

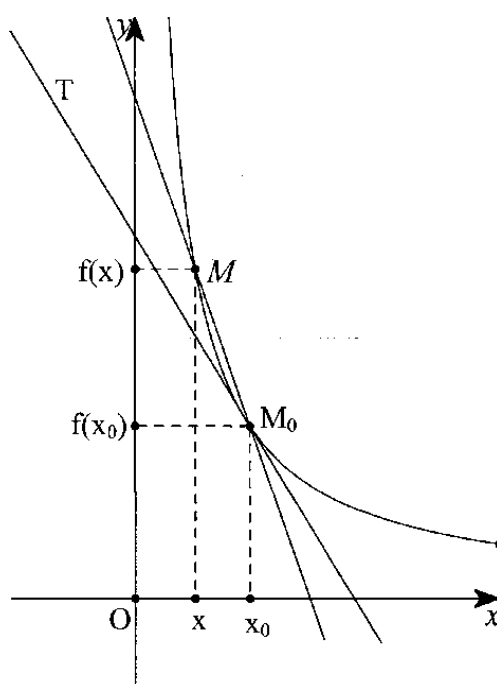
VẤN ĐỀ 4: TIẾP TUYẾN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

I. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

CÁC KHÁI NIỆM VỀ TIẾP TUYẾN CỦA ĐƯỜNG CONG PHẪNG

Trên mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường cong (C), Giả sử (C) là đồ thị của hàm số $y = f(x)$ và $M(x_0; f(x_0)) \in (C)$. Kí hiệu $M(x; f(x))$ là một điểm di chuyển trên (C). Đường thẳng MM_0 là một cát tuyến của (C).

Nhận xét rằng khi $x \rightarrow x_0$ thì $M(x; f(x))$ di chuyển trên (C) tới điểm $M_0(x_0; f(x_0))$ và ngược lại. Giả sử cát tuyến MM_0 có vị trí giới hạn, kí hiệu là M_0T thì M_0T được gọi là **tiếp tuyến** của (C) tại M_0 . Điểm M_0 được gọi là **tiếp điểm**.



II. CÁC DẠNG BÀI TẬP

DẠNG 1:

VIẾT PHƯƠNG TRÌNH TIẾP TUYẾN TẠI 1 ĐIỂM THUỘC ĐỒ THỊ

1. Bài toán

Cho đồ thị (C): $y = f(x)$ và điểm $M(x_0; y_0) \in (C)$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $M(x_0; y_0)$.

2. Phương pháp giải

Phương trình tiếp tuyến tại $M(x_0; y_0)$ của (C) là: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$.

3. Bài tập

A. Khởi động

Bài tập 1: Cho đồ thị (C): $y = f(x) = -x^4 + 2x^2$. Phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C) tại A $(-\sqrt{2}; 0)$ là:

(A) $y = 4\sqrt{2}x + 8$

(B) $y = 4\sqrt{2}x - 8$

(C) $y = \sqrt{2}x + 2$

(D) $y = x + \sqrt{2}$

Giải:

Ta có: $y' = f'(x) = -4x^3 + 4x \Rightarrow f'(-\sqrt{2}) = 4\sqrt{2}$

$\Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến tại A $(-\sqrt{2}; 0)$ là:

$$y = f'(-\sqrt{2})(x + \sqrt{2}) + f(-\sqrt{2}) = 4\sqrt{2}(x + \sqrt{2}) + 0 = 4\sqrt{2}x + 8$$

$$\Rightarrow y = 4\sqrt{2}x + 8$$

$\Rightarrow$ **Chọn A**

Bài tập 2: Cho đồ thị hàm số (C): $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 5$. Phương trình tiếp tuyến của (C) có hoành độ của tiếp điểm bằng 2 là:

(A) $y = x - 7$;

(B) $y = 2x - 9$;

(C) $y = 2x + 1$;

(D) $y = -2x - 1$

Giải:

Ta có: $y' = 3x^2 - 6x + 2$.

$x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = -5$; $y'(2) = 2 \Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến tại M(2; -5) là:

$$y = y'(2)(x - 2) + y(2) \Leftrightarrow y = 2(x - 2) - 5 \text{ hay } y = 2x - 9.$$

$\Rightarrow$ **Chọn B**

Chú ý:

+ Khi biết được 1 trong 2 yếu tố hoành độ tiếp điểm hoặc tung độ tiếp điểm thì ta phải tìm yếu tố còn lại để viết được phương trình tiếp tuyến.

+ Sử dụng Casio: Để tính $f'(2)$ ta nhập $\frac{d}{dx}(X^3 - 3X^2 + 2X - 5) \Big|_{x=2}$ nhấn bằng ta

được kết quả $f'(2) = 2$. Cách tính này các em nên dùng cho những bài toán viết tiếp tuyến của hàm số dạng phức tạp.

Bài tập 3: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C): $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 5$. Biết tung độ của tiếp điểm là 1.

(A) $y = 107x + 536$;

(B) $y = 107x + 534$;

(C) $y = 11x - 32$;

(D) $y = 11x - 34$;

Giải:

$$y_0 = 1 \Leftrightarrow x_0^3 - 3x_0^2 + 2x_0 - 5 = 1 \Leftrightarrow x_0^3 - 3x_0^2 + 2x_0 - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_0^2(x_0 - 3) + 2(x_0 - 3) = 0 \Leftrightarrow (x_0 - 3)(x_0^2 + 2) = 0 \Leftrightarrow x_0 = 3$$

Ta có: $y' = 3x^2 - 6x + 2, \Rightarrow y'(3) = 11$.

⇒ Phương trình tiếp tuyến tại điểm M(3; 1) là:

$$y = y'(3)(x - 3) + y(3) \Leftrightarrow y = 11(x-3) + 1 \text{ hay } y = 11x - 32$$

⇒ **Chọn C**

Bài tập 4 : Cho đồ thị (C): $y = f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^2 + 1$. Phương trình tiếp tuyến tại các giao điểm của (C) với Ox là:

(A) $y = 0$;

(B) $y = 1$;

(C) $y = 4x + 5$;

(D) $y = 4x - 21$.

Giải:

Hoành độ giao điểm của (C) với Ox là nghiệm của phương trình:

$$\frac{1}{4}x^4 - x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{2}$$

Ta có: $y' = f'(x) = x^3 - 2x$.

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại $x_0 = \sqrt{2}$ là:

$$y = f'(\sqrt{2})(x - \sqrt{2}) + f(\sqrt{2}) = 0(x - \sqrt{2}) + 0 = 0 \text{ hay } y = 0$$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại $x_0 = -\sqrt{2}$ là:

$$y = f'(-\sqrt{2})(x + \sqrt{2}) + f(-\sqrt{2}) = 0(x + \sqrt{2}) + 0 = 0 \text{ hay } y = 0$$

⇒ **Chọn A**

Bài tập 5: Tiếp tuyến tại điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 9x + 2$

(A) Song song với đường thẳng $x = 1$.

(B) Song song với trục hoành.

(C) Có hệ số góc dương.

(D) Có hệ số góc bằng 1.

Giải:

TXĐ: $D = \mathbb{R}$

Ta có: $y' = -3x^2 + 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$

Ta có: $y'' = -6x + 6$; $y''(-1) = 12 > 0 \Rightarrow x = -1$ là điểm cực tiểu, $y''(3) = -12 < 0 \Rightarrow x = 3$ là điểm cực đại.

Hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm cực tiểu là: $k = y'(-1) = 0 \Rightarrow$ tiếp tuyến song song với trục hoành.

⇒ **Chọn B**

Lưu ý: Có thể chọn nhanh phương án (B) bằng cách lí luận như sau: Vì $f'(x)$ tồn tại với mọi $x \in \mathbb{R}$ nên x_0 là điểm cực trị thì $f'(x_0) = 0 \Rightarrow$ Hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm cực trị x_0 là $k = f'(x_0) = 0 \Rightarrow$ Chọn (B).

Bài toán 6: Cho (C): $y = f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 3x - 8$. Khẳng định nào sau đây là SAI?

(A) Mọi tiếp tuyến tại một điểm bất kỳ trên (C) có hệ số góc không nhỏ hơn $-\frac{7}{6}$

(B) Các phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) với đường thẳng (D):

$$y = 2x - 10 \text{ và } y = -x - 7 \text{ và } y = \frac{19}{2}x - \frac{25}{4}$$

(C) Các phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) với Parabol (P):

$$y = x^2 + 3x - 8 \text{ và } y = 3x - 8 \text{ và } y = 27x - 71$$

(D) Các phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) với đường cong (C'):

$$y = x^3 - 4x^2 + 2x - 10 \text{ và } y = 19x + 1 \text{ và } y = 5x - 20$$

Giải:

Ta có: $y' = 6x^2 - 10x + 3$

$$\Rightarrow y' = 6 \left(x - \frac{5}{6} \right)^2 - \frac{7}{6} \geq -\frac{7}{6}$$

$\Rightarrow$ Khẳng định A là đúng

+ Xét khẳng định B:

Hoành độ giao điểm của (C) với (D) là nghiệm của phương trình

$$2x^3 - 5x^2 + 3x - 8 = 2x - 10 \Leftrightarrow (x-1)(x-2)(2x+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

- Tiếp tuyến tại $x = 2$ có phương trình là:

$$y = y'(2)(x-2) + y(2) = 7(x-2) - 6 = 7x - 20 \text{ hay } y = 7x - 20$$

- Tiếp tuyến tại $x = 1$ có phương trình là:

$$y = y'(1)(x-1) + y(1) = -1(x-1) - 8 = -x - 7 \text{ hay } y = -x - 7$$

- Tiếp tuyến tại $x = -\frac{1}{2}$ có phương trình là:

$$y = y'\left(-\frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right) + y\left(-\frac{1}{2}\right) \text{ hay } \frac{19}{2}\left(x + \frac{1}{2}\right) - 11 = \frac{19}{2}x - \frac{25}{4} \text{ hay } y = \frac{19}{2}x - \frac{25}{4}$$

