Dãy số và các bài toán về dãy số

Trần Nam Dũng
Trường Đại Học Khoa Học Tự Nhiên Tp HCM

0.1 Giới thiệu

Chọn đề tài về dãy số, chúng tôi đã tự trước mình một nhiệm vụ vô cùng khó khăn, bởi đây là một lĩnh vực rất khó và rất rộng, sử dụng nhiều kiến thức khác nhau của toán học. Hơn thế, trước đó đã có khá nhiều cuốn sách chuyên khảo về đề tài này. Dù vậy, chúng tôi vẫn muốn cố gắng đóng góp một số kinh nghiệm và ghi nhận của mình thu lượm được trong quá trình giảng dạy những năm qua.

Tập tài liệu này không phải là một giáo trình về dãy số, lại càng không phải là một cẩm nang hướng dẫn giải các bài toán dãy số. Tập tài liệu này đúng hơn hết là những cóp nhặt của tác giả về những phương pháp giải các bài toán dãy số cùng với những nhận định đôi khi mang đầy tính chủ quan của tác giả. Vì vậy, hãy coi đây là một tài liệu mở. Hãy tiếp tục triển khai, liên hệ và đúc kết kinh nghiệm, ghi nhận những cái hay và góp ý cho những cái chưa hay, thậm chí chưa chính xác.

Trong tài liệu này, không phải tất cả các vấn đề của dãy số đều được đề cập tới. Ví dụ phần dãy số và bất đẳng thức chỉ được nói đến rất sơ sài, các bài toán dãy số mà thực chất là các bài toán về đồng dư cũng không được xét tới ... Hai mảng lớn mà tập tài liệu này chú ý đến nhất là bài toán tìm số hạng tổng quát của một dãy số và bài toán tìm giới hạn dãy số.

Trong tập tài liệu này, các vấn đề và các bài toán có mức độ khó dễ khác nhau. Có những bài cơ bản, có những bài khó hơn và có những bài rất khó. Vì vậy, cần phải lựa chọn vấn đề với mức độ thích hợp (ví dụ có một số vấn đề và bài toán chỉ đụng phải ở mức kỳ thi chọn đội tuyển hoặc quốc tế).

Viết tập tài liệu này, tác giả đã sử dụng rất nhiều nguồn tài liệu khác nhau, tuy nhiên chỉ có một số bài có ghi nguồn gốc, một số bài không thể xác định được. Tác giả cũng đã sử dụng các bài giảng của các thầy Phan Đức Chính, Nguyễn Văn Mậu, Lê Đình Thịnh, Đặng Hùng Thắng, Nguyễn Minh Đức ... trong bài viết của mình.

Cuối cùng, tập tài liệu này không khỏi có những nhầm lẫn và thiếu sót, tác giả rất mong nhận được sự góp ý của tất c các thầy cô giáo. Và rất mong rằng, với nỗ lực chung của tất cả chúng ta, tập tài liệu sẽ tiếp tục được hoàn thiện và bổ sung.

0.2 Định nghĩa và các định lý cơ bản

Định nghĩa 1. *Dãy số là một hàm số từ* $\mathbb{N}$ *vào một tập hợp số (*$\mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$*) hay một tập con nào đó của các tập hợp trên). Các số hạng của dãy số thường được ký hiệu là* u_n, v_n, x_n, y_n *thay vì* $u(n), v(n), x(n), v(n)$*. Bản thân dãy số được ký hiệu là* $\{x_n\}$*.*

Vì dãy số là một trường hợp đặc biệt của hàm số nên nó cũng có các tính chất của một hàm số.

Định nghĩa 2. *Dãy số $\{x_n\}$ được gọi là dãy tăng (giảm) nếu với mọi n ta có $x_{n+1} \leqslant x_n (x_{n+1} \leqslant x_n)$. Dãy số tăng hoặc dãy số giảm được gọi chung là dãy đn điệu. Dãy số $\{xn\}$ được gọi là bị chặn trên nếu tồn tại số thực M sao cho với mọi n ta có $x_n \leqslant M$. Dãy số $\{x_n\}$ được gọi là bị chặn dưới nếu tồn tại số thực m sao cho với mọi n ta có $x_n \geqslant m$. Một dãy số vừa bị chặn trên, vừa bị chặn dưới được gọi là dãy bị chặn. Dãy số x_n được gọi là tuần hoàn với chu kỳ k nếu $x_{n+k} = x_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Dãy số tuần hoàn với chu kỳ 1 gọi là dãy hằng.*

Định nghĩa 3. *Ta nói dãy số $\{x_n\}$ có giới hạn hữu hạn a khi n dẫn đến vô cùng nếu với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại số tự nhiên N_0 (phụ thuộc vào dãy số x_n và ϵ) sao cho với mọi $n > N_0$ ta có $|x_n - a|$ nhỏ hơn ϵ.*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \epsilon > 0 \exists N_0 \in N : \forall n > N_0 |xn - a| < \epsilon$$

Ta nói dãy số $\{x_n\}$ dần đến vô cùng khi n dần đến vô cùng nếu với mọi số thực dương M lớn tuỳ ý, tồn tại số tự nhiên N_0 (phụ thuộc vào dãy số x_n và M) sao cho với mọi $n > N_0$ ta có $|x_n|$ lớn hơn M.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0 \exists N_0 \in N : \forall n > N_0 \; |x| > M.$$

Dãy số có giới hạn hữu hạn được gọi là dãy hội tụ. Dãy số không có giới hạn hoặc dần đến vô cùng khi n dần đến vô cùng gọi là dãy phân kỳ.

Định lý 1 (Tổng, hiệu, tích, thưng các dãy hội tụ). *Nếu $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ là các dãy hội tụ và có giới hạn tưng ứng là a, b thì các dãy số $\{x_n + y_n\}, \{x_n - y_n\}$, $\{x_n y_n\}$ và $\{x_n/y_n\}$ cũng hộ tụ và có giới hạn tưng ứng là $a + b, a - b, a.b, a/b$. (Trong trường hợp dãy số thưng, ta giả sử y_n và b khác không)*

Định lý 2. *(Chuyển qua giới hạn trong bất đẳng thức) Cho dãy số $\{x_n\}$ có giới hạn hữu hạn l, nếu $\exists N_0 \in \mathbb{N} : \forall n > N_0$ ta có $a \leqslant x_n \leqslant b$ thì $a \leqslant x_n \leqslant b$.*

Định lý 3 (Định lý kẹp). *Cho ba dãy số $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$ trong đó x_n và z_n có cùng giới hạn hữu hạn l, và $N_0 \in N : \forall n > N_0$ ta có $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$. Khi đó y_n cũng có giới hạn là l.*

Định lý 4 (Dãy đn điệu). *Một dãy tăng và bị chặn trên hay một dãy giảm và bị chặn dưới thì hội tụ. Nói ngắn gọn hn hn, một dãy số đn điệu và bị chặn thì hội tụ.*

Định lý 5 (Về dãy các đoạn thẳng lồng nhau). *Cho hai dãy số thực* $\{a_n\}, \{b_n\}$ *sao cho*

a) $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leqslant b_n$*;*

b) $\forall n \imath \mathbb{N}, [a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$*;*

c) $b_n - a_n \to 0$ *khi* $n \to \infty$*.*

Khi đó tồn tại duy nhất số thực l *sao cho* $\cap [a_n, b_n] = l$*.*

Định lý 6 (Bolzano Veierstrass). *Từ một dãy bị chặn luôn có thể trích ra một dãy con hội tụ.*

