùng là 0

$\Rightarrow$ Vế trái (2) là $10^a + 168$ có chữ số tận cùng là 8

Mà Vế phải (2) là số chính phương b^2 nên không chữ số tận cùng không thể là 8

$\Rightarrow$ điều này vô lí.

Vậy $a = 0; b = 13$

Bài 6: Tìm các số nguyên x, y, z sao cho: $(x - y^2 + z)^2 + (y - 2)^2 + (z + 3)^2 = 0$

Phân tích:

$$\begin{cases} x - y^2 + z = 0 \\ y - 2 = 0 \\ z + 3 = 0 \end{cases}$$

Nhận thấy bình phương của mọi số nguyên đều không âm nên ta có được

Từ đó tìm được các số nguyên x, y, z .

Lời giải

$$\begin{cases} (x - y^2 + z)^2 \geq 0 \\ (y - 2)^2 \geq 0 \\ (z + 3)^2 \geq 0 \end{cases}$$

Với mọi số nguyên x, y, z ta luôn có:

$$(x - y^2 + z)^2 + (y - 2)^2 + (z + 3)^2 = 0$$

Ta có:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x - y^2 + z)^2 \geq 0 \\ (y - 2)^2 \geq 0 \\ (z + 3)^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - y^2 + z)^2 = 0 \\ (y - 2)^2 = 0 \\ (z + 3)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y^2 + z = 0 \\ y - 2 = 0 \\ z + 3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y^2 + z = 0 \\ y = 2 \\ z = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2^2 + (-3) = 0 \\ y = 2 \\ z = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = 2 \\ z = -3 \end{cases}$$

Bài 7: Tìm các số nguyên x sao cho $2^{x^2} + 3^{x^2} + 4^{x^2} + 5^{x^2} = 4^{1-x^2}$

(Trích đề thi HSG lớp 6 THCS Quang Trung năm học 2008-2009)

Lời giải

Với mọi giá trị của x ta có: $x^2 \geq 0$. Nên:

$$\begin{cases} 2^{x^2} \geq 2^0 = 1 \\ 3^{x^2} \geq 3^0 = 1 \\ 4^{x^2} \geq 4^0 = 1 \\ 5^{x^2} \geq 5^0 = 1 \end{cases} \Rightarrow 2^{x^2} + 3^{x^2} + 4^{x^2} + 5^{x^2} \geq 4$$

Mà $4^{1-x^2} \leq 4$ nên để VT = VP thì $x^2 = 0$ hay $x = 0$

Vậy $x = 0$ là giá trị cần tìm.

Bài 8: Tìm các số nguyên dương x sao cho $6^x - 2^x = 32$

(Trích đề thi HSG lớp 6 THCS Nguyễn Du năm học 2007-2008)

Lời giải

$$32 + 2^x = 6^x \Leftrightarrow 32 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^x + \left(\frac{1}{3}\right)^x = 1$$

Ta có

$$+ \text{ Với } x=1, \text{ ta có: } 32 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^1 + \left(\frac{1}{3}\right)^1 = \frac{17}{3} \neq 1$$

$\Rightarrow x=1$ không thỏa mãn;

$$+ \text{ Với } x=2, \text{ ta có: } 32 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1$$

$\Rightarrow x=2$ thỏa mãn;

$$+ \text{ Với } x > 2, \text{ mà các cơ số } \frac{1}{6} < \frac{1}{3} < 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{1}{6}\right)^x < \left(\frac{1}{6}\right)^2 \\ \left(\frac{1}{3}\right)^x < \left(\frac{1}{3}\right)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 32 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^x < 32 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \\ \left(\frac{1}{3}\right)^x < \left(\frac{1}{3}\right)^2 \end{cases} \Rightarrow 32 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^x + \left(\frac{1}{3}\right)^x < 32 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 < 1$$

$\Rightarrow x > 2$ không thỏa mãn;

Vậy $x = 2$ là giá trị cần tìm.