$\Rightarrow$ Khẳng định B là đúng

+ Xét khẳng định C:

Hoành độ giao điểm của (C) với (P) là nghiệm của phương trình

$$2x^3 - 5x^2 + 3x - 8 = x^2 + 3x - 8 \Leftrightarrow 2x^2(x-3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$$

- Tiếp tuyến tại $X = 0$ có phương trình là:

$$y = y'(0)(x-0) + y(0) = 3x - 8 \text{ hay } y = 3x - 8.$$

- Tiếp tuyến tại $X = 3$ có phương trình là:

$$y = y'(3)(x - 3) + y(3) = 27(x - 3) + 10 = 27x - 71 \text{ hay } y = 27x - 71.$$

$\Rightarrow$ Khẳng định C là đúng

+ Xét khẳng định D:

Hoành độ giao điểm của (C) với (C') là nghiệm của phương trình

$$2x^3 - 5x^2 + 3x - 8 = x^3 - 4x^2 + 2x - 10 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

- Tiếp tuyến tại $X = -1$ có phương trình là:

$$y = y'(-1)(x + 1) + y(-1) = 19(x + 1) - 18 = 19x + 1 \text{ hay } y = 19x + 1.$$

- Tiếp tuyến tại $x = 2$ có phương trình là

$$y = y'(2)(x - 2) + y(2) = 7(x - 2) - 6 = 7x - 20 \text{ hay } y = 7x - 20$$

$\Rightarrow$ Khẳng định D là sai

$\Rightarrow$ **Chọn D**

Chú ý: Hoành độ tiếp điểm chính là hoành độ giao điểm của (C) và các đường cong.

Bài tập 7: Cho đồ thị (C): $y = -x^4 + 3mx^2 - 3m + 1$. Giá trị của m để các tiếp tuyến với đồ thị tại $A(1; 0)$ và $B(-1; 0)$ vuông góc với nhau là:

$$(A) m = \frac{1}{2};$$

$$(B) m = \frac{1}{2} \text{ và } m = \frac{5}{6};$$

$$(C) m = \frac{5}{6};$$

$$(D) m = \frac{2}{3};$$

Giải:

Do $A(1; 0) \in (C)$; $B(-1; 0) \in (C)$ nên các tiếp tuyến tại A và B vuông góc với nhau

$$\Leftrightarrow y'(1) \cdot y'(-1) = -1 \Leftrightarrow (-4 + 6m)(4 - 6m) = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{1}{2} \\ m = \frac{5}{6} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ **Chọn B**

Chú ý: Hai đường thẳng vuông góc với nhau (mà có các hệ số góc khác 0) thì có tích các hệ số góc bằng -1.

Bài tập 8: Cho 2 đồ thị (C): $y = f(x) = (x + 1)^2 (x - 1)^2$; (P): $y = g(x) = 2x^2 + m$. Có bao nhiêu khẳng định ĐÚNG trong các khẳng định dưới đây?

(A) 0;

(B) 1;

(C) 2;

(D) 3.

KHẲNG ĐỊNH 1: (C) và (P) tiếp xúc với nhau khi và chỉ khi $m = 1$.

KHẲNG ĐỊNH 2: Có duy nhất một tiếp tuyến chung tại các tiếp điểm chung của (C) với (P).

KHẲNG ĐỊNH 3: Các phương trình tiếp tuyến chung tại các tiếp điểm chung của (C) với (P) là $y = 4\sqrt{2x} - 7$ và $y = 1$.

Giải:

+ Xét khẳng định 1:

$$(C) \text{ và } (P) \text{ tiếp xúc với nhau} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases} \text{ có nghiệm}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^4 - 2x^2 + 1 = 2x^2 + m \\ 4x^3 - 4x = 4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = x^4 - 4x^2 + 1 \\ 4x(x^2 - 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0; m = 1 \\ x^2 = 2; m = -3 \end{cases}$$

Vậy với $m = 1$ hoặc $m = -3$ thì (C) và (P) tiếp xúc với nhau

$\Rightarrow$ Khẳng định 1 là **SAI**

+ Xét khẳng định 2 và 3:

Với $m = 1$; $x_0 = 0$ thì (P): $y = g(x) = 2x^2 + 1$

Phương trình tiếp tuyến chung tại $x_0 = 0$ là: $y = g'(0)(x - 0) + g(0) \Leftrightarrow y = 1$

Với $m = -3$; $x_0 = \sqrt{2}$ thì (P): $y = g(x) = 2x^2 - 3$

Phương trình tiếp tuyến chung tại $x_0 = \sqrt{2}$ là: $y = g'(\sqrt{2})(x - \sqrt{2}) + g(\sqrt{2})$
 $\Leftrightarrow y = 4\sqrt{2}x - 7$

Vậy khẳng định 2 là sai và khẳng định 3 là đúng.

$\Rightarrow$ Có tất cả 1 khẳng định đúng $\Rightarrow$ **Chọn B.**

Chú ý: Bài toán sự tiếp xúc của 2 đường cong (C): $y = f(x)$ và (C'): $y = g(x)$.

Hai đường cong (C) và (C') tiếp xúc với nhau $\Leftrightarrow$ Hệ $\begin{cases} f'(x) = g'(x) \\ f(x) = g(x) \end{cases}$ có nghiệm

Bài tập 9: Cho đồ thị (c): $y = x^3 + 3x^2 - 9x + 5$. Tiếp tuyến với đồ thị (C) có hệ số góc nhỏ nhất có phương trình là:

(A) $y = -12x - 28$;

(B) $y = -12x + 4$

(C) $y = -12x - 2$;

(D) $y = -12x + 2$.

Giải:

Tiếp tuyến tại $M(x_0; y_0)$ có hệ số góc $k = y'(x_0) = 3x_0^2 + 6x_0 - 9 = 3(x_0 + 1)^2 - 12 \geq -12$
 $\Rightarrow$ Hệ số góc nhỏ nhất bằng -12 khi $x_0 = -1$.

Phương trình tiếp tuyến tại $x_0 = -1$ là:

$$y = y'(-1)(x + 1) + y(-1) = -12(x + 1) + 16 = -12x + 4 \text{ hay } y = -12x + 4.$$

$\Rightarrow$ **Chọn B.**

Chú ý: Bài này tính được hệ số góc rồi tính tọa độ tiếp điểm và sau đó viết phương trình tiếp tuyến.

Bài tập 10: Cho đồ thị hàm số (C_m) : $y = x^3 + 8 - m(x + 2)$. Gọi $A = (C_m) \cap Oy$ có bao nhiêu giá trị của m để tiếp tuyến với (C_m) tại A chắn trên hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 16?

- (A) 2; (B) 1; (C) 0; (D) 3.

Giải:

$$\text{Vì } A = (C_m) \cap Oy \Rightarrow x_A = 0$$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại A là: (Δ) : $y = y'(0)(x-0) + y(0) = -mx + 8 - 2m$.

$$\text{Ta có: } (\Delta) \cap Oy = A(0; 8 - 2m); (\Delta) \cap Ox = B\left(\frac{8 - 2m}{m}; 0\right)$$

$$S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB = \frac{1}{2} \cdot |y_A| \cdot |x_B| = \frac{1}{2} |8 - 2m| \cdot \left| \frac{8 - 2m}{m} \right| = 16$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{-3 + \sqrt{13}}{2} \Rightarrow \text{có hai giá trị của } m \text{ thỏa mãn.}$$

$\Rightarrow$ **Chọn A.**

Chú ý: Tiếp tuyến tại A chắn 2 trục tọa độ 1 tam giác vuông tại gốc tọa độ O .

Bài tập 11: Viết các phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C) $y = \frac{1}{3}x^3 - x + \frac{2}{3}$ tại các điểm trên

(C) mà tại đó tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$

- (A) $y = 3x - 14/3$ và $y = 3x + 6$; (B) $y = 3x + 22/3$ và $y = 3x - 6$;
(C) $y = 3x - 22/3$ và $y = 3x + 6$; (D) $y = 3x + 14/3$ và $y = 3x - 6$

Giải:

Tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$ nên có hệ số góc $k = 3$.

Tiếp tuyến tại điểm $M(x_0; y_0)$ có hệ số góc $k = y'(x_0) = 3$
 $\Leftrightarrow x_0^2 - 1 = 3 \Leftrightarrow x_0^2 = 4 \Leftrightarrow x_0 = \pm 2$.

Phương trình tiếp tuyến tại $x_0 = 2$ là:

$$y = y'(2)(x-2) + y(2) = 3(x-2) + 4/3 = 3x - 14/3 \text{ hay } y = 3x - 14/3.$$

Phương trình tiếp tuyến tại $x = -2$ là: $y = y'(-2)(x+2) + y(-2) = 3(x+2) + 0$ hay $y = 3x + 6$.

$\Rightarrow$ **Chọn A.**

Chú ý: Hai đường thẳng vuông góc với nhau thì tích hai hệ số góc bằng -1 .

Bài tập 12 : Cho (C_m) : $y = f(x) = x^3 + mx^2 + 1$. Tìm m để (C_m) cắt đường thẳng $y = -x + 1$ tại 3 điểm phân biệt $A(0; 1)$, B , C sao cho các tiếp tuyến với (C_m) tại B và C vuông góc với nhau.

- (A) $m = 5$ hoặc $m = -5$; (B) $m = 5$
(C) $m = -5$; (D) $m = 0$.

