ĐỀ SỐ 11: ĐỀ TỰ LUYỆN BỒI DƯỠNG HSG CẤP HUYỆN LỚP 8
NĂM HỌC: 2023-2024
Thời gian làm bài 120 phút

I. Phần trắc nghiệm (8,0 điểm) Chọn một phương án đúng

Câu 1. Sau khi rút gọn biểu thức $A=\frac{4xy}{y^2-x^2}:\left(\frac{1}{y^2-x^2}+\frac{1}{y^2+2xy+x^2}\right)$ với $x\neq\pm y,\ y\neq 0$ là:

A. $A=2x(x-y)$ **B.** $A=2x^2(x+y)$ **C.** $A=2x^2+2xy$ **D.** $A=2x^2+yx$

Câu 2. Xét biểu thức: $S=\frac{1}{2^0}+\frac{2}{2^1}+\frac{3}{2^2}+...+\frac{1992}{2^{1991}}$ Ta có:

A. $S=3$ **B.** $3<S<4$ **C.** $S=4,5$ **D.** $S=4$

Câu 3. Cho a + b + c = 0 và $a^2+b^2+c^2=14$. Giá trị của biểu thức $B=a^4+b^4+c^4$ là :
A.49 **B.** 98 **C.**28 **D.** Một kết quả khác

Câu 4: Nghiệm của phương trình $(y+5)(y-5)-(y-2)^2=-5$ là

A. $y=6$; B. $y=-6$; C. $y=5$; D. $y=2$.

Câu 5. Số nghiệm của phương trình $-2(z+3)-5=z+4$ là

A. $z=-1$; B. $z=1$; C. $z=2$; D. $z=-2$

Câu 6. Giá trị a,b sao cho $f(x)=ax^3+bx^2+10x-4$ chia hết cho đa thức $g(x)=x^2+x-2$ là:

A. a=2;b=4 **B.** a=-2;b=4 **C.** a=2;b=-4 **D.** a=-2;b=-4

Câu 7. D- khi chia đa thức f(x) cho đa thức x^2-x. Biết rằng khi chia f(x) cho x; cho x-1 thì các số d- lần l- ợt là 1 và 2 là:

A. x-1 **B.** x+1 **C.** **2**x-1 **D.** **2**x+1

Câu 8. Số dư trong phép chia đa thức (x + 2)(x + 4)(x + 6)(x + 8) + 2014 cho đa thức x^2 là:

A. 2014 **B.** 2015 **C.** 2016 **D.** 2017

Câu 9. Cho tam giác ABC vuông tại A có AH đường cao. Biết BH = 9cm, CH = 16cm. Độ dài AC là:

A. 20cn **B**. 25cm **C**. 12 **D.** Một số khác

Câu 10. Cho tam giác ABC có $B+C=105^0$ và $AB+AC\sqrt{2}=2BC$. thì góc B là:

A. 45^0 **B**.60^0 **C**. 65^0 **D**. 70^0

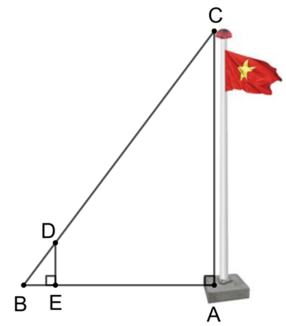
Câu 11. Cho tứ giác ABCD có AC=10cm, BD=12cm và góc giữa AC và BD bằng 30^0. Diện tích tứ giác ABCD là:

A. 36cm^2; B. 30cm^2; C. 25cm^2; D. 22cm^2

Câu 12. Cho tam giác ABC có AB = 8cm, AC = 7cm và $ABC=30^0$,C nhọn. Góc CAB là:

A. 105^0 **B**. 115^0 **C**. 100^0 **D**. 110^0

Câu 13: Để đo chiều cao AC của một cột cờ*(như hình vẽ)*, người ta cắm một cái cọc ED có chiều cao $2\ m$ vuông góc với mặt đất. Đặt vị trí quan sát tại B, biết khoảng cách BE là $1,5\ m$ và khoảng cách AB là $9\ m$.