Định nghĩa 4. *Dãy* $\{x_n\}$ *được gọi là dãy Cauchy nếu* $\forall \epsilon > 0 \exists N_0 \in \mathbb{N}$*:* $\forall m, n > N_0 |x_m - x_n| < \epsilon$*.*

Định nghĩa 5 (Tiêu chuẩn Cauchy). *Dãy số* $\{x_n\}$ *có giới hạn hữu hạn khi và chỉ khi nó là dãy Cauchy.*

Cấp số cộng. Dãy số $\{x_n\}$ được gọi là một cấp số cộng khi và chỉ khi tồn tại d sao cho

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = x_n + d.$$

d được gọi là công sai của cấp số cộng, x_0 là số hạng đầu, x_n là số hạng thứ n. Ta có các công thức cơ bản sau:

$$\begin{aligned} x_n &= x_0 + nd \\ S_n &= x_0 + x_1 + \cdots + x_{n-1} \\ &= nx_0 + n(n-1)d/2 \\ &= n(x_0 + x_{n-1})/2 \end{aligned}$$

Cấp số nhân. Dãy số $\{x_n\}$ được gọi là một cấp số nhân khi và chỉ khi tồn tại q sao cho

$$\forall n \in N, x_{n+1} = qx_n.$$

d được gọi là công bội của cấp số cộng, x_0 là số hạng đầu, x_n là số hạng thứ n. Ta có các công thức cơ bản sau:

$$\begin{aligned} x_n &= q^n x_0 \\ S_n &= x_0 + x_1 + \cdots + x_{n-1} = (q^n - 1)x_0/(q-1) \end{aligned}$$

Nếu $|q| < 1$ thì $\{x_n\}$ được gọi là cấp số nhân lùi vô hạn. Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn được tính theo công thức

$$S = x_0/(1-q)$$

Dãy Fibonacci. Dãy số Fibonacci là dãy số được định nghĩa bởi

$$f_0 = 0, f_1 = 1, \forall n \in \mathbb{N}, f_{n+2} = f_{n+1} + f_n.$$

Dãy số Fibonacci có rất nhiều tính chất thú vị và xuất hiện một cách tự nhiên trong nhiều lĩnh vực khác nhau. Chúng ta có công thức sau đây để tìm số hạng tổng quát của dãy số Fibonacci:

Công thức Binet.

$$f_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}.$$

Nói chung, các dãy số xác định bởi công thức truy hồi $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ (với f_0, f_1 bất kỳ) được gọi là dãy Fibonacci mở rộng.

Dãy Farey. Dãy Farey F_n với mỗi số nguyên dương n là tập hợp các phân số tối giản dạng a/b với $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant n$ và $(a, b) = 1$ xếp theo thứ tự tăng dần.

Ví dụ

$$F_5 = \{0/1, 1/5, 1/4, 1/3, 2/5, 1/2, 3/5, 2/3, 3/4, 4/5, 1/1\}.$$

Ngoại trừ F_1, F_n có số lẻ các phần tử và $1/2$ luôn nằm ở giữa. Gọi p/q, p'/q' và p''/q'' là các số hạng liên tiếp trong dãy Farey thì

$$pq' - qp' = 1, \quad \text{và} p'/q' = (p + p'')/(q + q'').$$

Số các số hạng $N(n)$ trong dãy Farey được tính theo công thức

$$N(n) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \varphi(k) = 1 + \phi(n).$$

0.3 Một số phương pháp giải bài toán về dãy số

Phương pháp giải các bài toán dãy số rất đa dạng như chính yêu cầu của chúng. Đó có thể là một tính chất số học, một tính chất đại số hay một tính chất giải tích. Dưới đây chúng ta sẽ xem xét những phương pháp cơ bản nhất.

Tuy nhiên, có thể đưa ra hai nguyên lý chung để giải các bài toán dãy số là

- Đừng ngại viết ra các số hạng đầu tiên của dãy số
- Đừng ngại tổng quát hóa bài toán

0.3.1 Dãy số thực: một số dạng dãy số đặc biệt

Dãy số dạng $x_{n+1} = f(x_n)$

Đây là dạng dãy số thường gặp nhất trong các bài toán về giới hạn dãy số. Dãy số này sẽ hoàn toàn xác định khi biết f và giá trị ban đầu x_0. Do vậy sự hội tụ của dãy số sẽ phụ thuộc vào tính chất của hàm số $f(x)$ và x_0. Một đặc điểm quan trọng khác của dãy số dạng này là nếu a là giới hạn của dãy số thì a phải là nghiệm của phương trình $x = f(x)$. Chúng ta có một số kết qủa cơ bản như sau:

Định nghĩa 6. *Hàm số $f : D \to D$ được gọi là một hàm số co trên D nếu tồn tại số thực $q, 0 < q < 1$ sao cho $|f(x) - f(y)| \leqslant q|x - y|$ với mọi x, y thuộc D.*

Định lý 7. *Nếu $f(x)$ là một hàm số co trên D thì dãy số $\{x_n\}$ xác định bởi $x_0 = a \in D, x_{n+1} = f(x_n)$ hội tụ. Giới hạn của dãy số là nghiệm duy nhất trên D của phương trình $x = f(x)$.*

Chứng minh.
Với mọi $n > m$ thì áp dụng định nghĩa hàm số co, ta có

$$|x_n - x_m| = |f(x_{n-1}) - f(x_{m-1})| \leqslant q|x_{n-1} - x_{m-1}| \leqslant \cdots \leqslant q_m|x_{n-m} - x_0| \tag{1}$$

Từ đây $|x_n - x_0| \leqslant |x_n - x_{n-1}| + \cdots + |x_1 - x_0| \leqslant (q_{n-1} + \cdots + 1)|x_1 - x_0|$, suy ra $\{x_n\}$ bị chặn. Xét $\epsilon > 0$. Từ (1), do $q < 1$ và $|x_{n-m} - x_0|$ bị chặn nên ta suy ra tồn tại N sao cho $q^N|x_{n-m} - x_0| < \epsilon$. Suy ra $\{x_n\}$ là dãy Cauchy và do đó hội tụ.

Ví dụ. (Việt Nam, 2000) Cho dãy số $\{x_n\}$ xác định như sau

$$x_0 = 0, x_{n+1} = \sqrt{c - \sqrt{c + x_n}}.$$

Tìm tất cả các giá trị của c để với mọi giá trị $x_0 \in (0, c)$, x_n xác định với mọi n và tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim_{n\to\infty} x_n$.

Giải. Để x_1 tồn tại thì ta thì $c - \sqrt{c + x_n} \geqslant 0$ với mọi $x_0 \in (0, c)$ hay $c(c-1) \geqslant x_0$ với mọi $x_0 \in (0, c)$, suy ra $c \geqslant 2$. Với $c \geqslant 2$ thì $0 < x_1 < \sqrt{c}$. Nếu $0 < x_n < \sqrt{c}$ thì $c - \sqrt{c + x_n} > c - 2\sqrt{c}$, suy ra x_{n+1} tồn tại và ta cũng có $0 < x_{n+1} < \sqrt{c}$.

Đặt $f(x) = \sqrt{c - \sqrt{c + x}}$ thì $f'(x) = -\frac{1}{4}\sqrt{x + x}\sqrt{c - \sqrt{c + x}}$.

Với mọi $x \in (0, \sqrt{c})$ ta có $(c + x)(c - \sqrt{c + x}) > c(c - \sqrt{c + \sqrt{c}}) \geqslant 2(2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}) > \frac{1}{4}$. Từ đó suy ra $|f'(x)| \leqslant q < 1$ với mọi $x \in (0, \sqrt{c})$, tức $f(x)$ là hàm số co trên $(0, \sqrt{c})$, suy ra dãy số đã cho hội tụ. Vậy tất cả các giá trị c cần tìm là $c \geqslant 2$.