Giải:

Hoành độ giao điểm của (C_m) với đường thẳng $y = -x + 1$ là nghiệm của phương trình $x^3 + mx^2 + 1 = -x + 1 \Leftrightarrow x^3 + mx^2 + x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 + mx + 1) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ g(x) = x^2 + mx + 1 = 0(1) \end{cases}$$

Vì $A(0; 1)$ nên x_B, x_C là 2 nghiệm phân biệt của phương trình (1)

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta = m^2 - 4 > 0; g(0) \neq 0 \\ x_B + x_C = -m \\ x_B x_C = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} m > 2 \\ m < -2 \end{cases} \\ x_B + x_C = -m \\ x_B x_C = 1 \end{cases}$$

Vì các tiếp tuyến tại B và C vuông góc với nhau nên $f'(x_B)f'(x_C) = -1$

$$\Leftrightarrow (3x_B^2 + 2mx_B)(3x_C^2 + 2mx_C) = -1 \Leftrightarrow 9(x_B x_C)^2 + 6mx_B x_C (x_B + x_C) + 4m^2 x_B x_C = -1$$

$$\Leftrightarrow 9.1^2 + 6m.1.(-m) + 4m^2.1 = -1 \Leftrightarrow m^2 = 5 \Leftrightarrow m = \pm 5 \text{ (Thỏa mãn)}$$

$\Rightarrow$ **Chọn A.**

Bài tập 13: Cho đồ thị hàm số (C): $y = \frac{(3m+1)x - m^2 + m}{x + m} (m \neq 0)$. Tìm tất cả các phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) với trục Ox, biết tiếp tuyến đó song song với (Δ): $y + 2016 = x$.

(A) $y = x + 1$;

(B) $y = x - 3/5$

(C) $y = x + 1$ và $y = x - 3/5$;

(D) $y = x - 1$.

Giải:

Giả sử: $(C) \cap Ox = (x_0; 0) \Rightarrow \frac{(3m+1)x_0 - m^2 + m}{x_0 + m} = 0(*)$

$$y'(x) = \frac{4m^2}{(x+m)^2} \Rightarrow y'(x_0) = \frac{4m^2}{(x_0+m)^2}$$

Do tiếp tuyến song song với (Δ): $y + 2016 = x$ nên $y'(x_0) = 1$

$$\Leftrightarrow \frac{4m^2}{(x_0+m)^2} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = m \\ x_0 = -3m \end{cases}$$

+ Với $x_0 = m$ thế vào (*) $\Rightarrow \frac{2m(m+1)}{m} = 0 \Leftrightarrow m = -1$

$\Rightarrow x_0 = -1 \Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến : $y = x + 1$.

+ Với $x_0 = -3m$ thế vào (*) $\Rightarrow \frac{-2m(5m+1)}{-2m} = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{5}$

$\Rightarrow x_0 = -3/5 \Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến : $y = x - 3/5$.

⇒ **Chọn C.**

Bài tập 14: Có bao nhiêu điểm trên đồ thị (C): $y = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$ mà tiếp tuyến của nó vuông góc với tiệm cận xiên của (C)?

(A) 2 điểm;

(B) 1 điểm;

(C) 0 điểm;

(D) 3 điểm.

Giải:

Ta có: $y = x + 1 + \frac{1}{x + 1}$ nên TCX là: $y = x + 1$

Vì tiếp tuyến tại $x = x_0$ vuông góc với tiệm cận xiên nên tiếp tuyến có hệ số góc

$$k = y'(x_0) = -1 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{(x_0 + 1)^2} = -1 \Leftrightarrow (x_0 + 1)^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -\frac{1}{\sqrt{2}} - 1 \Rightarrow y_0 = -\frac{3\sqrt{2}}{2} \\ x_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 \Rightarrow y_0 = \frac{3\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow A\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - 1; -\frac{3\sqrt{2}}{2}\right); B\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1; \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$$

Vậy có 2 điểm trên (C) thỏa mãn đề bài.

⇒ **Chọn A.**

Bài tập 15: Cho đồ thị (C): $y = \frac{x+1}{x-1}$. Mọi tiếp tuyến của (C) tạo với 2 tiệm cận của (C) một tam giác có diện tích không đổi bằng:

(A) 4 đvdt;

(B) 8 đvdt;

(C) 2 đvdt;

(D) 1 đvdt.

Giải:

Xét điểm $M\left(x_0; \frac{x_0 + 1}{x_0 - 1}\right) \in (C)$. Tiếp tuyến tại M có phương trình:

$$y = y'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) = -\frac{2}{(x_0 - 1)^2}(x - x_0) + \frac{x_0 + 1}{x_0 - 1}$$

TCĐ: $x = 1$; TCN: $y = 1$.

Gọi A, B theo thứ tự là các giao điểm của tiếp tuyến trên với tiệm cận đứng và tiệm cận ngang; E là giao điểm của 2 tiệm cận.

$$x_A = 1 \Rightarrow y_A = -\frac{2}{(x_0 - 1)^2}(1 - x_0) + \frac{x_0 + 1}{x_0 - 1} = \frac{2}{x_0 - 1} + \frac{x_0 + 1}{x_0 - 1} = \frac{x_0 + 3}{x_0 - 1}$$

$$y_B = 1 \Rightarrow 1 = -\frac{2}{(x_0 - 1)^2}(x_B - x_0) + \frac{x_0 + 1}{x_0 - 1} \Leftrightarrow (x_0 - 1)^2 = -2x_B + 2x_0 + x_0^2 - 1$$

$$\Leftrightarrow 2x_B = 4x_0 - 2 \Leftrightarrow x_B = 2x_0 - 1.$$

$$EA = |y_A - y_E| = \left| \frac{x_0 + 3}{x_0 - 1} - 1 \right| = \frac{4}{|x_0 - 1|}; EB = |x_B - x_E| = |2x_0 - 1 - 1| = 2|x_0 - 1|$$

Do đó:

$$S_{\Delta EAB} = \frac{1}{2} \cdot EA \cdot EB = 4 (\text{đvdt})$$

$\Rightarrow$ Các tiếp tuyến của đồ thị tạo với 2 tiệm cận một tam giác có diện tích không đổi bằng 4 đvdt.

$\Rightarrow$ **Chọn (A).**

Bài tập 16: Cho đồ thị (C): $y = \frac{x^2 - 3x + 4}{2x - 2}$ và điểm M bất kì thuộc C. Gọi I là giao điểm của 2 tiệm cận. Tiếp tuyến tại M cắt 2 tiệm cận tại A và B. Có bao nhiêu khẳng định đúng trong các khẳng định dưới đây?

(A) 1; (B) 2; (C) 3; (D) 4.

(A) M là trung điểm của AB.

(B) Tích các khoảng cách từ M đến 2 đường tiệm cận là không đổi.

(C) $S_{\Delta IAB}$ không đổi.

(D) Để chu vi ΔIAB nhỏ nhất thì hoành độ của điểm M bằng $1 \pm \sqrt{\frac{4}{5}}$.

Giải:

$$\text{Ta có: } y = \frac{x^2 - 3x + 4}{2x - 2} = \frac{x}{2} - 1 + \frac{1}{x-1} \Rightarrow \text{TCD: } x = 1 \text{ và TCX: } y = \frac{x}{2} - 1 \Rightarrow I \left(1; -\frac{1}{2} \right)$$

$$\text{Gọi } M \left(m; \frac{m}{2} - 1 + \frac{1}{m-1} \right) \in (C)$$

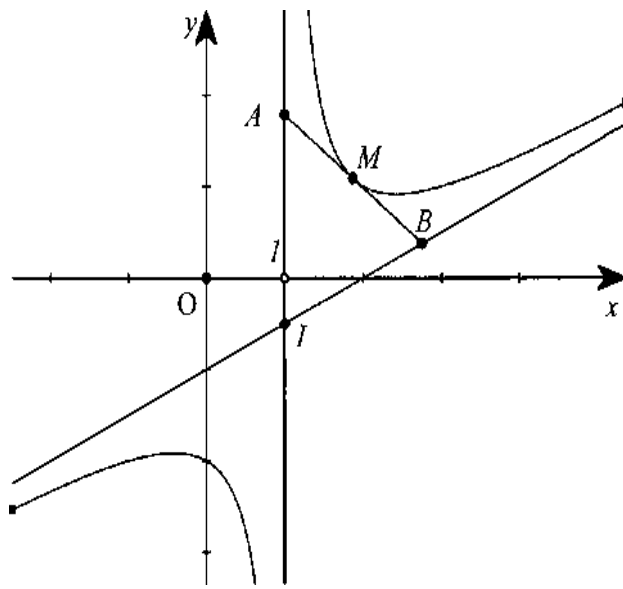
$$\text{Ta có: } y'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{(x-1)^2} \Rightarrow y'(m) = \frac{1}{2} - \frac{1}{(m-1)^2}$$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M là:

$$(\Delta): y = y'(m)(x - m) + y(m) \Rightarrow (\Delta): \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{(m-1)^2} \right] x - m + \frac{m}{2} - 1 + \frac{1}{m-1}$$

$$(\Delta) \text{ giao với TCD tại điểm } A \left(1; \frac{2}{m-1} - \frac{1}{2} \right)$$

$$(\Delta) \text{ giao với TCX tại điểm } B \left(2m-1; m - \frac{3}{2} \right)$$



+ Xét khẳng định (A):

Vì A, M, B thẳng hàng và $\frac{x_A + x_B}{2} = m = x_M \Rightarrow M$ là trung điểm của AB.

$\Rightarrow$ (A) đúng.

+ Xét khẳng định (B):

Khoảng cách từ M đến TCD: $x = 1$ là: $d_1 = |m - 1|$

Khoảng cách từ M đến TCX: $x - 2y - 2 = 0$ là: $d_2 = \frac{2}{\sqrt{5} \cdot |m - 1|}$

Ta có: $d_1 d_2 = |m - 1| \cdot \frac{2}{\sqrt{5} \cdot |m - 1|} = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow$ (B) đúng.