Khi đó,chiều cao AC của cột cờlà:

A. $4\,m$ B. $6{,}75\,m$. C. $3\,m$ D. $12\,m$

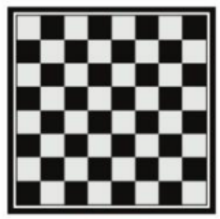
Câu 14: Mặt của một bàn cờ vua có dạng hình vuông với độ dài cạnh là $40cm$. Độ dài đường chéo của mặt bàn cờ vua đó là bao nhiêu (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

A. $56{,}6cm$

B. $56cm$

C. $56{,}5cm$

D. $56{,}56cm$



Câu 15: Một vật hình chóp tam ... tích là 40cm^3 và diện tích đáy là 15cm^2. Tính chiều cao của hình chóp tam giác đều đó.

A. 8cm ; B. $\frac{16}{3}$cm ; C. $\frac{8}{3}$cm ; D. 16cm

Câu 16. Một người gửi 200 triệu vào ngân hàng với lãi suất hàng năm là 5%. Vì bận việc, nên tới ngày nhận lãi hết năm thứ 2, người đó mới đến ngân hàng nhận lãi. Người đó đã nhận bao nhiêu tiền lãi (biết lãi suất mỗi năm không đổi)

A. 20tr **B**. 22tr **C**. 20,5tr **D.** 22,5tr

II. Phần tự luận (12,0 điểm)

Câu 1(3,5 điểm): a. Cho n là số tự nhiên lẻ. Chứng minh n^3-n chia hết cho 24.

b. Tìm số tự nhiên n để $n^2+4n+2013$ là một số chính phương.

Câu 2 (3,0 điểm):

a. Cho $x^2+x=1$. Tính giá trị biểu thức $Q=x^6+2x^5+2x^4+2x^3+2x^2+2x+1$.

b. Giải phương trình sau $(x + 1)^2(x + 2) + (x – 1)^2(x – 2) = 12$

Câu 3 (4,5 điểm): Cho hình vuông $ABCD$, Gọi E là 1 điểm bất kỳ trên cạnh BCC(E khác B và C), Qua A kẻ Ax vuông góc với AE, Ax cắt CD tại F, trung tuyến AI của ΔAEF cắt CD ở K, đường thẳng kẻ qua E, song song với AB cắt AI ở G

a) Chứng minh $AE=AF$ và tứ giác $EGFK$ là hình thoi

b) Chứng minh ΔAKF đồng dạng với ΔCAF và $AF^2=FK.FC$

c) Khi E thay đổi trên BC, chứng minh chu vi của ΔEKC không đổi.

Câu 4 (1,0 điểm): Cho hai số không âm a và b thoả mãn $a^2+b^2=a+b$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $S=\frac{a}{a+1}+\frac{b}{b+1}$

---------------**Hết**----------------

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh: ....Số báo danh:.......................

ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN CHẤM

I. Phần trắc nghiệm (8,0 điểm) Mỗi câu đúng 0,5 điểm

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Đáp án	C	B	B	A	B	A	B	A	A	B
Câu	11	12	13	14	15	16				
Đáp án	B	B	D	A	A	C				

HƯỚNG DẪN

Câu 1:Sau khi rút gọn biểu thức $A=\frac{4xy}{y^2-x^2}:\left(\frac{1}{y^2-x^2}+\frac{1}{y^2+2xy+x^2}\right)$ với $x\neq\pm y,\ y\neq 0$ là:

