

ĐỀ 68**Học sinh giỏi toán 9 Lai Châu _ 23-24****Câu 1. (4,0 điểm)**

a) Rút gọn biểu thức sau:

$$P = \left(\frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b}} + \frac{a-b}{\sqrt{a^2-b^2-a+b}} \right) \cdot \frac{a^2+b^2}{\sqrt{a^2-b^2}} \text{ với } a > b > 0$$

b) Cho a, b, c là các số thực khác không thỏa mãn $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 2$

và $a + b + c = abc$. Chứng minh rằng $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 2$

Câu 2. (2,0 điểm)

Chọn ngẫu nhiên 1 số tự nhiên có 3 chữ số. Tính xác suất để số được chọn chia hết cho 9

Câu 3. (4,0 điểm)

a) Một cửa hàng bán mật tam hoa của Bắc Hà, ngày thứ nhất bán với giá là 50.000 đồng 1 kg; với giá bán này cửa hàng chỉ bán được 50 kg. Ngày thứ hai, nếu cửa hàng này giảm giá bán mỗi kilogram mật đi 1.000 đồng thì số mật tam hoa bán được sẽ tăng thêm là 10 kg. Biết giá nhập về ban đầu 1 kg mật tam hoa là 35.000 đồng, ngày thứ hai để cửa hàng đó thu được lợi nhuận là 1.000.000 đồng thì phải bán với giá không đổi là bao nhiêu tiền một kilogram mật?

b) Cho phương trình $x^2 - (m-2)x - m^2 - 3m - 8 = 0$ (1) (m là tham số). Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (1), tìm tất cả các giá trị của tham số m để

$$Q = \left(\frac{x_1}{x_2} \right)^3 + \left(\frac{x_2}{x_1} \right)^3 \text{ đạt giá trị lớn nhất}$$

Câu 4. (6,0 điểm)

Cho tứ giác ABCD ($AB > AC$) nội tiếp đường tròn tâm O đường kính BC = 2R. Trên cung BC không chứa D lấy điểm Q bất kỳ khác AB và CD. Gọi E là giao điểm của AB và CD, đường thẳng EQ cắt BC tại M, cắt đường tròn (O; R) tại N (N khác Q) và cắt đường tròn ngoại tiếp $\triangle ADE$ tại P (P khác E). Gọi I, H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của Q lên các đường thẳng BD, BC, EC.

a) Chứng minh: 4 điểm C, H, Q, K cùng thuộc 1 đường tròn; 4 điểm B, I, H, Q cùng thuộc 1 đường tròn và tứ giác BAPM nội tiếp đường tròn.

b) Chứng minh $\frac{EN}{EM} = \frac{EP}{EQ}$

c) Chứng minh ba điểm I, H, K thẳng hàng và $\frac{BC}{QH} = \frac{BD}{QI} + \frac{CD}{QK}$

Câu 5 (2,0 điểm)

a) Cho hai số thực không âm a, b. Chứng minh rằng:

$$a^3 + b^3 \geq ab(a+b)$$

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \left(3 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \left(3 + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \left(3 + \frac{1}{c} + \frac{1}{a} \right); \text{ trong đó } a, b, c \text{ là các số thực dương}$$

thỏa mãn điều kiện $a + b + c \leq \frac{3}{2}$

Câu 6 (2,0 điểm)

a) Chứng minh rằng $n^3 + 6n^2 + 11n + 2022$ chia hết cho 6 với mọi số tự nhiên n.

b) Giải phương trình nghiệm nguyên: $x^3 - x^2y - 4y^3 - y - 2 = 0$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. (4,0 điểm)

a) Rút gọn biểu thức sau:

$$P = \left(\frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}} + \frac{a-b}{\sqrt{a^2-b^2}-a+b} \right) \cdot \frac{a^2+b^2}{\sqrt{a^2-b^2}} \text{ với } a > b > 0$$

b) Cho a, b, c là các số thực khác không thỏa mãn $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 2$

và $a + b + c = abc$. Chứng minh rằng $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 2$