+ Xét khẳng định (C):

Kê: $BA \perp AI \Rightarrow S_{\Delta IAB} = \frac{1}{2} IA \cdot BH = \frac{1}{2} |y_A - y_I| \cdot |x_B - x_H|$

$$= \frac{1}{2} \left| \frac{2}{m - 1} \right| \cdot 2(m - 1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{|m - 1|} \cdot 2(m - 1) = 2 (\text{đvvd}) \Rightarrow \text{(C) đúng}$$

+ Xét khẳng định (D):

Gọi góc giữa 2 tiệm cận là α , góc giữa tiệm cận xiên với chiều dương trục Ox là

$$\varphi \Rightarrow \alpha + \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

Hệ số góc của TCX bằng 1/2 nên $\tan \varphi = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi} = \frac{1}{4}$

$$\Rightarrow \frac{\sin^2 \varphi}{\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi} = \frac{1}{5} \Rightarrow \sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{5}}; \cos \varphi = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

Chu vi ΔIAB là:

$$\begin{aligned} IA + IB + AB &= IA + IB + \sqrt{IA^2 + IB^2 - 2IA \cdot IB \cos \alpha} \\ &\geq 2\sqrt{IA \cdot IB} + \sqrt{2IA \cdot IB - 2IA \cdot IB \sin \varphi} = \sqrt{2IA \cdot IB} \left[\sqrt{2} + \sqrt{1 - \sin \varphi} \right] \end{aligned}$$

$$= \sqrt{\frac{4S_{\Delta IAB}}{\sin \alpha}} \left[\sqrt{2} + \sqrt{1 - \sin \varphi} \right] = \sqrt{\frac{8}{\cos \varphi}} \left[\sqrt{2} + \sqrt{1 - \sin \varphi} \right] = \sqrt{4\sqrt{5}} \left[\sqrt{2} + \sqrt{1 - \frac{1}{5}} \right]$$

$$= 2\sqrt[4]{20} - 2\sqrt{\sqrt{5} - 1}.$$

$$\text{Dấu} = \text{xảy ra khi} \Leftrightarrow \begin{cases} IA = IB \\ IA \cdot IB \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = 4 \end{cases} \Rightarrow IA = \sqrt[4]{20} \Leftrightarrow \frac{2}{|m-1|} = \sqrt[4]{20} \Leftrightarrow m = 1 \pm \sqrt[4]{\frac{4}{5}}.$$

$\Rightarrow$ (D) Đúng.

Vậy có tất cả 4 khẳng định đúng $\Rightarrow$ **Chọn (D)**

DẠNG 2:

VIẾT PHƯƠNG TRÌNH TIẾP TUYẾN THEO HỆ SỐ GÓC CHO TRƯỚC

1. Bài toán:

Cho đồ thị (C) và một số $k \in \mathbb{R}$.

2. Phương pháp giải:

- Giả sử tiếp tuyến có hệ số góc k , tiếp xúc với (C): $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ $x_i \Rightarrow$

$f'(x_i) = k \Rightarrow x = x_i$ là nghiệm của $f'(x) = k$.

- Giải phương trình $f'(x) = k \Rightarrow$ nghiệm $x \in \{x_0; x_1, \dots, x_n\}$.

- Phương trình tiếp tuyến tại x_i là: $y = k(x - x_i) + f(x_i)$

3. Bài tập

Bài tập 1: Tiếp tuyến của đồ thị hàm số (C): $y = x^2 - 3x$ với hệ số góc bằng 5 có phương trình là:

(A) $y = 5x - 24;$

(B) $y = 5x - 16;$

(C) $y = 5x + 24;$

(D) $y = 5x + 16.$

Giải:

Gọi tiếp điểm có hoành độ $x_0 \Rightarrow y'(x_0) = 2x_0 - 3 = 5 \Leftrightarrow x_0 = 4$

Phương trình tiếp tuyến tại điểm $x_0 = 4$ là: $y = 5(x - 4) + y(4) = 5x - 16.$

$\Rightarrow$ **Chọn B.**

Bài tập 2: các tiếp tuyến với đồ thị (C): $y = x^3 - 6x^2$ vuông góc với đường thẳng $y = \frac{1}{9}x$

(A) $y = 9x - 34 - 14\sqrt{7}$ và $y = 9x - 34 + 14\sqrt{7}.$

(B) $y = 9x - 2 + 14\sqrt{7}$ và $y = 9x - 2 - 14\sqrt{7}.$

(C) $y = -9x + 14$ và $y = -9x + 54.$

(D) $y = -9x + 4$ và $y = -9x.$

Giải:

Do tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y = \frac{1}{9}x$ nên tiếp tuyến có hệ số góc bằng -9. Gọi tiếp điểm có hoành độ x_0

$$\Rightarrow y'(x_0) \Leftrightarrow 3x_0^2 - 12x_0 = 9 \Leftrightarrow 3(x_0^2 - 4x_0 + 3) = 0 \Leftrightarrow (x_0 - 1)(x_0 - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ x_0 = 3 \end{cases}$$

Phương trình tiếp tuyến tại $x_0 = 1$ là: $y = -9(x - 1) + y(1) = -9(x - 1) - 5 = -9x + 4 \Rightarrow y = -9x + 4$

Phương trình tiếp tuyến tại $x_0 = 3$ là: $y = -9(x - 3) + y(3) = -9(x - 3) - 27 = -9x \Rightarrow y = -9x \Rightarrow$ chọn D.

Chú ý: Hai đường thẳng vuông góc với nhau thì tích hai hệ số góc bằng -1 (trong trường hợp các đường thẳng không song song với các trục tọa độ).

Bài tập 3: Tiếp tuyến với đồ thị (C): $y = x^3 - 9x^2 - 1$ song song với đường thẳng $y = -27x + 2017$ có phương trình là:

- (A) $y = -27x + 82$; (B) $y = -27x + 80$;
(C) $y = -27x - 80$; (D) $y = -27x - 82$.

Giải:

Do tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = -27x + 2017$ nên có hệ số góc bằng -27

Gọi tiếp điểm có hoành độ $x_0 \Rightarrow y'(x_0) = 3x_0^2 - 18x_0 = -27 \Leftrightarrow 3(x_0 - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 3$.

$\Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến tại $x_0 = 3$ là:

$$y = -27(x - 3) + y(3) = -27(x - 3) - 1 = -27x + 80 \Rightarrow -27x + 80.$$

$\Rightarrow$ **Chọn B.**

Chú ý: Hai đường thẳng song song với nhau thì có hệ số góc bằng nhau.

Bài tập 4: Cho (C) : $y = \frac{2x - 3}{x + 1}$. phương trình tiếp tuyến tạo với trục hoành góc 45° .

- (A) $y = -x + 3$ và $y = -x - 5$; (B) $y = -x + 3$;
(C) $y = -x - 3$ và $y = -x + 5$; (D) $y = -x + 5$.

Giải:

Vì tiếp tuyến của (C) tạo với Ox góc 45° nên hệ số góc k của tiếp tuyến thỏa mãn $|k| = 1 \Leftrightarrow k = \pm 1$.

$$\text{Vì } y' = -\frac{1}{(x+1)^2} < 0 \text{ nên } k = -1$$

Hoành độ tiếp điểm là nghiệm của phương trình:

$$y'(x) = -1 \Leftrightarrow -\frac{1}{(x+1)^2} = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = -3. \\ x = -2 \Rightarrow y = 7 \end{cases}$$

Phương trình tiếp tuyến tại $x = 0$ là: $y = -1(x-0) + y(0) = -x - 3$

Phương trình tiếp tuyến tại $x = -2$ là: $y = -1(x+2) + y(-2) = -x + 5$.

$\Rightarrow$ **Chọn C.**

Chú ý: Đường thẳng (D): $y = ax + b$ tạo với đường thẳng (d_1) : $y = ax_1 + b_1$ 1 góc α thì

$$\tan \alpha = \left| \frac{a - a_1}{1 + aa_1} \right|.$$

Bài tập 5 : Các phương trình tiếp tuyến của (C): $y = x^3 - 3x^2 + 2$ vuông góc với đường thẳng (D): $5y - 3x + 4 = 0$ là:

(A) $y = -\frac{5}{3}x + \frac{29}{27}$ và $y = -\frac{5}{3}x + \frac{62}{27}$.

(B) $y = -\frac{5}{3}x - \frac{29}{27}$ và $y = -\frac{5}{3}x + \frac{62}{27}$.

(C) $y = -\frac{5}{3}x + \frac{29}{27}$

(D) $y = -\frac{5}{3}x + \frac{62}{27}$.

Giải:

Hệ số góc của đường thẳng (D) là $3/5$. Mà tiếp tuyến vuông góc với (D) nên hệ số góc của tiếp tuyến là $-5/3$.

$$\text{Gọi hoành độ của tiếp điểm là } x_0 \Rightarrow y'(x_0) = -5/3 \Leftrightarrow 3x_0^2 - 6x_0 = -\frac{5}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = \frac{5}{3} \\ x_0 = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Phương trình tiếp tuyến tại $x_0 = 5/3$ là:

$$y = -\frac{5}{3}\left(x - \frac{5}{3}\right) + y\left(\frac{5}{3}\right) = -\frac{5}{3}x + \frac{25}{9} - \frac{46}{27} = -\frac{5}{3}x + \frac{29}{27}.$$

Phương trình tiếp tuyến tại $x_0 = 1/3$ là:

$$y = -\frac{5}{3}\left(x - \frac{1}{3}\right) + y\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{5}{3}x + \frac{5}{9} + \frac{46}{27} = -\frac{5}{3}x + \frac{62}{27}.$$

$\Rightarrow$ **Chọn A.**

Chú ý: Bài này cần xác định hệ số góc của đường thẳng (D) trước và sử dụng tính chất hai đường thẳng vuông góc với nhau thì có tích hệ số góc bằng -1 .

Bài tập 6: Cho (C_m) : $y = x^4 + mx^2 - m - 1$. Gọi A là điểm cố định có hoành độ dương của (C_m) . Giá trị của m để tiếp tuyến với đồ thị tại A song song với đường thẳng $y = 6x + 1$ là:

(A) $m = -23/12$;
 $m = -5$.