Với $x\neq\pm y; y\neq 0$ ta có:

$$A=\frac{4xy}{y^2-x^2}:\left(\frac{1}{y^2-x^2}+\frac{1}{y^2+2xy+x^2}\right)$$

$$A=\frac{4xy}{(y-x)(y+x)}:\left(\frac{1}{(y-x)(y+x)}+\frac{1}{(y+x)^2}\right)$$

$$A=\frac{4xy}{(y-x)(y+x)}:\left(\frac{y+x+y-x}{(y-x)(y+x)^2}\right)$$

$$A=\frac{4xy}{(y-x)(y+x)}:\frac{2y}{(y-x)(y+x)^2}$$

$$A=\frac{4xy}{(y-x)(y+x)}.\frac{(y-x)(y+x)^2}{2y}$$

$$A=2x(x+y)$$

Vậy $x\neq\pm y; y\neq 0$ thì A = 2x(x + y)

Câu 2: Xét biểu thức: S = $\frac{1}{2^0}+\frac{2}{2^1}+\frac{3}{2^2}+...+\frac{1992}{2^{1991}}$ Chứng minh rằng S < 4

Lời giải

Ta có: 2S = $\frac{2}{2^0}+\frac{4}{2^1}+\frac{3}{2^1}+\frac{4}{2^2}...+\frac{1992}{2^{1990}}=4+\left(\frac{2}{2}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{3}{2^2}+\frac{1}{2^2}\right)+...+\left(\frac{1991}{2^{990}}+\frac{1}{2^{1990}}\right)=$

$$=3\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2^0}+\frac{2}{2^1}+\frac{3}{2^2}+...+\frac{1991}{2^{1990}}+\frac{1992}{2^{1991}}\right)-\frac{1992}{2^{1991}}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+...+\frac{1}{2^{1990}}=$$

$$=3\frac{1}{2}+S-\frac{1992}{2^{1991}}+\frac{1}{2^2}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{1989}}{1-\frac{1}{2}}=3\frac{1}{2}+S-\frac{1992}{2^{1991}}+\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{1990}\Rightarrow$$

S = 4 - $\frac{1992}{2^{1991}}-\left(\frac{1}{2}\right)^{1990}<4$ hay S < 4

Câu 3. Cho a + b + c = 0 và $a^2 + b^2 + c^2 = 14$

Tính giá trị của biểu thức B = $a^4 + b^4 + c^4$

Ta có: $14^2 = (a^2 + b^2 + c^2)^2$

$\Leftrightarrow 196 = a^4 + b^4 + c^4 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2c^2b^2$

$\Leftrightarrow a^4 + b^4 + c^4 = 196 - 2(a^2c^2 + a^2b^2 + b^2c^2)$

Lại có: a+ b+ c = 0 $\Rightarrow (a+b+c)^2 = 0$

$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc = 0 \Rightarrow ab + ac + bc = -7$

$\Rightarrow (ab + ac + bc)^2 = 49$

$\Rightarrow a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 + 2ab^2c + 2bc^2a + 2ca^2b = 49$

$\Rightarrow a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 + 2abc(a+b+c) = 49$

Do đó : $\Rightarrow a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 = 49$

$\Rightarrow$ B = $a^4 + b^4 + c^4$ = 196-2.49 = 98

Câu 4. Tập nghiệm của bất phương trình $\dfrac{3x-2}{5} \geq \dfrac{x}{2} + 0,8$ là:

Giải

Xét bất phương trình : $\dfrac{3x-2}{5} \geq \dfrac{x}{2} + 0,8$

$$\Leftrightarrow 6x - 4 \geq 5x + 8$$

$$\Leftrightarrow 6x - 5x \geq 4 + 8$$

$$\Leftrightarrow x \geq 12$$

Câu 5. Số nghiệm của phương trình $x^2 - 3x + 2 + |x-1| = 0$ là:

$x^2 - 3x + 2 + |x-1| = 0$ (1)

+ Nếu $x \geq 1$: (1) $\Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ (thỏa mãn điều kiện $x \geq 1$).

+ Nếu $x < 1$: (1) $\Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 3(x-1) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-3) = 0$

$\Leftrightarrow x = 1;\ x = 3$ (cả hai đều không bé hơn 1, nên bị loại)

Vậy: Phương trình (1) có một nghiệm duy nhất là $x = 1$.