Một trường hợp nữa cũng có thể xét được sự hội tụ của dãy số $\{x_n\}$ là trường hợp f đơn điệu. Cụ thể là

Nếu f là hàm số tăng trên D thì $\{x_n\}$ sẽ là dãy đơn điệu. Dãy số này tăng hay giảm tuỳ theo vị trí của x_0 so với x_1.

Nếu f là hàm giảm trên D thì các dãy con $\{x_{2p}\}, \{x_{2p+1}\}$ là các dãy đơn điệu (và ngược chiều nhau).

Ví dụ. (Vô địch sinh viên Moskva, 1982) Cho dãy số $\{x_n\}$ xác định bởi $x_0 = 1982, x_{n+1} = 1/(4 - 3x_n)$. Hãy tìm $\lim_{n\to\infty} x_n$

Giải. Tính toán trực tiếp ta thấy $0 < x_2 < 1, x_3 > x_2$. Vì $f(x) = 1/(4-3x)$ là một hàm số tăng từ $[0, 1]$ vào $[0, 1]$ nên từ đây, $\{x_n\}_{n\geq 2}$ là một dãy số tăng và bị chặn trên bởi 1 do đó có giới hạn. Giả sử giới hạn là a thì ta có $a = 1/(4-3a)$ hay $a = 1$ (giá trị $a = 1/3$ loại do dãy tăng).

Câu hỏi: Với những giá trị nào của x_0 thì dãy số xác định với mọi x và có giới hạn? Khi nào thì giới hạn là 1? Khi nào thì giới hạn là $1/3$?

Trong trường hợp f là hàm giảm, ta có thể chứng minh dãy hội tụ bằng cách chứng minh hai dãy con trên cùng hội tụ về một giới hạn.

Tuy nhiên, khó khăn nhất là gặp các hàm số không đơn điệu. Trong trường hợp này, ta phải xét từng khoảng đơn điệu của nó và sự hội tụ của hàm số sẽ tùy thuộc vào giá trị ban đầu.

Ví dụ. Tìm tất c các giá trị của a để dãy số $\{x_n\}$ xác định bởi $x_0 = a, x_{n+1} = 2 - x_n^2$ có giới hạn hữu hạn.

Giải. Hàm số $f(x) = 2 - x^2$ tăng trên $(-\infty, 0)$ và giảm trên $(0, +\infty)$. Phương trình $f(x) = x$ có hai nghiệm là $x = -2$ và $x = 1$. Đó là những dữ kiện quan trọng trong lời giải bài toán này.

Đầu tiên, ta nhận xét rằng nếu $a < -2$ thì do $f : (-\infty, -2) \to (-\infty, -2)$ và là hàm tăng, $x_1 = 2 - a^2 < x_0$ nên dãy số $\{x_n\}$ giảm. Nếu dãy $\{x_n\}$ bị chặn dưới thì nó hội tụ về nghiệm của phương trình $x = 2 - x^2$, điều này mâu thuẫn vì dãy giảm và $x_0 < -2$. Vậy $\{x_n\}$ không bị chặn dưới, tức không có giới hạn hữu hạn. Nếu $a > 2$ thì $x_1 < -2$ và ta cũng suy $\{x_n\}$ không có giới hạn hữu hạn.

Với $a = -2, 1$ thì dãy số có giới hạn. Xét $x_0 \in [-2, 2]$. Ta chứng minh dãy số có giới hạn hữu hạn khi và chỉ khi tồn tại n sao cho $x_n = -2$ hoặc $x_n = 1$. Thật vậy, giả sử x_n có giới hạn hữu hạn là b và $x_n \notin \{-2, 1\}$ với mọi n. Khi đó $b = -2$ hoặc $b = 1$. Giả sử $b = -2$ thì tồn tại N_0 sao cho x_n nằm trong lân cận -2 với mọi $n \geqslant N_0$. Nhưng nếu $x_n = -2 + \epsilon$ thì $x_{n+1} = -2 + 4\epsilon - \epsilon^2 > x_n$, suy ra dãy x_n tăng kể từ N_0 và không thể dần về 2. Nếu $b = 1$ kể từ $n \geqslant N_0$ nào đó x_n thuộc lân cận 1. Xét

$$x_{n+2} - x_n = 2 - (2 - x_n^2)^2 - x_n = (2 - x_n - x_n^2)(x_n^2 - x_n - 1)$$

Tại lân cận 1 thì $x_n^2 - x_n - 1 < 0$. Vì nếu $x_n < 1$ thì $x_{n+1} > 1$ (và ngược lại $x_n > 1$ thì $x_{n+1} < 1$ - chúng ta đang xét trong lân cận điểm 1!) nên có thể giả sử $x_n > 1$. Khi đó $2 - x_n - x_n^2 < 0$ suy ra $x_{n+2} > x_n$. Tiếp tục như vậy, suy ra $1 < x_n < x_{n+2} < \cdots < x_{n+2k} < \cdots$ mâu thuẫn với giả thiết $b = 1$. Vậy điều giả sử là 2, tức là dãy số chỉ có giới hạn khi tồn tại n sao cho $x_n = -2$ hoặc $x_n = 1$.

Sau khi thu được kết qu này, ta sử dụng hàm ngược $f^{-1}(x) = \pm\sqrt{2-x}$ để xây dựng tất c các giá trị a thỏa mãn điều kiện đầu bài.

Trong ví dụ trên, ta đã sử dụng giả thiết tồn tại giới hạn để thu gọn miền D, từ đó một hàm có biến thiên phức tạp trở thành một hàm đơn điệu.

Dãy số dạng $x_{n+1} = x_n \pm (x_n)^\alpha$ và định lý trung bình Cesaro

Đây là trường hợp đặc biệt của dãy số dạng $x_{n+1} = f(x_n)$. Tuy nhiên, với dãy số dạng này vấn đề hội tụ của x_n thường không được đặt ra (vì quá đơn giản và giới hạn chỉ có thể là 0 hoặc ∞). ở đây, ta sẽ có một yêu cầu cao hơn là tìm bậc tiệm cận của x_n, cụ thể là tìm b sao cho $x_n = O(n^\beta)$. Với các dãy số có dạng này, định lý trung bình Cesaro sẽ tỏ ra rất hữu hiệu.

Định lý 8 (Trung bình Cesaro). *Nếu dãy số $\{x_n\}$ có giới hạn hữu hạn là a thì dãy số các trung bình $\{x_1 + x_2 + \cdots + x_n)/n\}$ cũng có giới hạn là a.*

Định lý này có thể phát biểu dưới dạng tương đương như sau:

Nếu $\lim n \to \infty(x_{n+1} - x_n) = a$ thì $\lim_{n\to\infty} x_n/n = a$.

Ta chứng minh định lý ở cách phát biểu 2. Rõ ràng chỉ cần chứng minh cho trường hợp $a = 0$. Vì $\lim_{n\to\infty}(x_{n+1} - x_n) = 0$ nên với mọi $\epsilon > 0$ tồn tại, N_0 sao cho với mọi $n \geqslant N_0$ ta có $|x_{n+1} - x_n| < \epsilon$. Khi đó, với mọi $n > N_0$

$$|x_n/n| \leqslant [|x_{N_0}| + |x_{N_0+1} - x_{N0}| + \cdots + |x_n - x_{n-1}|]/n$$

$$< |x_{N_0}|/n + (n - N_0)\epsilon/n.$$

Giữ cố định N_0, ta có thể tìm được $N_1 > N_0$ sao cho $|x_{N0}|/N_1 < \epsilon$. Khi đó với mọi $n > N_1$ ta sẽ có $|x_n/n| < 2\epsilon$. Vậy $\lim_{n\to\infty} x_n/n = 0$.