(B) $m = -25/12$;

(C) $m = 1$;

(D)

Giải:

Xét phương trình $y_0 = x_0^4 + mx_0^2 - m - 1 \forall m \Leftrightarrow m(x_0^2 - 1) + (x_0^4 - 1 - y_0) = 0 \forall m$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2 - 1 = 0 \\ x_0^4 - 1 - y_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = \pm 1 \\ y_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Điểm cố định } A(1;0).$$

Tiếp tuyến với đồ thị tại $A(1;0)$ và song song với $y = 6x + 1$

$$\Leftrightarrow y'(1) = 6 \Leftrightarrow 4 + 2m = 6 \Leftrightarrow m = 1.$$

$\Rightarrow$ **Chọn C.**

Bài tập 7: Cho đồ thị (C): $y = \frac{2x+2}{x-1}$. Các phương trình tiếp tuyến tạo với 2 trục tọa độ một tam giác cân là:

(A) $y = -x - 1$;

(B) $y = -x + 7$;

(C) $y = -x - 1$ và $y = -x + 7$;

(D) Không có tiếp tuyến nào.

Giải:

Ta có: $y'(x) = \frac{-4}{(x-1)^2}$.

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tọa độ tiếp điểm.

Vì tiếp tuyến tạo với 2 trục tọa độ 1 tam giác cân nên hệ số góc của tiếp tuyến bằng ± 1 .

$$\text{Mà } y'(x_0) < 0 \forall x_0 \neq 1 \Rightarrow y'(x_0) = -1 \Leftrightarrow \frac{-4}{(x_0-1)^2} = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ x_0 = 3 \end{cases}$$

+ Với $x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = 0 \Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến là: $y = -x - 1$

+ Với $x_0 = 3 \Rightarrow y_0 = 4 \Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến là: $y = -x + 7$

$\Rightarrow$ **Chọn C.**

Bài tập 8: Cho đồ thị (C_m) : $y = \frac{x^2 + 2x + m}{x - 1}$. Tìm m để (C_m) có tiếp tuyến vuông góc với đường phân giác của góc phần tư thứ nhất của hệ tọa độ.

(A) $m = -3$;

(B) $m > -3$;

(C) $m < -3$;

(D) Không có giá trị của m

Giải:

Đồ thị có tiếp tuyến vuông góc với góc phần tư thứ nhất $y = x$

$$\Leftrightarrow y'(x) = \frac{x^2 - 2x - 2 - m}{(x-1)^2} = -1$$

$$\text{Có nghiệm} \Leftrightarrow \frac{(x-1)^2 - 3 - m}{(x-1)^2} = -1 \text{ có nghiệm} \Leftrightarrow 2(x-1)^2 = m+3 \text{ có nghiệm}$$

$$x \neq 1 \Leftrightarrow m+3 > 0 \Leftrightarrow m > -3.$$

⇒ **Chọn B.**

Bài tập 9: Gọi $k_1; k_2$ là các hệ số góc của các tiếp tuyến của đồ thị hàm số (C): $y = x^2 + 2x$ tại các giao điểm của (C) với đường thẳng $y = mx + 1$. Biết $k_1 + k_2 = 3$, giá trị của tham số m là:

(A) $m = 3/2$;

(B) $m = 1$;

(C) $m = -1/2$;

(D) Không có giá trị của m

Giải:

$$y = f(x) = x^2 + 2x \Rightarrow f'(x) = 2x + 2$$

Gọi x_1, x_2 lần lượt là hoành độ của các tiếp điểm của các tiếp tuyến có các hệ số góc k_1, k_2 .

$$\text{Phương trình hoành độ giao điểm: } x^2 + 2x = mx + 1 \Leftrightarrow x^2 + (2-m)x - 1 = 0$$

$$\Delta = (2-m)^2 + 4 > 0 \forall m \Rightarrow x_1, x_2 \text{ phân biệt.}$$

$$x_1 + x_2 = m - 2$$

$$k_1 + k_2 = 3 \Leftrightarrow f'(x_1) + f'(x_2) = 3 \Leftrightarrow 2(x_1 + x_2) + 4 = 3 \Leftrightarrow 2(m - 2) = -1 \Leftrightarrow m = \frac{3}{2}$$

⇒ **Chọn A.**

Bài tập 10: Cho đồ thị hàm số (C): $y = f(x) = (1/2)x^4 - x^3 - 3x^2 + 7$. Tìm m để đồ thị (C) luôn có ít nhất 2 tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = 2016mx + 2017$.

(A) $\frac{-5\sqrt{5} - 7}{4032} \leq m \leq \frac{5\sqrt{5} - 7}{4032}$;

(B) $m > \frac{5\sqrt{5} - 7}{4032}$

(C) $m < \frac{5\sqrt{5} - 7}{4032}$;

(D) Không tìm được giá trị của m .

Giải:

Giả sử các tiếp tuyến của (C) song song với $y = 2016mx + 2017$ tiếp xúc với (C) tại x_0

$$\Rightarrow f'(x_0) = 2016m \Leftrightarrow 2x_0^3 - 3x_0^2 - 6x_0 = 2026m \Rightarrow x_0 \text{ là nghiệm của phương trình } 2x^3 - 3x^2 - 6x = 2016m$$

$$\text{Xét hàm số } g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 6x$$

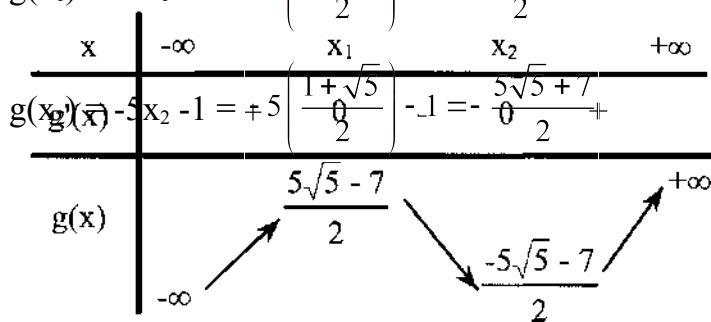
$$\text{Ta có: } g'(x) = 6(x^2 - x - 1) = 0 \Leftrightarrow h(x) = x^2 - x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}; x_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ và } g(x) \text{ đạt cực trị tại } x_1, x_2.$$

Thực hiện phép chia $g(x)$ cho $h(x)$ ta được:

$$g(x) = h(x)(2x - 1) - 5x - 1. \text{ Do } h(x_1) = h(x_2) = 0 \text{ nên}$$

$$\text{Lập bảng biến thiên của hàm số } y = \frac{5\sqrt{5}-7}{2}$$



Để có ít nhất 2 tiếp tuyến thì $g(x) = 2016m$ phải có ít nhất 2 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \frac{-5\sqrt{5}-7}{2} \leq 2016m \leq \frac{5\sqrt{5}-7}{2} \Leftrightarrow \frac{-5\sqrt{5}-7}{4032} \leq m \leq \frac{5\sqrt{5}-7}{4032}$$

Chú ý: Nếu $g(x) = 2016m$ có đúng 2 nghiệm thì nó có 1 nghiệm đơn và 1 nghiệm kép nên không xảy ra khả năng chỉ có 1 tiếp tuyến tiếp xúc với (C) tại 2 điểm phân biệt mà khi đó (C) sẽ có 2 tiếp tuyến ứng với 2 tiếp điểm.

DẠNG 3:

VIẾT PHƯƠNG TRÌNH TIẾP TUYẾN ĐI QUA 1 ĐIỂM CHO TRƯỚC

1. Bài toán:

Cho đồ thị (C): $y = f(x)$ và điểm $M(a; b)$. Viết phương trình tiếp tuyến đi qua $M(a; B)$ đến đồ thị (C): $y = f(x)$.

2. Phương pháp:

PHƯƠNG PHÁP TÌM TIẾP ĐIỂM

CÁCH 1: Giả sử tiếp tuyến đi qua $M(a; b)$ tiếp xúc với đồ thị (C): $y = f(x)$ tại tiếp điểm có hoành độ $x_i \Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến có (Δ): $y = f'(x_i)(x - x_i) + f(x_i)$

Do $M(a; b) \in \Delta$ nên $b = f'(x_i)(a - x_i) + f(x_i)$

$\Rightarrow x_i$ là nghiệm của phương trình: $b = f'(x_i)(a - x_i) + f(x_i) \Rightarrow$ Giải phương trình $\Rightarrow$ nghiệm $x \in \{x_0; x_1; \dots; x_n\}$

$\Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến tại x_i là: $y = f'(x_i)(x - x_i) + f(x_i)$

CÁCH 2: Đường thẳng đi qua $M(a; b)$ với hệ số góc k có phương trình: $y = k(x - a) + b$ tiếp xúc với đồ thị (C): $y = f(x) \Leftrightarrow$ Hệ phương trình $\begin{cases} f(x) = k(x - a) + b \\ f'(x) = k \end{cases}$ có nghiệm.

$\Rightarrow f(x) = f'(x)(x - a) + b \Rightarrow$ Giải phương trình $\Rightarrow$ Nghiệm $x \in \{x_0; x_1; \dots; x_n\}$

$\Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến tại x_i là $y = f'(x_i)(x - x_i) + f(x_i)$

3. Bài tập:

A. Khởi động

Bài tập 1: Các tiếp tuyến với đồ thị hàm số (C): $y = f(x) = x^3 - x - 6$ đi qua $A(2; 0)$ có các phương trình là:

(A) $y = 11x - 22;$

(B) $y = 2x - 4$ và $y = 11x - 22;$

(C) $y = 2x - 4;$

(D) $y = 3x - 6$ và $y = 2x - 4.$

Giải:

Ta có: $f(x) = 3x^2 - 1$.