Câu 6. Tìm a,b sao cho $f(x) = ax^3 + bx^2 + 10x - 4$ chia hết cho đa thức

$g(x) = x^2 + x - 2$

Ta có : $g(x) = x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$ Vì $f(x) = ax^3 + bx^2 + 10x - 4$ chia hết cho đa thức $g(x) = x^2 + x - 2$

Nên tồn tại một đa thức q(x) sao cho f(x)=g(x).q(x)

$\rightarrow ax^3 + bx^2 + 10x - 4 = (x+2).(x-1).q(x)$

Với $x=1 \rightarrow a+b+6=0 \rightarrow b=-a-6 \ (1)$

Với $x=-2 \rightarrow 2a-b+6=0 \ (2)$

Thay (1) vào (2) . Ta có : a=2 và b=4

Câu 7. Tìm phần d- khi chia đa thức f(x) cho đa thức x^2 - x

Biết rằng khi chia f(x) cho x; cho x-1 thì các số d- lần l- ợt là 1 và 2.

Theo định lý Be zout ta có f(0)=1; f(1) = 2

Vì $x^2 - x = x(x-1)$ có bậc là 2 nên d- trong phép chia f(x) cho $x^2 - x$ có bậc không quá 1

Giả sử d- là r(x) = ax + b ta có

f(x)= x (x-1)q(x)+ ax + b (1)

Thay x =0 vào (1) ta đ- ợc f(0) = b =1

Thay x = 1 vào (1) ta đ- ợc f(1) = a+b = 2

=> a=b =1

Vậy d- cần tìm là x+1

Câu 8.

Tìm số dư trong phép chia đa thức (x + 2)(x + 4)(x + 6)(x + 8) + 2014 cho đa thức x^2

Đặt A = $(x + 2)(x + 4)(x + 6)(x + 8) + 2029=(x^2 + 10x + 16)(x^2 + 10x + 24) + 2029$

Đặt $x^2 + 10x + 21 = t$Suy ra A = $(t - 5)(t + 3) + 2029 = t^2 – 2t – 15 + 2029 = t^2 - 2t + 2014$

Vậy dư của phép chia A cho $x^2 + 10x + 21$ là 2014

+10x +21.

Câu 9. Cho tam giác ABC vuông tại A có AH đường cao. Biết BH = 9cm, CH = 16cm.
Tính AH; AC; số đo góc ABC (số đo góc làm tròn đến độ)

<u>Giải</u>

Xét ΔABC vuông tại A, AH đường cao

Ta có: $AH^2 = BH \cdot HC$ (Hệ thức lượng)

$AH^2 = 9 \cdot 16 = 144$

$\Rightarrow$ AH = 12(cm) (0.5đ)

Ta có: $BC = BH + HC$ (H thuộc cạnh BC)

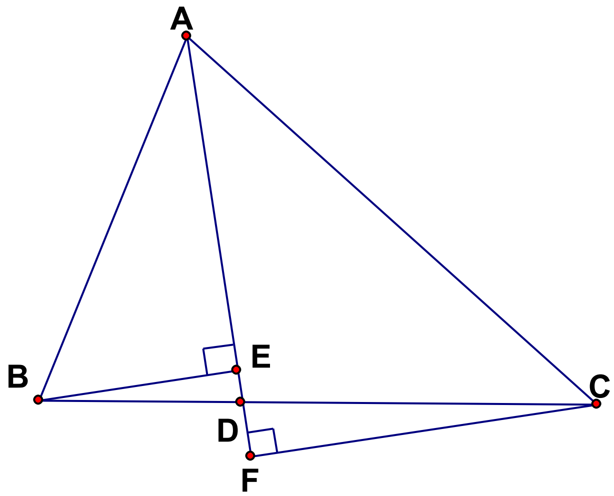
$BC = 9 + 16 = 25$(cm)

Ta có: $AC^2 = HC \cdot BC$ (Hệ thức lượng)

$AC^2 = 16 \cdot 25 = 400 \Rightarrow$ AC = 20(cm) (0.25đ)

Ta có: $Sin ABC = \frac{AC}{BC} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5} \Rightarrow ABC \approx 53^0$ (0.25đ)

Câu 10. Cho tam giác ABC có $B + C = 105^0$ và $AB + AC\sqrt{2} = 2BC$. Tính B và C



Trên tia BC lấy điểm D sao cho $DAB = 30^0$.