Định lý trung bình Cesaro có nhiều ứng dụng quan trọng trong việc tìm giới hạn dãy số và có thể phát biểu cho các trung bình khác như trung bình nhân, trung bình điều hòa, trung bình lũy thừa. Tuy nhiên, ở đây ta chỉ khai thác cách phát biểu 2 của định lý để áp dụng cho các dãy số có dạng $x_{n+1} = x_n \pm (x_n)^\alpha$. Để tìm số β sao cho x_n/n^β có giới hạn hữu hạn, theo định lý trung bình Cesaro, ta chỉ cần tìm g sao cho $x_{n+1}^\gamma - x_n^\gamma$ có giới hạn hữu hạn a. Khi đó, $\lim_{n\to\infty} x_n^\gamma/n = a$, suy ra $\lim x_n/n_1^\gamma = a_1^\gamma$, tức là $\beta = 1/\gamma$.

Ví dụ. Cho dãy số $\{x_n\}$ được xác định bởi $x_0 = 1/2, x_{n+1} = x_n - x_n^2$. Chứng minh rằng $\lim_{n\to\infty} nx_n = 1$.

Giải. Trong bài này, $\beta = -1$ do đó ta sẽ thử với $\gamma = -1$. Dễ dàng chứng minh được $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. Ta có

$$1/x_{n+1} - 1/x_n = (x_n - x_{n+1})/x_{n+1}x_n = x_n^2/(x_n - x_n^2)x_n = 1/(1 - x_n) \to 1.$$

Từ đó áp dụng định lý trung bình Cesaro, suy ra $lim 1/nx_n = 1$, suy ta $\lim nx_n = 1$.

Ví dụ. Cho dãy số $\{x_n\}$ được xác định bởi $x_0 = 1, x_{n+1} = \sin(x_n)$. Chứng minh rằng $\lim \sqrt{n}x_n = \sqrt{3}$.

Giải. Dãy số đã cho không có dạng $x_{n+1} = x_n \pm (x_n)^\alpha$ (?) nhưng kết luận của bài toán gợi cho chúng ta đến định lý trung bình Cesaro. Vì $\beta = -1$ nên ta sẽ thử với $\gamma = -2$. Dễ dàng chứng minh được rằng $\lim x_n = 0$. Xét

$$1/x_n^2 - 1/x_n^2 = [x_n^2 - \sin^2(x_n)]/x_n^2 \sin^2(x_n) \to 1/3$$

(Dùng quy tắc L'Hopitale)

Từ đó, theo định lý trung bình Cesaro $\lim 1/nx_n^2 = 1/3$, suy ra $\lim \lim \sqrt{n}.x_n = \sqrt{3}$.

Như vậy, ta có thể tìm γ nếu biết β. Trong trường hợp không biết β thì ta phải dự đoán.

Ví dụ. (Chọn đội tuyển Việt Nam, 1993) Dãy số $\{a_n\}$ được xác định bởi $a_1 = 1$ và $a_{n+1} = a_n + 1/\sqrt{a_n}$. Hãy tìm tất cả các số thực β để dãy số $(a_n)^\beta/n$ có giới hạn hữu hạn khác 0.

Giải. Trước hết ta chứng minh a_n dần tới vô cùng khi n dần tới vô cùng. Thật vật, ta có $a_{n+1}^2 = a_n^2 + 2\sqrt{a_n} + 1/a_n > a_n^2 + 2$. Suy ra $a_{n+1}^2 > 1 + 2n$ suy ra (đpcm). Trở lại bài toán, xét

$$a_{n+1}^{3/2} - a_n^{3/2} = (a_n + 1/\sqrt{a_n})^{3/2} - a_n^{3/2} = (1 + 1/a_n^{3/2})^{3/2}/(1/a_n^{3/2})$$

Đặt $x = 1/a_n^{3/2}$ thì $x \to 0$ khi $n \to \infty$. Do đó $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}^{3/2} - a_n^{3/2}) = \lim_{x\to 0}(1+x)^{3/2}/x = 3/2$ (Quy tắc L'Hopitale) Từ đó suy ra $\lim a_n^{3/2}/n = 3/2$. Với $\beta > 3/2$ suy ra giới hạn bằng ∞, với $\beta < 3/2$ suy ra giới hạn bằng 0. Vậy $\beta = 3/2$ là giá trị duy nhất tho mãn yêu cầu bài toán.

Câu hỏi

1) Làm sao có thể dự đoán được giảá trị β?

2) α và β có mối quan hệ gì?

0.4 Dãy số nguyên

Dãy số nguyên là một phần quan trọng trong lý thuyết dãy số. Ngoài các vấn đề chung như tìm số hạng tổng quát của dãy số, tìm công thức tính tổng n số hạng đầu tiên ... các bài toán về dãy số nguyên còn quan tâm đến tính chất số học của dãy số như chia hết, đồng dư, nguyên tố, chính phương, nguyên tố cùng nhau ... Các bài toán về dãy số nguyên rất đa dạng. Trong nhiều trường hợp, dãy số chỉ là cái bề ngoài, còn bn chất bài toán là một bài toán số học. Trong các phần dưới đây, chúng ta sẽ ít đề cập đến những bài toán như vậy mà chuyển chúng vào phần bài tập.

0.4.1 Nguyên lý Dirichlet và dãy số nguyên

Nguyên lý Dirichlet là một nguyên lý hết sức đn giản nhưng lại vô cùng hữu hiệu trong các bài toán chứng minh, đặc biệt là chứng minh sự tồn tại của một đối tượng tho mãn một điều kiện nào đó. Sử dụng nguyên lý này, người ta đã chứng minh được nhiều kết qu rất mạnh, ví dụ như định lý Fermat-Euler về tổng hai bình phương, định lý Weil về phân bố đều ... ở đây ta nêu ra hai kết qu liên quan đến dãy số:

Định lý 9 (Weil, về phân bố đều). *Nếu α là số vô tỉ thì dãy $\{n\alpha\}_{n=1}$ phân bố đều trên khoảng $(0,1)$.*

Định lý 10 (Về sự tuần hoàn của các số dưu). *Cho dãy số nguyên $\{x_n\}$ xác định bởi công thức truy hồi $x_{n+k} = a_1x_{n+k-1} + \cdots + a_kx_n$ và k số hạng đầu tiên nguyên. Khi đó, với mọi số nguyên dưng N, dãy số dư của x_n khi chia cho N sẽ tuần hoàn.*

Tiếp theo ta xét một vài ví dụ về việc sử dụng nguyên lý Dirichlet trong các bài toán dãy số.

Ví dụ. Chứng minh rằng nếu $1 \leqslant a_1, a_2, ..., a_{n+1} \leqslant 2n$ thì tồn tại $i < j$ sao cho $a_i \mid a_j$.

Giải. Mỗi số a_i có thể viết dưới dạng $a_i = 2^{s_i}r_i$ với r_i là số lẻ. Các số r_i chỉ có thể nhận n giá trị từ $1, 3, ..., 2n-1$. Vì có $n+1$ số nên theo nguyên lý Dirichlet, tồn tại $i < j$ sao cho $r_i = r_j$ và tương ứng ta có $a_i \mid a_j$.

Ví dụ. (Tạp chi AMM) Xét n số nguyên dương $a_1 < a_2 < \cdots < a_n \leqslant 2n$ sao cho $[a_i, a_j] > 2n$ với mọi $i \neq j$. Chứng minh rằng $a_1 > 2n/3$.