Bài 9: Tìm các số nguyên dương x sao cho $10^{2x} - 8^{2x} = 6^{2x}$

(Trích đề thi HSG lớp 6 THCS Nam Trực năm học 2005-2006)

Lời giải

Ta có $10^{2x} - 8^{2x} = 6^{2x} \Leftrightarrow 6^{2x} + 8^{2x} = 10^{2x} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^{2x} + \left(\frac{4}{5}\right)^{2x} = 1$

+ Với $x = 1$, ta có: $\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1$

$\Rightarrow x = 1$ thỏa mãn;

+ Với $x > 1$, mà các cơ số $\frac{3}{5} < \frac{4}{5} < 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{3}{5}\right)^{2x} < \left(\frac{3}{5}\right)^2 \\ \left(\frac{4}{5}\right)^{2x} < \left(\frac{4}{5}\right)^2 \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^{2x} + \left(\frac{4}{5}\right)^{2x} < \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 < 1$$

$\Rightarrow x > 1$ không thỏa mãn;

Vậy $x = 1$ là giá trị cần tìm.

Bài 10: Tìm các số nguyên x, y, z sao cho: $(1 - x)^2 + (3 - y)^2 + (y^2 - x - z)^2 = 0$

(Trích đề thi HSG lớp 6 THCS Sóc Sơn năm học 2014-2015)

Lời giải

Với mọi số nguyên x, y, z ta luôn có:
$$\begin{cases} (1 - x)^2 \geq 0 \\ (3 - y)^2 \geq 0 \\ (y^2 - x - z)^2 \geq 0 \end{cases}$$

Ta có: $(1 - x)^2 + (3 - y)^2 + (y^2 - x - z)^2 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1 - x)^2 = 0 \\ (3 - y)^2 = 0 \\ (y^2 - x - z)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x = 0 \\ 3 - y = 0 \\ y^2 - x - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \\ z = 8 \end{cases}$$

Bài 11: Tìm số nguyên dương x sao cho $2^x = 52 - 4x$

(Trích đề thi HSG lớp 6 THCS Quang Trung năm học 2011-2012)

Lời giải

Ta có:

+ Nếu $x = 5$ thì $2^5 = 52 - 4 \cdot 5$ (thỏa mãn)

+ Nếu $x > 5$ thì $\begin{cases} 2^x > 2^5 \\ 52 - 4x < 52 - 4 \cdot 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x > 32 \\ 52 - 4x < 32 \end{cases}$ (loại)

+ Nếu $0 < x < 5$ thì $\begin{cases} 2^x < 2^5 \\ 52 - 4x > 52 - 4 \cdot 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x < 32 \\ 52 - 4x > 32 \end{cases}$ (loại)

Vậy $x = 5$ là giá trị cần tìm.

Bài 12: Tìm các số nguyên dương a và b sao cho: $2^a - 2^b = 16$

(Trích đề thi HSG lớp 6)

Lời giải

Ta có: $2^a - 2^b = 16 = 2^4 \Rightarrow 2^b (2^{a-b} - 1) = 2^4$ (1)

Dễ thấy $a \neq b$, ta xét 2 trường hợp:

+ TH1: $a - b = 1$, từ (1) ta có: $2^b (2^1 - 1) = 2^4 \Leftrightarrow 2^b = 2^4 \Leftrightarrow b = 4$

Do $a - b = 4 \Rightarrow a = 5$

$\Rightarrow b = 4; a = 5$

+ TH2: $a - b \geq 2 \Rightarrow 2^{a-b} - 1$ là một số lẻ lớn hơn 1 nên vế trái của (1) chứa thừa số nguyên tố lẻ khi phân tích ra thừa số nguyên tố. Còn vế phải của (1) chỉ chứa thừa số nguyên tố 2 $\Rightarrow$ mâu thuẫn.

Vậy $b = 4; a = 5$.

! HẾT !

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

<https://www.vnteach.com>

Hướng dẫn tìm và tải các tài liệu ở đây

<https://forms.gle/LzVNwfMpYB9qH4JU6>