Từ GT suy ra:

$A = 180^0 - (B - C) = 75^0.$

Do đó D nằm trên cạnh BC và $DAC = 75^0 - 30^0 = 45^0$.

Kẻ BE $\perp$ AD, CF $\perp$ AD (E;F $\in$ AD)

Ta có AB = 2BE (cạnh đối diện với góc 30^0 trong tam giác vuông) và AC = $\sqrt{2}$ CF (cạnh huyền trong tam giác vuông cân)

Do đó AB + AC$\sqrt{2}$ = 2BC ⇔ 2BE + 2CF = 2BC

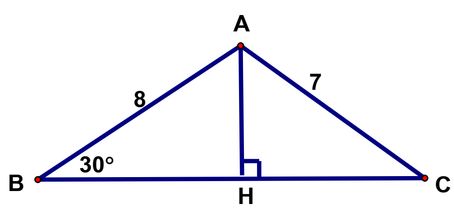
<=> BE + CF =BC ⇔ BE + CF = BD + CD

Mà BE $\leq$ BD và CF $\leq$ CD nên xáy ra đẳng thức trên khi và chỉ khi E,F trùng D. Tức là AD $\perp$ BC.

Từ đó $B = 90^0 - 30^0 = 60^0$; $C = 90^0 - 45^0 = 45^0$

Câu 11. Cho tứ giác ABCD có AC=10cm, BD=12cm và góc giữa AC và BD bằng 30^0. Diện tích tứ giác ABCD là: $30cm^2$ *(Bồi dưỡng HSG toán Hình học 8 Trang 135)*

Câu 12. Cho tam giác ABC có AB = 8cm, AC = 7cm và $ABC = 30^0$, C nhọn. Tính cạnh và các góc còn lại của tam giác.



Kẻ AH $\perp$ BC (H thuộc BC),

Xét ΔABH vuông tại H có AH = AB . sin B = 8 . sin30^0 = 4(cm)

HB = AB . cosB = 8 . cos 30^0 = $4\sqrt{3}$ (cm)

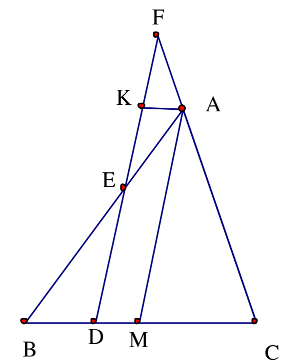
Trong tam giác vuông ACH ta có

+/ HC = $\sqrt{AC^2 - AH^2} = \sqrt{7^2 - 4^2} = \sqrt{33}$ (cm)

Do đó BC = BH + HC = $4\sqrt{3}$ + $\sqrt{33}$ = 12,673cm

+ Sin C = $\frac{4}{7} \Rightarrow C = 35^0$ + có $CAB = 180^0 - 30^0 - 35^0 = 115^0$

Câu 13. Cho tam giác ABC, trung tuyến AM. Qua điểm D thuộc cạnh BC, vẽ đường thẳng song song với AM, cắt AB, AC tại E và F
a) Chứng minh DE + DF không đổi khi D di động trên BC
b) Qua A vẽ đường thẳng song song với BC, cắt FE tại K. Chứng minh rằng K là trung điểm của FE



Giải

a) DE // AM $\Rightarrow \dfrac{DE}{AM} = \dfrac{BD}{BM} \Rightarrow DE = \dfrac{BD}{BM}.AM$ (1)