Giải. Nếu $a_1 \leqslant 2n/3$, ta xét $n+1$ số $2a_1, 3a_1, a_2, \ldots, a_n$. Các số này đều không lớn hn $2n$ và không có số nào là bội của số nào. Điều này mâu thuẫn với kết qủa bài toán trên.

Ví dụ. (Canada, 2000) Cho $A = (a_1, a_2, ..., a_n)$ là dãy các số nguyên thuộc đoạn $[-1000, 1000]$. Giả sử tổng các số hạng của A bằng 1. Chứng minh rằng tồn tại một dãy con (chứa ít nhất 1 phần tử) của A có tổng bằng 0.

Giải. Ta có thể giả sử trong A không có phần tử nào bằng 0, vì nếu ngược lại thì bài toán hiển nhiên. Ta sắp xếp dãy A thành dãy $B = (b_1, ..., b_{2000})$ bằng cách chọn dần từ các số hạng của dãy A theo quy tắc sau: $b_1 > 0, b_2 < 0$. Với mỗi $i \geqslant 3$ chọn b_i là số có dấu ngược với dấu của tổng $s_{i-1} = b_1 + \cdots + b_{i-1}$ (vì sao luôn thực hiện được?). Bằng cách xây dựng như thế, ta được 2000 số $s_1, s_2, ..., s_{2000}$ nằm trong đoạn $[-999, 1000]$. Nếu trong số s_i có một số bằng 0 thì bài toán đúng. Trong trường hợp ngược lại, theo nguyên lý Dirichlet tồn tại $i < j$ sao cho $s_i = s_j$. Khi đó $b_{i+1} + \cdots + b_j = 0$.

0.4.2 Hệ đếm cơ số và dãy số nguyên

Hệ đếm cơ số có thể dùng để xây dựng nhiều dãy số có tính chất rất thú vị. Nhìn trên phương diện của một cơ số khác, có thể rất khó nhận ra quy luật, nhưng nếu chọn đúng cơ số thì bài toán trở nên vô cùng đơn giản.

Xin nhắc lại là với b là một số nguyên dương lớn hơn hay bằng 2 thì mọi số nguyên dưng N đều có thể biểu diễn một cách duy nhất dưới dạng

$$N = a_1...a_k(b) = a_1 b_{k-1} + \cdots + a_k \text{ với } 1 \leqslant a_1 \leqslant b-1,\ 0 \leqslant a_2, \ldots, ak \leqslant b-1.$$

Đó là định nghĩa hệ đếm cơ số dạng cơ bản nhất. Tuy nhiên, có thể lấy một dãy số nguyên bất kỳ (có trị tuyệt đối tăng nghiêm ngặt) làm hệ đếm cơ số ví dụ hệ đếm cơ số (-2), hệ đếm cơ số Fibonacci $(3 = 4 - 2 + 1, 17 = 13 + 3 + 1...)$

Các hệ đếm thường sử dụng nhất là hệ đếm c số 2 và c số 3. Dưới đây ta xét một vài vì dụ:

Ví dụ. (IMO 1983) Chứng minh hoặc phủ định mệnh đề sau: Từ tập hợp 105 số nguyên dương đầu tiên luôn có thể chọn ra một tập con gồm 1983 số sao cho không có ba số nào lập thành một cấp số cộng.

Giải. Ta chứng minh mệnh đề tổng quát: Từ $3n$ số tự nhiên đầu tiên luôn có thể chọn ra $2n$ số sao cho không có ba số nào lập thành một cấp số cộng. Thật vậy, xét trong hệ đếm cơ số 3 tập hợp tất cả các số có $\leqslant n$ chữ số. Chọn các số mà trong biểu diễn tam phân của nó chỉ chứa chữ số 2 và chữ số 0. Khi đó có $2n$ số như vậy và không có ba số nào trong chúng lập thành một cấp số cộng.

Ví dụ. (Singapore 1995) Cho dãy số $\{f_n\}$ xác định bởi $f_1 = 1, f_{2n} = f_n$ và $f_{2n+1} = f_{2n+1}$.

(i) Tính $M = \max\{f_1, ..., f_{1994}\}$

(ii) Tìm tất c các giảá trị n, $1 \leqslant n \leqslant 1994$ sao cho $f_n = M$.

Giải. Kinh nghiệm một chút ta thấy ngay f_n chính là tổng các chữ số của n trong hệ đếm nhị phân. Từ đây do $1994 < 2048 = 211$ suy ra $M = 10$.

Ví dụ. Dãy số $\{f_n\}$ được xác định bởi $f_1 = 1, f_{2n} = 3f_n, f_{2n+1} = f_{2n+1}$. Hãy tính f_{100}.

Giải. f_n được xác định như sau: Xét biểu diễn nhị phân của n rồi tính giá trị của số nhị phân này trong hệ tam phân. Vì $100 = 26 + 25 + 22$ nên $f_{100} = 36 + 35 + 32 = 981$.

Ví dụ. Dãy số $\{a_n\}$ được xác định bởi $0 \leqslant a_0 < 1, a_n = 2a_{n-1}$

nếu $2a_{n-1} < 1$ và $a_n = 2a_{n-1} - 1$ nếu $2a_{n-1} \geqslant 1$. Hỏi có bao nhiêu giá trị a_0 để $a_5 = a_0$.

Giải. Phân tích: Khi tính a_n theo a_{n-1} ta có thể lựa chọn một trong hai công thức. Tất nhiên, với a_0 đã chọn rồi thì tất cả các bước tiếp theo đều xác định một cách duy nhất. Tuy nhiên, ta có thể chọn a_0 như thế nào đó để sau đó các công thức tính theo đúng kịch bản đã cho. Có $2^5 = 32$ kịch bản như vậy. Ví dụ với kịch bản $(1, 1, 2, 1, 2)$ ta có $x_1 = 2x_0,\ x_2 = 2x_1 = 4x_0,\ x_3 = 2x_2 - 1 = 8x_0 - 1,\ x_4 = 2x_3 = 16x_0 - 2,\ x_5 = 2x_4 - 1 = 32x_0 - 3$.

Giải phương trình $x_0 = x_5$ ta được $x_0 = 3/31$. Tất nhiên, để có được một lời giải hoàn chỉnh, ta cần phải lập luận chặt chẽ để thấy rằng các x_0 thu được là khác nhau và với mỗi x_0 thu được, dãy số sẽ "đi" đúng như kịch bản đã định. Tuy nhiên, phân tích này gợi chúng ta hướng đến hệ nhị phân. Và ta có lời giải đẹp mắt sau:

Nếu $a_0 = 0, d_1d_2d_3...$ là biểu diễn nhị phân của a_0 thì $a_1 = 0, d_2d_3d_4....$ Thật vậy, nếu $2a_0 < 1$ thì $d_1 = 0$ và $a_1 = 2a_0 = 0, d_2d_3d_4...$ còn nếu $2a_0 \geqslant 1$ thì $d_1 = 1$ và $a_1 = 2a_0 - 1 = 0, d_2d_3d_4...$

Hoàn toàn tương tự, $a2 = 0, d_3d_4d_5..., ..., a_5 = 0, d_6d_7d_8...$ Như vậy $a_5 = a_0$ khi và chỉ khi a_0 là phân số nhị phân tuần hoàn chu kỳ 5. Có $2^5 = 32$ chu kỳ tuần hoàn như vậy, trong đó chu kỳ 11111 cho chúng ta $a_0 = 1$ (loại). Vậy tất c có 31 giá trị a_0 thỏa mãn yêu cầu đề bài. Đó là $0, (00000), 0, (00001), ..., (0, 11110)$. Tính sang hệ thập phân đó là các giá trị $0, 1/31, 2/31, ..., 30/31$.