Đường thẳng đi qua $A(2; 0)$ với hệ số góc k có phương trình: $y = k(x - 2)$ tiếp xúc với

$$(C) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = k(x - 2) \\ k = f'(x) \end{cases} \text{ có nghiệm}$$

$$\Rightarrow f(x) = f'(x)(x - 2) \Leftrightarrow x^3 - x - 6 = (3x^2 - 1)(x - 2)$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

+ Với $x = -1 \Rightarrow k = 2 \Rightarrow$ Tiếp tuyến có phương trình: $y = 2(x - 2)$ hay $y = 2x - 4$.

+ Với $x = 2 \Rightarrow k = 11 \Rightarrow$ Tiếp tuyến có phương trình: $y = 11(x - 2)$ hay $y = 11x - 22$.

Chú ý: Không nhầm lẫn giữa viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C) tại 1 điểm với viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C) qua 1 điểm.

Bài tập 2: Các tiếp tuyến với đồ thị hàm số (C): $y = \frac{3x + 3}{x - 2}$ đi qua gốc tọa độ $O(0;0)$ có các phương trình là:

$$(A) y = \frac{3\sqrt{3} - 6}{2}x.$$

$$(B) y = \frac{-3\sqrt{3} - 6}{2}x.$$

$$(C) y = \frac{3\sqrt{3} - 6}{2}x \text{ và } y = \frac{-3\sqrt{3} - 6}{2}x.$$

(D) Không có tiếp tuyến

Giải:

$$\text{TXĐ: } D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

Phương trình đường thẳng (t) đi qua $O(0;0)$ và có hệ số góc k là: $y = kx$.

$$\text{Đường thẳng (t) là tiếp tuyến của (C)} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3x + 3}{x - 2} = kx \\ k = \left(\frac{3x + 3}{x - 2} \right)' = \frac{-9}{(x - 2)^2} \end{cases} \text{ có nghiệm}$$

$$\Rightarrow \frac{3x + 3}{x - 2} = \frac{-9x}{(x - 2)^2} \Leftrightarrow x^2 + 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 - \sqrt{3} \\ x = -1 + \sqrt{3} \end{cases}$$

$$+ \text{ Với } x = -1 - \sqrt{3} \text{ thì } k = \frac{3\sqrt{3} - 6}{2} \Rightarrow \text{Phương trình tiếp tuyến (t}_2\text{): } y = \frac{-3\sqrt{3} - 6}{2}x$$

$$+ \text{ Với } x = -1 + \sqrt{3} \text{ thì } k = \frac{-6 - 3\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \text{Phương trình tiếp tuyến (t}_2\text{): } y = \frac{3\sqrt{3} - 6}{2}x$$

$\Rightarrow$ **Chọn C.**

Bài tập 3: Cho đồ thị hàm số (C): $y = \frac{x^2 - 4x + 5}{x - 2}$. Có bao nhiêu mệnh đề sai trong các mệnh đề dưới đây?

(A) 1;

(B) 2;

(C) 3;

(D) 4.

(A) Đường thẳng $y = -3x + 4$ là tiếp tuyến kẻ từ $A(1; 1)$ đến (C).

(B) Đường thẳng $y = \frac{5}{9}x + \frac{4}{9}$ là tiếp tuyến kẻ từ $A(1; 1)$ đến (C).

(C) Chỉ có một tiếp tuyến kẻ từ $A(1; 1)$ đến (C).

(D) Có đúng 2 tiếp tuyến kẻ từ $A(1; 1)$ đến (C).

Giải:

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

Đường thẳng (t) với hệ số góc k và đi qua $A(1; 1)$ có phương trình là: $y = k(x - 1) + 1$.

$$(t) \text{ là tiếp tuyến của (C)} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2 - 4x + 5}{x - 2} = k(x - 1) + 1 \\ k = \left(\frac{x^2 - 4x + 5}{x - 2} \right)', = \frac{x^2 - 4x + 3}{(x - 2)^2} \end{cases} \text{ có nghiệm}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 - 4x + 5}{x - 2} = \frac{x^2 - 4x + 3}{(x - 2)^2} (x - 1) + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ x = \frac{7}{2} \end{cases}$$

+ Với $x = 3/2$ thì $k = -3 \Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến (t): $y = -3(x-1)+1$ hay $y = -3x+4$

+ Với $x = 7/2$ thì $k = 5/9 \Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến (t): $y = \frac{5}{9}(x-1)+1$ hay $y = \frac{5}{9}x + \frac{4}{9}$

Vậy các mệnh đề (A), (B), (D) là đúng và mệnh đề (C) là sai.

$\Rightarrow$ **Chọn A.**

Bài tập 4: Tập hợp các điểm A trên đường thẳng $y = 2$ mà từ đó kẻ được 3 tiếp tuyến đến đồ thị (C): $y = f(x) = x^3 - 3x$ là:

(A) $\{A(a, 2) | a > 2\}$

(B) $\left\{A(a, 2) \left| a < -\frac{2}{3} \right.\right\}$

(C) $\left\{A(a, 2) \left| a \in \left(-\infty; -\frac{2}{3}\right) \cup (2; +\infty) \right.\right\}$

(D) $\left\{A(a, 2) \left| -\frac{2}{3} < a < 2 \right.\right\}$

Giải:

Lấy điểm $A(a; 2) \in y = 2$. Đường thẳng đi qua $A(a; 2)$ với hệ số góc k có phương trình

$$y = k(x-a) + 2 \text{ tiếp xúc với (C)} \Leftrightarrow \text{Hệ phương trình } \begin{cases} f(x) = k(x-a) + 2 \\ f'(x) = k \end{cases} \text{ có nghiệm}$$

$$\Rightarrow f(x) = f'(x)(x-a) + 2$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 3x = (3x^2 - 3)(x-a) + 2 \Leftrightarrow 2x^3 - 3ax^2 + 3a + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)[2x^2 - (3a+2)x + 3a+2] = 0 \Leftrightarrow (x+1)g(x) = 0$$

Từ $A(a; 2)$ kẻ được 3 tiếp tuyến đến (C) $\Leftrightarrow g(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt và khác -1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = (3a+2)^2 - 8(3a+2) > 0 \\ g(-1) = 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 9a^2 - 12a - 12 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a > 2 \\ a < -\frac{2}{3} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ **Chọn C.**

Bài tập 5: Có bao nhiêu điểm trên Oy mà từ đó kẻ được đúng 1 tiếp tuyến đến đồ thị (C):

$$y = \frac{x+2}{x-2}?$$

(A) 0 điểm; (B) 1 điểm; (C) 2 điểm; (D) 3 điểm.

Giải:

$$\text{TXĐ: } D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

Lấy bất kỳ $A(0; a) \in \text{Oy}$. Đường thẳng (t) đi qua $A(0; a)$ có hệ số góc k có phương trình $y = kx + a$.

$$(t) \text{ là tiếp tuyến với (C)} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x+2}{x-2} = kx + a(1) \\ k = \left(\frac{x+2}{x-2} \right)', = \frac{-4}{(x-2)^2}(2) \end{cases} \text{ có nghiệm}$$

$$\Rightarrow \frac{x+2}{x-2} = \frac{-4x}{(x-2)^2} + a \Leftrightarrow g(x) = (a-1)x^2 - 4(a+1)x + 4a+4 = 0(*)$$

Để từ $A(0; a)$ kẻ được đúng 1 tiếp tuyến đến (C) thì phương trình (*) có duy nhất 1 nghiệm x khác 2.

Xảy ra các trường hợp sau:

TRƯỜNG HỢP 1: $a - 1 = 0 \Leftrightarrow a = 1$. Khi đó (*) trở thành:

$$-8x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ (thỏa mãn)}$$

Thay $x = 1$ vào (2) ta có: $k = -4$ và thay vào (1) ta có: $a = 1 \Rightarrow A(0; 1)$.

$$\text{TRƯỜNG HỢP 2: } \begin{cases} a - 1 \neq 0 \\ g(2) = -8 \neq 0 \Leftrightarrow a = -1. \text{ Khi đó (*) có nghiệm } x = 0 \text{ (thỏa mãn)} \\ \Delta' = 8a + 8 = 0 \end{cases}$$

Thay $x = 0$ vào (2) ta có: $k = -1$ và thay vào (1) ta có: $a = -1 \Rightarrow A(0; -1)$.

Vậy tìm được 2 điểm $A_1(0; 1)$ và $A_2(0; -1)$ thỏa mãn đề bài.

$\Rightarrow$ **Chọn C.**

Bài tập 6: Các điểm M trên đường thẳng $y = -2$ kẻ được đến (C): $y = -x^3 + 3x^2 - 2$ hai tiếp tuyến vuông góc với nhau là:

$$(A) M\left(\frac{1}{189}; -2\right);$$

$$(B) M\left(-\frac{1}{189}; -2\right);$$

$$(C) M\left(\frac{11+4\sqrt{7}}{3}; -2\right);$$

$$(D) M\left(\frac{11-4\sqrt{7}}{3}; -2\right);$$

Giải:

Lấy điểm $M(a; -2)$ thuộc đường thẳng $y = -2$

Đường thẳng đi qua $M(a; -2)$ với hệ số góc k có phương trình: $y = k(x - a) - 2$ tiếp xúc với (C) $\Leftrightarrow$ Hệ $\begin{cases} f(x) = k(x - a) - 2 \\ f'(x) = k \end{cases}$ Có nghiệm

$$\Rightarrow f(x) = f'(x)(x-a) - 2 \Leftrightarrow -x^3 + 3x^2 - 2 = (-3x^2 + 6x)(x-a) - 2$$

$$\Leftrightarrow x[2x^2 + (3a - 3)x + 6a] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2x^2 + (3a - 3)x + 6a = 0 \end{cases}$$

+ Với $x = 0 \Rightarrow$ Tiếp tuyến: $y = -2$

Do không thể có tiếp tuyến nào vuông góc với tiếp tuyến $y = -2 // Ox$ nên để từ $A(a; -2)$ kẻ được hai tiếp tuyến vuông góc với nhau đến (C) thì $g(x) = 0$ phải có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 và các tiếp tuyến tại các điểm có hoành độ x_1, x_2 vuông góc với nhau

$$\Rightarrow -1 = y'(x_1) \cdot y'(x_2) = (-3x_1^2 + 6x_1)(-3x_2^2 + 6x_2) = 9x_1 x_2 [9x_1 x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4]$$

$$\Leftrightarrow -1 = 9 \cdot 3a \cdot \left[3a - 2\left(\frac{3a-3}{2}\right) + 4\right] = 189a \Leftrightarrow a = -\frac{1}{189}$$

Với $a = -\frac{1}{189}$ thì $\Delta_g = (3a - 3)^2 - 48a > 0 \Rightarrow M\left(-\frac{1}{189}; -2\right)$ cần tìm

$\Rightarrow$ **Chọn B.**

Bài tập 7: Cho (C): $y = f(x) = x^3 - 3x^2$. Từ 1 điểm bất kì trên đường thẳng $x = 2$ kẻ được bao nhiêu tiếp tuyến đến (C)?