DF // AM $\Rightarrow \dfrac{DF}{AM} = \dfrac{CD}{CM} \Rightarrow DF = \dfrac{CD}{CM}.AM = \dfrac{CD}{BM}.AM$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra

DE + DF = $\dfrac{BD}{BM}.AM + \dfrac{CD}{BM}.AM = \left(\dfrac{BD}{BM} + \dfrac{CD}{BM}\right).AM = \dfrac{BC}{BM}.AM = 2AM$ không đổi

b) AK // BC suy ra $\Delta FKA \backsim \Delta AMC$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{FK}{AM} = \dfrac{KA}{CM}$ (3)

$\dfrac{EK}{ED} = \dfrac{KA}{BD} \Rightarrow \dfrac{EK}{ED + EK} = \dfrac{KA}{BD + KA} \Rightarrow \dfrac{EK}{KD} = \dfrac{KA}{BD + DM} \Rightarrow \dfrac{EK}{AM} = \dfrac{KA}{BM} \Rightarrow \dfrac{EK}{AM} = \dfrac{KA}{CM}$ (2)

(Vì CM = BM)

Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{FK}{AM} = \dfrac{EK}{AM}$ $\Rightarrow$ FK = EK hay K là trung điểm của FE

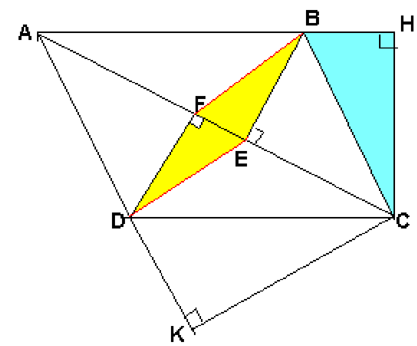
Câu 14. Cho hình bình hành ABCD có đường chéo AC lớn hơn đường chéo BD. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của B và D xuống đường thẳng AC. Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của C xuống đường thẳng AB và AD.

a) Tứ giác BEDF là hình gì ? Hãy chứng minh điều đó ?

b) Chứng minh rằng : CH.CD = CB.CK

c) Chứng minh rằng : AB.AH + AD.AK = AC^2.

HD Giải



a/ BE ⊥ AC và DF⊥ AC ⇒ BE//DF (1)

ΔBEC = ΔDFA (2Δ vuông 2 cạnh huyền bằng nhau và ∠ACB = ∠CAD) ⇒BE=DF

➔ Vậy BEDF là hình bình hành

b/ Trong H.bình hành ABCD, AB//CD và CB//AD ⇒ CK⊥AD thì CK⊥BC

∠HCB = ∠KCD vì 2 góc đều hợp với ∠BCD thành góc vuông ⇒ΔCHB ~ ΔCKD

⇒ CH/CB = CK/CD ⇒ CH.CD = CB.CK (đpcm)

c/ Trong Δvuông KCA có: $AC^2 = AK^2 + CK^2$ (1)

Trong Δvuông HCA có: $AC^2 = AH^2 + CH^2$ (2)

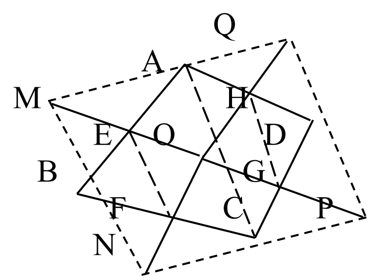
CK là đường cao của ΔCAD ⇒ CK^2 = AD.AK (hình chiếu của 2 cạnh) [*]

CH là đường cao của ΔCAB ⇒ CH^2 = AB.AH (hình chiếu của 2 cạnh) [**]

Thay [*] và [**] vào (1) và (2) rồi cộng (1) với (2) ⇒ ĐPCM

Câu 15. Cho tứ giác ABCD , gọi E, F, G, H lần lượt là trung điểm cả AB, BC, CD và AD . O là điểm nằm trong tứ giác . Gọi M, N, P và Q lần lượt là điểm đối xứng với O qua các điểm E, F, G, H . CMR: Tứ giác MNPQ là hình bình hành .