0.4.3 Số phức và dãy số nguyên

Số phức có những ứng dụng rất quan trọng trong toán học nói chung và trong lý thuyết dãy số nói chung. Nhờ số phức, chúng ta có thể thấy được mối quan hệ giữa hàm lượng giác và hàm mũ. Nhờ số phức, mọi đa thức bậc n đều có đủ n nghiệm và vì vậy định lý Viét mới phát huy được tác dụng. Dưới đây ta xét một số ví dụ về ứng dụng của số phức trong các bài toán tính tổng và dãy truy hồi.

Ví dụ. Với số nguyên dương n, hãy tính

$$A(n) = C_n^0 + C_n^3 + \cdots + C_n^{3[n/3]}.$$

Giải. Có thể đặt $B(n) = C_n^1 + C_n^4 + \cdots + C(n) = C_n^2 + C_n^5 + \cdots$ rồi sử dụng các công thức

$$A(n) + B(n) = B(n+1),\ B(n) + C(n) = C(n+1),\ \ C(n) + A(n) = A(n+1)$$

để tìm công thức tính $A(n)$. Tuy nhiên dựa theo cách tính $C_n^0 + C_n^2 + \cdots + C_n^2[n/2]$ bằng cách thay $x = 1, y = 1$ và $x = 1, y = -1$ vào công thức nhị thức Newton, ta có cách giải khác khá đẹp như sau: Gọi ϵ là số thỏa mãn phương trình $\epsilon^2 + \epsilon + 1 = 0$. Do $\epsilon^3 = 1$ nên ta có

$$\begin{aligned}(1+1)^n &= A(n) + B(n) + C(n)\\ (1+\epsilon)^n &= A(n) + \epsilon B(n) + \epsilon 2C(n)\\ (1+\epsilon^2)^n &= A(n) + \epsilon 2B(n) + \epsilon C(n)\end{aligned}$$

Từ đây suy ra $3A(n) = 2n + (1+\epsilon)n + (1+\epsilon^2)n$. Từ đây, dùng công thức Moivre ta tìm được

$$A(n) = [2n + 2\cos(np/3)]/3.$$

Ví dụ. Tính tổng $S_n(x) = C_n^0 + C_n^1 \cos x + \cdots + C_n^n \cos nx$.

Giải. Đặt $Tn(x) = 0 + C_n^1 \sin x + \cdots + C_n^n \sin nx$ thì $S_n(x) + iT_n(x) = C_n^0 + C_n^1(\cos x + i\sin x) + \cdots + C_n^n(\cos x + i\sin x)n = (1 + \cos x + i\sin x)n = 2[\cos(x/2)[\cos(x/2) + i\sin(x/2)]]n = 2n\cos n(x/2)[\cos(nx/2) + i\sin(nx/2)]$.

Từ đó suy ra $S_n(x) = 2n\cos n(x/2)\cos(nx/2)$.

Ví dụ. (AMM) Cho dãy số $\{u_n\}$ xác định bởi $u_0 = 3, u_1 = 0, u_2 = 2, u_{n+3} = u_{n+1} + u_n$. Chứng minh rằng u^p luôn chia hết cho p nếu p là số nguyên tố.

Giải. Phương trình đặc trưng của dãy số có dạng $x^3 - x - 1 = 0$. Nếu phương trình đặc trưng này có nghiệm nguyên thì ta có thể sử dụng định lý nhỏ Fermat để chứng minh kết luận của bài toán. Tuy nhiên, các nghiệm này không nguyên, thậm chí phương trình chỉ có 1 nghiệm thực. Ta phải cầu cứu đến sự trợ giáup của số phức.

Gọi u, v, w là ba nghiệm của phương trình thì $u+v+w = 0, uv+vw+wu = -1$, suy ra $u^2 + v^2 + w^2 = (u+v+w)^2 - 2(uv+vw+wu) = 2$. Từ đó ta có thể kết luận

$$u_n = u_n + v_n + w_n$$

Với p là số nguyên tố lẻ thì $u^p = -(v+w)^p = -v^p - w^p - \sum_{i=1}^{p-1} C_p^i v^i w^{p-i}$.

Tương tự

$v^p = -w^p - u^p - \sum i = 1^{p-1} C_p^i w^i u^{p-i}$, $w^p = -u^p - v^p - \sum_{i=1}^{p-1} C_p^i u^i v^{p-i}$.

Từ đó suy ra $3(u^p + v^p + w^p) = -\sum_{i=1}^{p-1} C_p^i (v^i w^{p-i} + w^i u^{p-i} + u^i v^{p-i})$

Bây giờ, chú ý rằng C_p^i chia hết cho p với $1 \leqslant i \leqslant p - 1^i$ (vì p là số nguyên tố) và $(v^i w^{p-i} + w^i u^{p-i} + u^i v^{p-i})$ là số nguyên (biểu thức đối xứng đối với u, v, w) nên vế phải là một số nguyên chia hết cho p. Vậy với p nguyên tố, $p > 3$ bài toán đã được chứng minh. Cuối cùng chú ý $u_2 = 2, u_3 = 3$ ta có bài toán đúng với mọi p.

0.4.4 Dãy số dạng $[n\alpha]$

Dãy số dạng $x_n = [n\alpha]$ có nhiều tính chất số học thú vị. Nếu a ¿ 1 thì $\{[n_\alpha]\}_{n\geq 1}$ là dãy các số nguyên dưng phân biệt, có sự biến thiên gần giảống một cấp số cộng nhưng lại không phải là một cấp số cộng. Dãy số này đặc biệt thú vị khi a là số vô tỉ bậc hai. Ta có một kết qủa quen thuộc sau đây

Định lý 11. *Nếu a, b là các số vô tỷ dưng tho mãn điều kiện $1/a + 1/b = 1$ thì hai dãy số $x_n = [n\alpha], y_n = [n\beta], n = 1, 2, 3, ...$ lập thành một phân hoạch của tập hợp các số nguyên dương.*

Chứng minh. Xét hai dãy số $\alpha, 2\alpha, 3\alpha, ...$và $\beta, 2\beta, 3\beta, ...$ Không một số hạng nào trong các số hạng trên là số nguyên. Với mỗi số nguyên dương N, có $[N/\alpha]$ số hạng của dãy thứ nhất nằm bên trái N và $[N/\beta]$ số hạng của dãy thứ hai. Nhưng $N/\alpha + N/\beta = N$, vì α, β là các số vô tỉ, phần lẻ của các số N/α và N/β là các số dương có tổng bằng 1 (do đẳng thức trên). Suy ra có $[N/\alpha] + [N/\beta] = N - 1$ số hạng của cả hai dãy nằm bên trái N. Vì bên trái $N + 1$ có N số hạng của cả hai dãy nên giữa N và $N + 1$ có đúng một số hạng của một trong hai dãy, từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Câu hỏi: Có thể phát biểu và chứng minh định lý đảo như thế nào?

Hai dãy số trên vét hết tập hợp các số nguyên dưng. Điều này cho chúng ta một hướng suy nghĩ: nếu hai dãy số vét hết tập hợp các số nguyên dưng thì có kh năng chúng sẽ có dạng trên. Và nhiều bài toán đã được xây dựng theo hướng này. Chúng ta xét một ví dụ

Ví dụ. (AMM) Giả sử $\{f_n\}$ và $\{g_n\}$ là hai dãy số nguyên dưng được xác định như sau

1) $f_1 = 1$

2) $g_n = na - 1 - f_n$, trong đó a là số nguyên lớn hơn 4,

3) f_{n+1} là số nguyên dương nhỏ nhất khác các số $f_1, f_2, ..., f_n, g_1, g_2, ..., g_n$.