Lời giải

a) Với a, b > 0

$$\begin{aligned} P &= \left[\frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}} + \frac{(\sqrt{a-b})^2}{\sqrt{a-b}\sqrt{a+b}-(\sqrt{a-b})^2} \right] \cdot \frac{a^2+b^2}{\sqrt{a^2-b^2}} \\ &= \left(\frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}} + \frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}} \right) \cdot \frac{a^2+b^2}{\sqrt{a^2-b^2}} \\ &= \sqrt{a-b} \left(\frac{1}{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}} + \frac{1}{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}} \right) \cdot \frac{a^2+b^2}{\sqrt{a^2-b^2}} \\ &= \sqrt{a-b} \frac{2\sqrt{a+b}}{(\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b})(\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b})} \cdot \frac{a^2+b^2}{\sqrt{a^2-b^2}} \\ &= \sqrt{a-b} \frac{2\sqrt{a+b}}{a+b-(a-b)} \cdot \frac{a^2+b^2}{\sqrt{a^2-b^2}} = \frac{2\sqrt{a^2-b^2}}{2b} \cdot \frac{a^2+b^2}{\sqrt{a^2-b^2}} = \frac{a^2+b^2}{b} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} &= 2 \Rightarrow \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)^2 = 4 \\ &\Rightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + 2 \left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac} \right) = 4 \\ &\Rightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + 2 \left(\frac{a+b+c}{ab+bc+ca} \right) = 4 (*) \end{aligned}$$

$$\text{Mà } a + b + c = abc \Rightarrow \frac{a+b+c}{ab+bc+ca} = 1 \text{ Từ } (*) \Rightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + 2 = 4$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 2$$

Câu 2. (2,0 điểm)

Chọn ngẫu nhiên 1 số tự nhiên có 3 chữ số. Tính xác suất để số được chọn chia hết cho 9

Lời giải

$$n(\Omega) = 999 - 100 + 1 = 900$$

Gọi A là biến cố “số được chọn chia hết cho 9”

Số tự nhiên lớn nhất có 3 chữ số chia hết cho 9 là 999

Số tự nhiên bé nhất có 3 chữ số chia hết cho 9 là 108

$$n(A) = \frac{999-108}{9} + 1 = 100. \text{ Xác suất của biến cố C là } P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{1}{9}$$

Câu 3. (4,0 điểm)

a) Một cửa hàng bán mận tam hoa của Bắc Hà, ngày thứ nhất bán với giá là 50.000 đồng 1 kg; với giá bán này cửa hàng chỉ bán được 50 kg. Ngày thứ hai, nếu cửa hàng này giảm giá bán mỗi kilogam mận đi 1.000 đồng thì số mận tam hoa bán được sẽ tăng thêm là 10 kg. Biết giá nhập về ban đầu 1 kg mận tam hoa là 35.000 đồng, ngày thứ hai để cửa hàng đó thu được lợi nhuận là

1.000.000 đồng thì phải bán với giá không đổi là bao nhiêu tiền một kilogram mận?

b) Cho phương trình $x^2 - (m-2)x - m^2 - 3m - 8 = 0$ (1) (m là tham số). Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (1), tìm tất cả các giá trị của tham số m để $Q = \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^3 + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^3$ đạt giá trị lớn nhất

Lời giải

a) Gọi x (đồng) là giá bán ở ngày thứ 2 của mỗi kg mận tam hoa, $(35.000 \leq x \leq 50.000)$

Theo bài ra số kg mận bán thêm được là:

$$(50.000 - x) \cdot \frac{10}{1.000} = \frac{50.000 - x}{100}$$

Do đó số kg mận bán được tương ứng với giá bán x :

$$50 + \frac{50.000 - x}{100} = 550 - \frac{x}{100}$$

Lợi nhuận thu được ở ngày thứ hai là

$$\text{Ta có: } \left(550 - \frac{x}{100}\right) \cdot (x - 35.000) = \frac{-1}{100} x^2 + 900x - 19250000$$

Vì lợi nhuận thu được ở ngày thứ hai là 1.000.000 nên

$$\frac{-1}{100} x^2 + 900x - 19250000 = 1000000 \Leftrightarrow x = 45000$$

Vậy giá bán ở ngày thứ hai là 45.000 đồng

b)

$$\Delta = (m-2)^2 - 4(-m^2 - 3m - 8) = 5m^2 + 8m + 36$$

$$(m+4)^2 + 4m^2 + 20 > 0, \forall m \in \mathbb{R}$$

Suy ra phương trình (1) luôn có 2 nghiệm phân biệt

$$\text{Theo hệ thức Vi-ét ta có: } \begin{cases} x_1 + x_2 = m - 2 \\ x_1 x_2 = -m^2 - 3m - 8 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } Q = \left(\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}\right)^3 - 3\left(\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}\right)$$

$$\text{Xét } t = \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - x_1 \cdot x_2}{x_1 x_2} = \frac{3m^2 + 2m + 20}{-m^2 - 3m - 8}$$

$$\Leftrightarrow (t+3)m^2 + (3t+2)m + 8t + 20 = 0 \quad (2)$$

$$(3t+2)^2 - 4(t+3)(8t+20) \geq 0 \Leftrightarrow -23t^2 - 164t - 236 \geq 0$$

Điều kiện tồn tại m là

$$\Leftrightarrow (23t+118)(t+2) \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-118}{23} \leq t \leq -2$$

$$\text{Do đó } Q = t^3 - 3t = -2 + (t-1)^2(t+2) \leq -2 \quad (\forall t \leq -2)$$