Hướng dẫn



Ta thấy EF//MN và EF=1/2MN (theo tính chất đường trung bình)

EF//AC và EF=1/2AC (theo tính chất đường trung bình)

⇒ MN//AC và MN=AC (1)

Tương tự GH//PQ và GH=1/2PQ (theo tính chất đường trung bình)

GH//AC và GH=1/2AC (theo tính chất đường trung bình)

⇒ QP=AC và PQ=1/2AC (2)

Từ (1) và (2) suy ra MN//PQ và MN=PQ. Nên tứ giác MNPQ là hình bình hành

Câu 16.Số táo của An, Bình và Chi là như nhau. An cho đi 17 quả, Bình cho đi 19 quả thì lúc này số táo của Chi gấp 5 lần tổng số táo còn lại của An và Bình. Hỏi lúc đầu mỗi bạn có bao nhiêu quả táo?

Bài giải:

Nếu coi số táo của Chi gồm 5 phần thì tổng số táo của An và Bình là 10 phần. Số táo mà An và Bình đã cho đi là : 17 + 19 = 36 (quả)

Vì số táo của Chi gấp 5 lần tổng số táo còn lại của An và Bình nên số táo còn lại của hai bạn gồm 1 phần. Như vậy An và Bình đã cho đi số phần là : 10 - 1 = 9 (phần) Vậy số táo của Chi là : (36 : 9) x 5 = 20 (quả) Vì ba bạn có số táo bằng nhau nên mỗi bạn lúc đầu có 20 quả.

II. Phần tự luận (12,0 điểm)

Câu 1 (3,5 điểm): a.Cho n là số tự nhiên lẻ. Chứng minh $n^3 - n$ chia hết cho 24.

b.Tìm số tự nhiên n để $n^2 + 4n + 2013$ là một số chính phương.

a.Ta có $n^3-n=n(n-1)(n+1)$

Vì $n-1$; n; $n+1$ là ba số tự nhiên liên tiếp nên có một trong ba số đó chia hết cho 3. Do đó $(n^3-n)\vdots 3$ (1)

Vì n là số tự nhiên lẻ nên $n-1$ và $n+1$ là hai số tự nhiên chẵn liên tiếp. Do đó $(n-1)(n+1)\vdots 8 \Rightarrow (n^3-n)\vdots 8$ (2)

Vì 3 và 8 là hai số nguyên tố cùng nhau nên kết hợp với (1), (2) suy ra $(n^3-n)\vdots 24$ (đpcm)

b.+ Giả sử $n^2+4n+2013=m^2,(m\in\mathbb{N})$

+ Suy ra $(n+2)^2+2009=m^2 \Leftrightarrow m^2-(n+2)^2=2009$

$$\Leftrightarrow (m+n+2)(m-n-2)=2009$$

+ Mặt khác $2009=2009.1=287.7=49.41$ và $m+n+2>m-n-2$ nên có các trường hợp sau xảy ra:

- TH1: $\begin{cases} m+n+2=2009 \\ m-n-2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=1005 \\ n=1002 \end{cases}$

- TH1: $\begin{cases} m+n+2=287 \\ m-n-2=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=147 \\ n=138 \end{cases}$

- TH3: $\begin{cases} m+n+2=49 \\ m-n-2=41 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=45 \\ n=2 \end{cases}$

Vậy các số cần tìm là: 1002; 138; 2.

Câu 2 (3,0 điểm): a. Cho $x^2+x=1$. Tính giá trị biểu thức $Q=x^6+2x^5+2x^4+2x^3+2x^2+2x+1$.