Chứng minh rông tồn tại các hằng số α, β sao cho $f_n = [n\alpha], g_n = [n\beta]$ với mọi $n = 1, 2, 3, ...$

Giải. Theo cách xây dựng $\{f_n\}$ và $\{g_n\}$ lập thành một phân hoạch của N^*. Giả sử ta đã tìm được a, b thỏa mãn điều kiện đầu bài, khi đó, ta phải có $1/\alpha + 1/\beta = 1$. Ngoài ra, khi n đủ lớn thì $na - 1 = f_n + g_n \sim n\alpha + n\beta$, suy ra $\alpha + \beta = a$. Vậy α, β phải là nghiệm của phương trình $x^2 - ax + a = 0$.

Xét phương trình $x^2 - ax + a = 0$ có hai nghiệm $\alpha < \beta$. Vì $a > 4$, α, β là các số vô tỉ. Dãy số $\{f_n\}$ và $\{g_n\}$ được xác định một cách duy nhất, do đó để chứng minh khẳng định của bài toán, ta chỉ cần chứng minh $\{[n\alpha]\}$ và $\{[n\beta]\}$ thỏa mãn các điều kiện 1), 2), 3).

Rõ ràng $[a] = 1, [n\beta] = [n(a - \alpha)] = n\alpha + [-n\alpha)] = na - [n\alpha] - 1$ (do $n\alpha$ vô tỉ).

Giả sử $[n\alpha] = [m\beta] = k$, đặt $n\alpha = k + r$, $m\beta = k + s$ với $0 < r, s < 1$ thì

$$n + m = k(1/\alpha + 1/\beta) + r/\alpha + s/\beta = k + r/\alpha + s/\beta,$$

điều này không thể xảy ra vì $0 < r/\alpha + s/\beta < 1$. Như vậy với mọi m, n ta có $[n\alpha] \neq [m\beta]$.

Tiếp theo,

$$[(n+1)\alpha] \geqslant [n\alpha] + 1, \ \ [(n+1)\beta] \geqslant [n\beta] + 2 > [n\alpha] + 1.$$

Cuối cùng giả sử k là một số nguyên bất kỳ và $n = [(k+1)/\alpha]$. Nếu $n > k/\alpha$ thì $k < n\alpha < \alpha(k+1)/\alpha = k+1$ và $[n\alpha] = k$. Nếu $n < k/\alpha$ thì $(k-n)\beta > k\beta - \beta k/\alpha = \beta k(1 - 1/\alpha) = k$, $(k-n)\beta < k\beta - \beta((k+1)/\alpha - 1) = k+1$, suy ra $[(k-n)\beta] = k$.

Từ các nhận xét trên ta suy ra mỗi số nguyên dương k có mặt trong dãy số đúng một lần và hai dãy số $\{[n\alpha]\}$ và $\{[n\beta]\}$ thỏa mãn điều kiện 3) (đpcm)

Ghi chú: Trong lời giải trên, ta đã không dùng đến kết qu của định lý ở trên và đó cũng chính là một cách chứng minh khác cho định lý.

Các bài toán về dãy số dạng $\{[n\alpha]\}$ thường liên quan đến phân hoạch và các dãy số gần tuyến tính ($x_{m+n} \sim x_m + x_n$). Xin xem thêm một số ví dụ trong phần bài tập.

0.4.5 Dãy số và phương trình

Dãy số có mối quan hệ rất chặt chẽ với phương trình. Điều này có thể thấy rất rõ qua hai ví dụ cơ bản: phương trình sai phân tuyến tính được giải bằng việc xét nghiệm của phương trình đặc trưng, giới hạn của dãy số cũng thường được giải ra từ một phương trình. Về vấn đề này, xin đọc thêm ở các mục tương ứng trong bài này. Đây là một trong những nội dung quan trọng nhất trong phần dãy số.

0.4.6 Một vài thủ thuật khác

Sắp xếp lại thứ tự

Sắp xếp lại thứ tự là một thủ thuật thường được áp dụng trong các bài toán liên quan đến bất đẳng thức trong dãy số. Việc sắp xếp lại thứ tự các số trên đường thẳng dẫn đến các tính chất đặc biệt mà một dãy số bất kỳ không có, chẳng hạn nếu $a < b < c$ thì $|c - a| = |c - b| + |b - a|$. Cũng như các nguyên lý cơ bản khác, nguyên lý đn giản này tỏ ra khá hữu hiệu trong nhiều trường hợp.

Ví dụ. (Việt Nam 1998) Tồn tại hay không một dãy số thực $\{x_n\}$ thỏa mãn điều kiện

1) $|x_n| \leqslant 0,666$ với mọi $n = 1, 2, 3, ...$

2) $|x_m - x_n| \geqslant 1/n(n+1) + 1/m(m+1)$ với mọi số nguyên dương $m \not{n}$.

Giải. Giả sử tồn tại dãy số như vậy. Với mỗi số nguyên dương N, ta sắp xếp lại các số $x_1, ..., x_N$ theo thứ tự tăng dần

$$x_{i1} \leqslant x_{i2} \leqslant \cdots \leqslant x_{iN}$$

Khi đó $|x_{iN} - x_{i1}| = |x_{iN} - x_{iN-1}| + \cdots + |x_{i2} - x_{i1}| 1/iN(iN+1) + 1/i_{N-1}(i_{N-1}+1) + \cdots + 1/i_2(i_2+1) + 1/i_1(i_1+1) = 2\sum 1/i_k(i_k+1) - 1/i_N(i_N+1) - 1/i_1(i_1+1) = A(N)$.

Vì $i_1, i_2, ..., i_N$ chỉ là một hoán vị của $1, 2, ..., N$ nên ta có

$$\begin{aligned} A(N) &= 2\sum 1/k(k+1) - 1/i_N(i_N+1) - 1/i_1(i_1+1) \\ &= 2(1 - 1/(N+1)) - 1/i_N(i_N+1) - 1/i_1(i_1+1) \\ &\geqslant 2(1 - 1/(N+1)) - 1/1.2 - 1/2.3 = 4/3 - 2/(N+1) \end{aligned}$$

Bây giờ chú ý rằng $|x_{iN} - x_{i1}| \leqslant 2x0,666 < 4/3$. Chọn N đủ lớn sao cho $4/3 - 2/(N+1) > 2x0,666$, ta suy ra mâu thuẫn. Vậy không tồn tại dãy số thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Ví dụ. (Liên Xô 1986) Giả sử $a_1, a_2, ..., a_n$ là các số dương tuỳ ý. Chứng minh bất đẳng thức

$$1/a_1 + 2/(a_1 + a_2) + \cdots + n/(a_1 + \cdots + a_n) < 4(1/a_1 + 1/a_2 + \cdots + 1/a_n)$$

Giải. Vế phải không thay đổi nếu ta thay đổi thứ tự của a_i do đó ta chỉ cần (và phải) chứng minh bất đẳng thức đúng cho trường hợp tổng bên trái lớn nhất. Điều này xảy ra khi a_i được sắp theo thứ tự tăng dần. Thật vậy, giả sử $0 < b_1 \leqslant b_2 \leqslant ... \leqslant b_n$ là các số a_i được sắp xếp lại. Khi đó rõ ràng với mọi k ta có $b_1 + \cdots + b_k \leqslant a_1 + \cdots + a_k$ và

$$1/a_1 + 2/(a_1 + a_2) + \cdots + n/(a_1 + \cdots + a_n)$$

$$\leqslant 1/b_1 + 2/(b_1 + b_2) + \cdots + n/(b_1 + \cdots + b_n)$$

Với mọi k, ghép các số hạng của tổng bên phải thành cặp ta có đánh giá sau

$$(2k-1)/(b_1 + \cdots + b_{2k-1}) + 2k/(b_1 + \cdots + b_{2k-1})$$

$$< (2k-1)/kb_k + 2k/(k+1)b_k < 4/b_k$$

Từ đó suy ra bất đẳng thức cần chứng minh.