Vậy Q đạt giá trị lớn nhất bằng $-2 \Leftrightarrow t = -2$ hay $m = 2$

Câu 4. (6,0 điểm)

Cho tứ giác ABCD ($AB > AC$) nội tiếp đường tròn tâm O đường kính BC = 2R. Trên cung BC không chứa D lấy điểm Q bất kỳ khác AB và CD. Gọi E là giao điểm của AB và CD, đường thẳng EQ cắt BC tại M, cắt đường tròn (O; R) tại N (N khác Q) và cắt đường tròn ngoại tiếp $\triangle ADE$ tại P (P khác E). Gọi I, H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của Q lên các đường thẳng BD, BC, EC.

a) Chứng minh: 4 điểm C, H, Q, K cùng thuộc 1 đường tròn; 4 điểm B, I, H, Q cùng thuộc 1 đường tròn và tứ giác BAPM nội tiếp đường tròn.

$$\text{b) Chứng minh } \frac{EN}{EM} = \frac{EP}{EQ}$$

$$\text{c) Chứng minh ba điểm I, H, K thẳng hàng và } \frac{BC}{QH} = \frac{BD}{QI} + \frac{CD}{QK}$$

Vì tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn đường kính BC nên: $\widehat{EDA} = \widehat{EBC}$
(góc ngoài tại 1 đỉnh bằng góc trong tại đỉnh đối diện)

b) Vì tứ giác BAPM nội tiếp nên chứng minh được $EP \cdot EM = EA \cdot EB$ (1)

Từ (1), (2) suy ra $EN.EQ = EP.EM \Rightarrow \frac{EN}{EM} = \frac{EP}{EQ}$

Vì 4 điểm B, I, H, Q cùng thuộc 1 đường tròn $\Rightarrow \widehat{BQI} = \widehat{BHI}$ (4) (góc nội tiếp chắn cung BI)

Mà $\widehat{BQC} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \widehat{IQK} = \widehat{BQC}$
 $\Rightarrow \widehat{BQI} = \widehat{CQK}$ (5)

Mà $\widehat{CHK} + \widehat{BHK} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{BHI} + \widehat{BHK} = 180^\circ \Rightarrow 3$ điểm I, H, K thẳng hàng.

$$\Rightarrow \frac{BI}{IO} = \frac{CK}{KO} \Rightarrow \frac{BI}{DK} = \frac{CK}{DI}$$

$$\frac{BD}{QI} + \frac{CD}{QK} \stackrel{!}{=} \frac{BI+ID}{DK} + \frac{DK-KC}{DI} = \frac{ID}{DK} + \frac{DK}{DI} \quad (6)$$

$$\text{Do } \widehat{DKI} = \widehat{CQH} \Rightarrow \tan \widehat{DKI} = \tan \widehat{CQH} \Rightarrow \frac{ID}{DK} = \frac{CH}{QH} \quad (7)$$

$$\text{Do } \widehat{DKI} = \widehat{HBQ} (= \widehat{QIH}) \Rightarrow \cot \widehat{DKI} = \cot \widehat{HBQ} \Rightarrow \frac{DK}{DI} = \frac{BH}{HQ} \quad (8)$$

$$\text{Từ (6), (7), (8)} \Rightarrow \frac{BD}{QI} + \frac{CD}{QK} \stackrel{!}{=} \frac{CH}{QH} + \frac{BH}{HQ} \stackrel{!}{=} \frac{BC}{QH}$$

$$\text{Vậy } \frac{BD}{QI} + \frac{CD}{QK} \stackrel{!}{=} \frac{BC}{QH}$$

Câu 5 (2,0 điểm)

a) Cho hai số thực không âm a, b. Chứng minh rằng:

$$a^3 + b^3 \geq ab(a+b)$$

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \left(3 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \left(3 + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \left(3 + \frac{1}{c} + \frac{1}{a}\right); \text{ trong đó } a, b, c \text{ là các số thực dương}$$

$$\text{thỏa mãn điều kiện } a + b + c \leq \frac{3}{2}$$

Lời giải

$$\text{a) Ta có: } a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 \geq ab(a+b) \Leftrightarrow (a+b)(a^2 - ab + b^2) - ab(a+b) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a+b)(a^2 - 2ab + b^2) \geq 0 \Leftrightarrow (a+b)(a-b)^2 \geq 0 \quad (*)$$

(*) luôn đúng vì $a+b \geq 0, (a-b)^2 \geq 0, \forall a, b$ không âm.