Ta có $Q=x^2\left(x^4+2x^3+x^2\right)+\left(x^4+2x^3+x^2\right)+x^2+x+x+1$

$=x^2\left(x^2+x\right)^2+\left(x^2+x\right)^2+x+2$

$=x^2+x+3=4$

Vậy $Q=4$

b.Giải phương trình sau $(x+1)^2(x+2)+(x-1)^2(x-2)=12 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow 2x^3+10x=12$

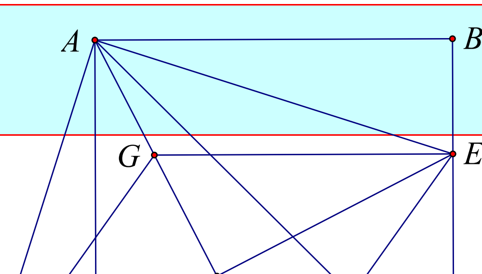
$\Leftrightarrow x^3+5x-6=0 \Leftrightarrow (x^3-1)+(5x-5) \Leftrightarrow (x-1)(x^2+x+6)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=0 \\ x^2+x+6=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{23}{4}=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x=1$ (Vì $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{23}{4}=0$ vô nghiệm)

Vậy phương trình có tập nghiệm S={1}

Câu 3 (4,5 điểm):

Cho hình vuông $ABCD$, Gọi E là 1 điểm bất kỳ trên cạnh BCC (E khác B và C),



Qua A kẻ Ax vuông góc với AE, Ax cắt CD tại F, trung tuyến AI của ΔAEF cắt CD ở K, đường thẳng kẻ qua E, song song với AB cắt AI ở G

a) Chứng minh $AE = AF$ và tứ giác $EGFK$ là hình thoi

b) Chứng minh ΔAKF đồng dạng với ΔCAF và $AF^2 = FK.FC$

c) Khi E thay đổi trên BC, chứng minh chu vi của ΔEKC không đổi.

Lời giải

a) Xét ΔABE vuông tại B và ΔADF vuông tại D có: $AB = AD$

$BAE = CAF \Rightarrow \Delta ABE = \Delta ADF$

$\Rightarrow AE = AF$ vì $AE = AF$ và AI là đường trung tuyến của $\Delta AEF \Rightarrow AI \perp EF$

Hai ΔIEG vuông tại I và ΔIFK vuông tại I có: $IEG = IFK$; $IE = IF$

Nên $\Delta IEG = \Delta IFK \Rightarrow EG = FK$

Tứ giác $EGFK$ có hai cạnh đối EG và FK song song và bằng nhau nên là hình bình hành.

Hình bình hành $EGFK$ có hai đường chéo GK và EF vuông góc nên là hình thoi

b) Xét ΔAKF và ΔCAF có $AFK = CFA$,

$KAF = ACF = 45^0 \Rightarrow \Delta AKF \sim \Delta CAF (g.g) \Rightarrow \dfrac{AF}{FC} = \dfrac{FK}{AF} \Leftrightarrow AF^2 = FK.FC$

c) Theo câu a ta có $\Delta ABE = \Delta ADF \Rightarrow EB = FD$, tứ giác $EGFK$ là hình thoi nên $EK = KF$

Do đó chu vi ΔEKC là: $C_{EKC} = EK + KC + CE = CF + CE = CD + DF + CE = 2CD$ (không đổi).

Câu 4 (1,0 điểm): Cho hai số không âm a và b thoả mãn $a^2 + b^2 = a + b$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$S = \frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1}$$

+ Ta có $a^2 + 1 \geq 2a; b^2 + 1 \geq 2b \Rightarrow a^2 + b^2 + 2 \geq 2a + 2b \Rightarrow a + b \leq 2$ 0.25

+ Chứng minh được với hai số dương x, y thì $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} \geq \dfrac{4}{x+y}$ 0.25

+ Do đó $S = 2 - \left(\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1}\right) \le 2 - \frac{4}{a+1+b+1} \le 1$ 0.25

+ Kết luận: GTLN của S là 1, đạt được khi $a = b = 1$. 0.25

---------------**Hết**----------------