(A) 0;

(B) 1;

(C) 2;

(D) 3.

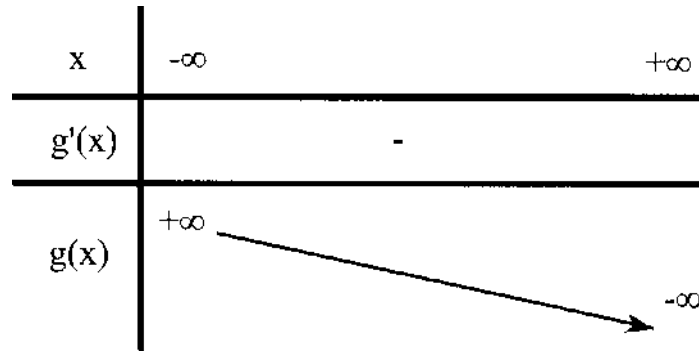
Giải:

Lấy điểm $M(2; m)$ thuộc đường thẳng $x = 2$. Đường thẳng đi qua $M(2; m)$ với hệ số góc k có phương trình: $y = k(x - 2) + m$ tiếp xúc với (C) $\Leftrightarrow$ Hệ $\begin{cases} f(x) = k(x - 2) + m \\ f'(x) = k \end{cases}$ Có nghiệm

$$\Rightarrow f(x) = f'(x)(x-2) + m \Leftrightarrow g(x) = -2x^3 + 9x^2 - 12x = m$$

$$\text{Ta có: } g'(x) = -6x^2 + 18x - 12 = -6\left[\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}\right] < 0$$

Bảng biến thiên:



Nghiệm của phương trình tìm tiếp điểm cũng là hoành độ giao điểm của đường thẳng $y = m$ với đồ thị $y = g(x)$. Nhìn bảng biến thiên ta thấy $g(x) = m$ có đúng 1 nghiệm. Vậy từ $M(2; m)$ chỉ kẻ được duy nhất 1 tiếp tuyến đến đồ thị (C).

⇒ **Chọn B.**

Bài tập 8: Cho hàm số $y = -x^3 + 6x^2 - 9x + 9$. Gọi (D) là tiếp tuyến của (C) tại A thuộc (C) có $x_A = 4$. Tìm trên (D) các điểm M sao cho từ mỗi điểm ấy vẽ được đúng 3 tiếp tuyến với (C).

(A) Các điểm M có hoành độ m thỏa mãn $m \in (-\infty; -2) \cup \left(\frac{10}{3}; +\infty\right) \setminus \{4\}$.

(B) Các điểm M có hoành độ m thỏa mãn $m \in (-\infty; -2) \cup \left(\frac{10}{3}; +\infty\right)$.

(C) Các điểm M có hoành độ m thỏa mãn

(D) Không có điểm M nào thỏa mãn.

Giải:

Do A thuộc (C) mà $x_A = 4 \Rightarrow y_A = 5 \Rightarrow A(4; 5)$.

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại A là:

$$(d): y = f'(4)(x-4) + 5 \Rightarrow (d): y = -9x + 41$$

Giả sử $M(m; -9m + 41)$ là điểm bất kì trên (D).

Xét đường thẳng (t) bất kì qua M và có hệ số góc k thì: (t): $y = k(x - m) + 41 - 9m$

$$(t) \text{ tiếp xúc với (C)} \Leftrightarrow \text{Hệ } \begin{cases} -x^3 - 6x^2 - 9x + 9 = k(x - m) + 41 - 9m(1) \\ -3x^2 + 12x - 9 = k(2) \end{cases} \text{ Có nghiệm}$$

Thay (2) vào (1) ta được:

$$-x^3 - 6x^2 - 9x + 9 = (x - m)(-3x^2 + 12x - 9) + 41 - 9m$$

$$\Leftrightarrow (x - 4)[2x^2 + (2 - 3m)x + 8] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ 2x^2 + (2 - 3m)x + 8 = 0(3) \end{cases}$$

Để từ M kẻ được 3 tiếp tuyến với (C) thì (3) phải có 2 nghiệm phân biệt và khác 4

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 9m^2 - 12m - 60 > 0 \\ 48 - 12m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -2 \\ m > \frac{10}{3} \\ m \neq 4 \end{cases}$$

Vậy, những điểm trên (D) mà từ đó vẽ được 3 tiếp tuyến với (C) là những điểm có hoành độ m thỏa mãn: $m \in (-\infty; -2) \cup \left(\frac{10}{3}; +\infty\right) \setminus \{4\}$.

$\Rightarrow$ **Chọn A.**

Bài tập 9: Có bao nhiêu phát biểu **ĐÚNG** trong các phát biểu dưới đây?

(A)1;(B)2;(C)3;(D)4

Cho đồ thị (C): $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$. Số tiếp tuyến đi qua điểm M nằm trên đồ thị (C) là:

- (A)1 nếu điểm M có hoành độ bằng 1. (B) 2 nếu điểm M có hoành độ khác 1.
(C) 1 nếu điểm M có hoành độ khác 1. (D) 2 nếu điểm M có hoành độ bằng 1.

Giải:

Gọi $M(a; a^3 - 3a^2 + 2) \in (C)$. Đường thẳng đi qua $M(a; a^3 - 3a^2 + 2)$ với hệ số góc k, có phương trình là: $y = k(x - a) + a^3 - 3a^2 + 2$ tiếp xúc với (C)

$\Leftrightarrow$ Hệ phương trình $\begin{cases} f(x) = k(x - a) + a^3 - 3a^2 + 2 \\ k = f'(x) \end{cases}$ có nghiệm

$$\Rightarrow f(x) = f'(x)(x - a) + a^3 - 3a^2 + 2$$

$$\Leftrightarrow 2x^3 - 3(a+1)x^2 + 6ax + a^3 - 3a^2 = 0 \Leftrightarrow (x - a)[2x^2 - (a+3)x + 3a - a^2] = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(x - a)^2(2x + a - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ x = \frac{3 - a}{2} \end{cases}$$

+ Nếu $a = \frac{3 - a}{2} \Leftrightarrow a = 1$ thì có 1 tiếp tuyến đi qua điểm M nằm trên đồ thị.

+ Nếu $a \neq \frac{3 - a}{2} \Leftrightarrow a \neq 1$ thì có 2 tiếp tuyến đi qua điểm M nằm trên đồ thị.

$\Rightarrow$ **Chọn B.**

Bài tập 10: Điều kiện của m để từ A(2;2) kẻ được 2 tiếp tuyến AB, AC đến đồ thị

(C): $y = f(x) = m/x$ sao cho tam giác ABC đều (ở đây B, C là 2 tiếp điểm) là:

- (A) $m \in (-\infty; 0) \cup (4; +\infty)$; (B) $m = 6$
(C) $m \in \{-2; 6\}$; (D) $m = -2$

Giải:

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Đường thẳng (t) đi qua A(2; 2) với hệ số góc k có phương trình: $y = k(x - 2) + 2$

(t) là tiếp tuyến với (C) $\Leftrightarrow$ Hệ $\begin{cases} f(x) = k(x - 2) + 2 \\ f'(x) = k \end{cases}$ có nghiệm

$$\Rightarrow f(x) = f'(x)(x - 2) + 2 \Rightarrow \frac{m}{x} = \frac{-m}{x^2}(x - 2) + 2 \Leftrightarrow g(x) = x^2 - mx + m = 0(*)$$

Để từ A(2; 2) kẻ được 2 tiếp tuyến đến (C) thì (*) có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 khác 0

$$\Leftrightarrow \begin{cases} g(0) = m \neq 0 \\ \Delta = m^2 - 4m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 4 \\ m < 0 \end{cases} (1)$$

Khi đó: $\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1 x_2 = m \end{cases}$

Vì điểm A(2; 2) thuộc đường thẳng $y = x$ là trục đối xứng của đồ thị (C) nên nếu từ A kẻ được 2 tiếp tuyến AB, AC thì $AB = AC \Rightarrow$ Để $\triangle ABC$ đều thì $y = m/x$ là hàm đồng biến và có hai giá trị phân biệt k_1, k_2 khác 0 và thỏa mãn:

$$\left| \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2} \right| = \tan 60^\circ \Leftrightarrow \left| \frac{\frac{-m}{x_1^2} + \frac{m}{x_2^2}}{1 + \frac{m^2}{x_1^2 x_2^2}} \right| = \sqrt{3} \Leftrightarrow |x_1 - x_2| = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} = 2\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{m^2 - 4m} = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow m^2 - 4m - 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 6 \\ m = -2 \end{cases} (2)$$

Để hàm $y = \frac{m}{x}$ đồng biến thì $y' = \frac{-m}{x^2} > 0 \forall x \neq 0 \Leftrightarrow m < 0$ (3)

Từ (1), (2) và (3) $\Rightarrow$ m cần tìm là : $m = -2$

$\Rightarrow$ **Chọn D.**

Bài tập 11: Cho đồ thị hàm số (C): $y = x - 1 + \frac{m-1}{x+1}$. Điều kiện cần và đủ để trên mặt phẳng tọa độ tồn tại ít nhất 1 điểm sao cho từ đó kẻ được 2 tiếp tuyến vuông góc với nhau đến đồ thị (C) là:

- (A) $m = 1$; (B) $m > 1$; (C) $m < 1$; (D) Không có giá trị của m.