Vậy $a^3 + b^3 \geq ab(a+b)$, với hai số thực không âm a, b

$$\text{b) Đặt } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = x; \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = y; \frac{1}{c} + \frac{1}{a} = z \quad (x, y, z > 0)$$

$$\Rightarrow P = (3+x)(3+y)(3+z)$$

$$\stackrel{!}{=} 27 + 3(xy + yz + zx) + 9(x + y + z) + xyz$$

$$\geq 27 + 9\sqrt[3]{(xyz)^2} + 27\sqrt[3]{xyz} + xyz$$

$$\text{Lại có: } xyz = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a}\right) \geq \frac{8}{abc} \quad (\forall a, b, c > 0)$$

$$\text{Mà } \frac{3}{2} \geq a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc} \Rightarrow \frac{1}{2} \geq \sqrt[3]{abc} \Rightarrow abc \leq \frac{1}{8} \Rightarrow \frac{8}{abc} \geq 64$$

$$\Rightarrow xyz \geq \frac{8}{abc} \geq 64$$

Thay vào (*) ta được:

$$P \geq 27 + 9\sqrt[3]{64^2} + 27\sqrt[3]{64} + 64 = 27 + 144 + 108 + 64 = 343$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi } a = b = c = \frac{1}{2}$$

$$\text{Vậy } P_{\min} = 343 \text{ khi } a = b = c = \frac{1}{2}$$

Câu 6 (2,0 điểm)

a) Chứng minh rằng $n^3 + 6n^2 + 11n + 2022$ chia hết cho 6 với mọi số tự nhiên n.

$$\text{b) Giải phương trình nghiệm nguyên: } x^3 - x^2y - 4y^3 - y - 2 = 0$$

Lời giải

$$\text{a) } n^3 + 6n^2 + 11n + 2022 = (n+1)(n+2)(n+3) + 2016$$

$$A = (n+1)(n+2)(n+3)$$

Với mọi số tự nhiên n, ta luôn có A là tích của 3 số tự nhiên liên tiếp nên A luôn chia hết cho 2 và 3.

$$\text{Mà } (2, 3) = 1 \text{ nên } A : 6 \quad (1)$$

$$\text{Ta có } 2016 : 6 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có $[(n+1)(n+2)(n+3)+2016]:6$

Vậy: $n^3+6n^2+11n+2022$ chia hết cho 6 với mọi số tự nhiên n.

$$b) x^3 - x^2 y - 4y^3 - y - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 + y = (x - 2y)(x^2 + xy + 2y^2) (*)$$

$$+) y + 2 = 0 \Leftrightarrow y = -2$$

$$(*) \Leftrightarrow (x + 4)(x^2 - 2x + 8) = 0 \Leftrightarrow x = -4$$

$$+) y + 2 \neq 0 \Leftrightarrow y \neq -2$$

$$(*) \Leftrightarrow (y + 2) : (x^2 + xy + 2y^2)$$

$$\Rightarrow |y + 2| \geq (x^2 + xy + 2y^2) = \left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{7}{4}y^2 \geq y^2$$

$$\Leftrightarrow (y^2 - y - 2)(y^2 + y + 2) \leq 0 \Leftrightarrow y^2 - y - 2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow y \in \{-1; 0; 1; 2\}$$

$$+) y = -1$$

$$(*) \Leftrightarrow (x + 2)(x^2 - x + 2) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 = 1 \\ x^2 - x + 2 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x \in \emptyset \left(\text{Do } x^2 - x + 2 \geq \frac{7}{4} \right)$$

$$+) y = 0 (*) \Leftrightarrow x^3 = 2 \text{ (không có nghiệm nguyên)}$$

$$+) y = 1 (*) \Leftrightarrow (x - 2)(x^2 + x + 2) = 3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = 1 \\ x^2 + x + 2 = 1 \text{ (Do } x^2 + x + 2 > 1) \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset$$

$$+) y = 2 (*) \Leftrightarrow (x - 4)(x^2 + 2x + 8) = 4 \Leftrightarrow x \in \emptyset$$

$$(\text{Do } x^2 + 2x + 8 \geq 7)$$

Vậy phương trình có duy nhất 1 nghiệm nguyên là $(x; y) = (-4; -2)$

----- HẾT -----