Giải:

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Giả sử tồn tại 2 tiếp tuyến của đồ thị (C) vuông góc với nhau

$$\Leftrightarrow \exists x_1, x_2 \in \mathbb{R} \text{ sao cho } y'(x_1) \cdot y'(x_2) = -1 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}$$

$$\text{Sao cho } \begin{cases} y'(x_1) = k \\ y'(x_2) = -\frac{1}{k} \end{cases} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} \text{ để các phương trình } y'(x_1) = k \quad (1)$$

Và $y'(x_2) = -(1/k)$ (2) có nghiệm

$$+) \text{ Xét phương trình (1): } y'(x) = k \Leftrightarrow 1 - \frac{m-1}{(x+1)^2} = k$$

Nếu $m = 1$ thì $y'(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ Không tồn tại x_1, x_2 để $y'(x_1) \cdot y'(x_2) = -1$

$$\text{Nếu } m \neq 1 \text{ thì } y'(x) = k \Leftrightarrow 1 - k = \frac{m-1}{(x+1)^2} \Leftrightarrow (x+1)^2 = \frac{m-1}{1-k}$$

$$\text{Ta thấy (1) có nghiệm} \Leftrightarrow \frac{m-1}{1-k} > 0 \Leftrightarrow (m-1)(1-k) > 0$$

$$\text{Tương tự suy ra (2) có nghiệm} \Leftrightarrow (m-1) \left[1 - \left(\frac{-1}{k} \right) \right] > 0 \Leftrightarrow (m-1)(k+1)k > 0$$

$$\text{Xét hệ điều kiện } \begin{cases} (m-1)(1-k) > 0 \\ (m-1)(1+k)k > 0 \end{cases} \quad (3)$$

$$+ \text{ Nếu } m > 1 \text{ thì (3)} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-k > 0 \\ (k+1)k > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k < 1 \\ 0 < k < -1 \end{cases}$$

$$+ \text{ Nếu } m < 1 \text{ thì (2)} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-k < 0 \\ (k+1)k < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k > 1 \\ -1 < k < 0 \end{cases} \Rightarrow \text{vô nghiệm}$$

Vậy điều kiện cần và đủ để trên mặt phẳng tọa độ tồn tại ít nhất 1 điểm sao cho từ đó kẻ được 2 tiếp tuyến vuông góc với nhau là: $m > 1$.

$\Rightarrow$ **Chọn B.**

Bài tập 12: Cho đồ thị hàm số (C): $y = f(x) = x^4 - x^2 + 1$. Tìm các điểm A thuộc Oy kẻ được đúng 3 tiếp tuyến đến đồ thị (C)

$$(A) A(0;1); \quad (B) A(0; 3/4); \quad (C) A(0; 2); \quad (D) A(0; 1/2).$$

Giải:

Lấy điểm $A(0;a) \in Oy$. Đường thẳng đi qua $A(0; a)$ với hệ số góc k có phương trình

$$y = kx + a \text{ tiếp xúc với (C)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = kx + a \\ f'(x) = k \end{cases} \quad (*) \text{ có nghiệm}$$

Điều kiện cần: Ta có: $f(x) = f(-x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x)$ là hàm chẵn $\Rightarrow$ Đồ thị (C) nhận Oy làm trục đối xứng. Do $A(0; a)$ thuộc trục đối xứng Oy nên nếu từ $A(0; a)$ kẻ được bao nhiêu tiếp tuyến bên nhánh trái của (C) thì cũng kẻ được bấy nhiêu tiếp tuyến đến nhánh phải của (C) $\Rightarrow$ Tổng số các tiếp tuyến có hệ số góc $k \neq 0$ luôn là 1 số chẵn. Vậy để từ $A(0; a)$ kẻ được 3 tiếp tuyến đến (C) thì điều kiện cần là hệ (*) có nghiệm $k = 0$.

$$\text{Với } k = 0 \text{ hệ (*) trở thành } \begin{cases} x^4 - x^2 + 1 = a \\ 4x^3 - 2x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0; a = 1 \\ x^2 = \frac{1}{2}; a = \frac{3}{4} \end{cases}$$

Điều kiện đủ:

$$+ \text{ Nếu } a=1 \text{ thì } (*) \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 - x^2 + 1 = kx + 1 \\ 4x^3 - 2x = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 - x^2 = (4x^3 - 2x)x \\ 4x^3 - 2x = k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2(3x^2 - 1) = 0 \\ k = 2x(x^2 - 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0; k=0 \\ x=-\frac{1}{\sqrt{3}}; k=\frac{2}{3\sqrt{3}} \\ x=\frac{1}{\sqrt{3}}; k=-\frac{2}{3\sqrt{3}} \end{cases}$$

Vậy từ A (0;1) kẻ được 3 tiếp tuyến đến (C).

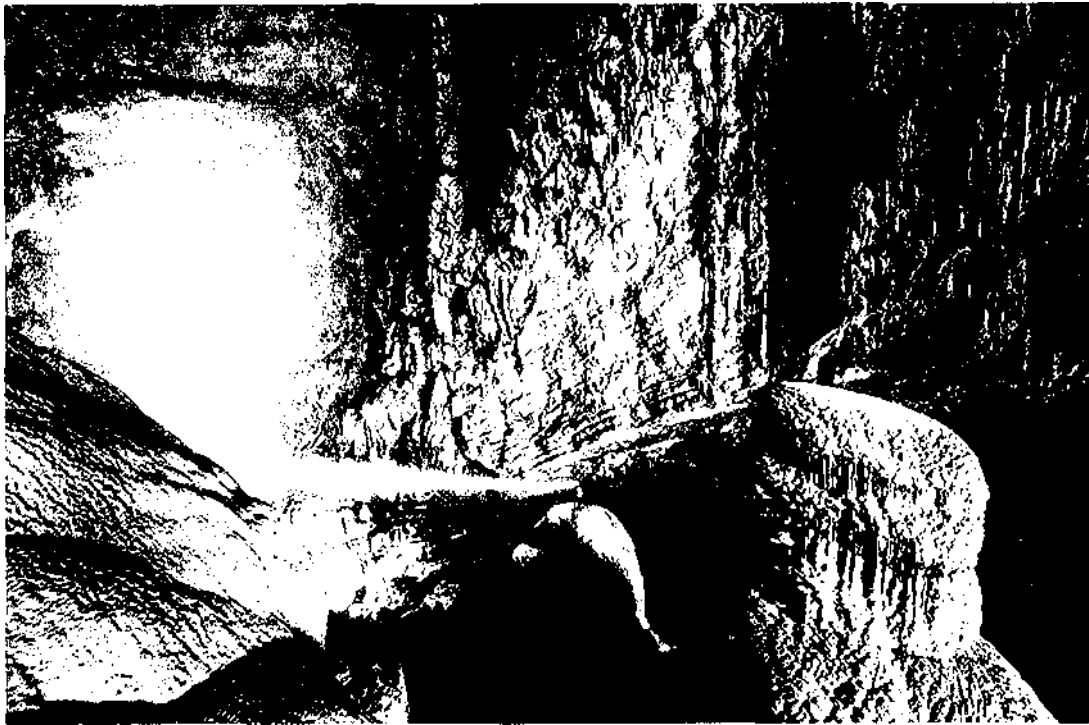
$$+ \text{ Nếu } a = 3/4 \text{ thì } (*) \text{ trở thành } \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 - x^2 + 1 = kx + \frac{3}{4} \\ 4x^3 - 2x = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 - x^2 + 1 = (4x^3 - 2x)x + \frac{3}{4} \\ k = 4x^3 - 2x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^4 - x^2 - \frac{1}{4} = 0 \\ k = 2x(x^2 - 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{1}{2} \\ k = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \text{ Từ A (0;3/4) kẻ được 3 tiếp tuyến đến (C).}$$

KẾT LUẬN: Vậy A (0;1)

$\Rightarrow$ **Chọn A.**

Chú ý: Nếu giải bài toán theo cách biện luận số tiếp tuyến bằng số tiếp điểm, tức là qua A(0; a) kẻ được 3 tiếp tuyến $\Leftrightarrow$ Phương trình $f(x) = f'(x)x + a$ có 3 nghiệm phân biệt thì chưa chắc chắn, vì có thể xảy ra khả năng có 2 tiếp tuyến ứng với 3 tiếp điểm phân biệt, đó là 1 tiếp tuyến tiếp xúc với đồ thị tại 1 tiếp điểm và 1 tiếp tuyến tiếp xúc với đồ thị tại 2 tiếp điểm.



Nằm trong quần thể hang động Phong Nha - Kẻ Bàng, thuộc huyện Bố Trạch tỉnh Quảng Bình, hang Sơn Đoòng là hang động tự nhiên lớn nhất thế giới. Hang Sơn Đoòng được hình thành khoảng 2-5 triệu năm trước khi nước sông chảy ngang qua vùng đá vôi đã bị vùi lấp dọc theo một đường đứt gãy. Dòng nước làm xói mòn và tạo ra một đường hầm khổng lồ trong lòng đất dưới dãy núi. Tại những nơi đá mềm, phần trần sụp xuống tạo thành những lỗ hổng, lâu ngày thành vòm hang khổng lồ.