Phép thế lượng giác

Nhiều dãy số đại số với công thức phức tạp có thể trở thành các dãy số đơn giản nhờ phép thế lượng giác. Thủ thuật này đặc biệt hiệu quan trong các bài toán chứng minh một dãy số là tuần hoàn hay không tuần hoàn. Để áp dụng được thủ thuat này, điều cần thiết là biết các công thức lượng giác và một chút nhạy cảm toán học.

Ví dụ. (Việt Nam, 1990). Cho $\{x_n\}$ là dãy số thỏa mãn điều kiện $|x_1| < 1$, $x_{n+1} = (-x_n + \sqrt{3 - 3x_n^2})/2$ $(n \geqslant 1)$

a) x_1 phải thỏa mãn điều kiện gì để tất cả các số hạng của dãy số đều dương?

b) Dãy số trên có tuần hoàn không?

Điều kiện $|x_1| < 1$ và dạng của hàm số gợi ngay cho chúng ta phép đặt $x_1 = \cos\varphi$ với φ thuộc $(0, \pi)$ khi đó $x_2 = (-\cos\varphi + 3\sin\varphi)/2 = cos(\varphi - 2\pi/3)$. Từ đó suy ra $x_{n+1} = \cos(\varphi - 2n\pi/3)$. Từ đây có thể dễ dàng trả lời các câu hỏi của đề bài.

Ví dụ. (KVANT) Cho dãy số u_n xác định bởi: $u_1 = 2, u_{n+1} = (2 + u_n)/(1 - 2u_n)$.

a) Chứng minh rằng $u_n \neq 0$ với mọi n nguyên dương

b) Chứng minh dãy không tuần hoàn

Giải. Đặt $\varphi = \arctan 2$, $\tan = 2$. Khi đó nếu $u_n = \tan x$ thì $u_{n+1} = \tan(\varphi + x)$, suy ra $u_n = \tan(n\varphi)$. Sử dụng công thức $\tan 2x = 2\tan x/(1 - \tan^2 x)$ suy ra $u_n^2 = 2u_n/(1 - u_n^2)$. Từ đây nếu $u_n^2 = 0$ thì $u_n = 0$. Nếu tồn tại n sao cho $u_n = 0$ thì sử dụng tính chất này, ta suy ra tồn tại s sao cho $u_{2s} + 1 = 0$ hay $(2 + u_{2s})/(1 - 2u_{2s}) = 0$ hay $u_{2s} = -2$, $2u_s/(1 - u_{s2}) = -2$. Suy ra u_s vô tỉ. Điều này vô lý. Phần b) là hệ quả của câu a).

Ví dụ. Tìm công thức tổng quát tính số hạng của dãy số $x_0 = a, x_{n+1} = 2 - x_n^2$.

Giải. Nếu $|a| \leqslant 2$ thì đặt $a = -2\cos\varphi$, ta được $x_n = -2\cos(2n\varphi)$. Nếu $|a| > 2$, đặt $a = -(a + 1/a)$ thì ta được $x_n = -(\alpha^{2^n} + 1/\alpha^{2^n})$.

Ví dụ. (Thổ Nhĩ Kỳ 1997) Hai dãy $\{a_n\}, \{b_n\}$ được xác định bởi $a_1 = \alpha, b_1 = \beta, a_{n+1} = \alpha a_n - \beta b_n$, $b_{n+1} = \beta a_n + \alpha b_n$. Có bao nhiêu cặp (a, b) thỏa mãn $a_{1997} = b_1$, $b_{1997} = a_1$?

Giải. Ta có $a_{n+1}^2 + b_{n+1}^2 = (a^2 + b^2)(a_n^2 + b_n^2)$ nên yêu cầu bài toán xảy ra chỉ khi $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. Đặt $a = \cos\varphi, \beta = \sin\varphi$ thì $a_n = \cos(n\varphi), b_n = \sin(n\varphi)$. Từ đó suy ra lời giải của bài toán.

Phép thế lượng giác thường được áp dụng trong các bài toán có công thức ôgợi nhớô đến các công thức lượng giảác hoặc có kết qu giảống tính chất hàm lượng giảác (chẳng hạn tính tuần hoàn hoặc tính bị chặn). Tuy nhiên, phép thế lượng giác có thể xuất hiện ở những trường hợp mà tưởng chừng không dính dáng gì đến với lượng giác.

Ví dụ. Với mỗi số tự nhiên $n > 1$ và n số thực dương $x_1, x_2, ..., x_n$ đặt $f = \max\{x_1, 1/x_1 + x_2, ..., 1/x_{n-1} + x_n, 1/x_n\}$. Hãy tìm $\min f$.

Giải. Tưởng chừng như bài toán này không liên quan gì đến lượng giác. Và hơn thế, cũng chẳng liên quan gì đến dãy số. Tuy nhiên, điều kiện đạt giá trị nhỏ nhất của f

sẽ tạo ra một dãy số! Ta chứng minh rằng nếu $x_1, x_2, ..., x_n$ là n số thực mà tại đó f đạt min thì ta phải có $x_1 = 1/x_1 + x_2 = ... = 1/x_{n-1} + x_n = 1/x_n$. Và bài toán dãy số đã xuất hiện: Với mỗi số nguyên dưng n, xét dãy số $\{x_k\}_{k=1}^n$ xác định bởi $x_1 = a$ và $x_k = x_1 - 1/x_{k-1}$, với $k = 2, ..., n$. Hãy tìm a sao cho $1/x_n = x_1$. Và bài toán cuối cùng này có thể giải như sau. Đặt $x_1 = 2\cos\varphi$ thì $x_2 = 2\cos\varphi - 1/2\cos\varphi = (4\cos^2\varphi - 1)/2\cos\varphi = \sin^3\varphi/\sin^2\varphi, x_3 = 2\cos\varphi - \sin 2\varphi/\sin 3\varphi = \sin 4\varphi/\sin 3\varphi$ ... Tiếp tục như vậy suy ra $x_n = \sin(n+1)\varphi/\sin n\varphi$. Từ đó đẳng thức $1/x_n = x_1 \sin n\varphi/\sin(n+1)\varphi = 2\cos\varphi sin(n+2)\varphi = 0$. Đến đây, từ điều kiện x_k dương ta suy ra $\varphi = \pi/(n+2)$ và $\min f = 2\cos(\pi/(n+2))$.

Câu hỏi: 1) Tại sao có thể khẳng định khi f đạt min thì các giá trị trên đây phải bằng nhau?

2) Tại sao có thể đặt $x_1 = 2\cos\varphi$?

3) Làm sao có thể dự đoán ra cách đặt trên?

4) Phép giải trên còn chưa chặt chẽ ở điểm nào?

5) Mọi số thực x đều có thể biểu diễn dưới dạng $x = 2\cos\varphi$ hoặc, $x = a + 1/a$. Điều đó có ý nghĩa gì?

Dãy số phụ

Khi khảo sát sự hội tụ của một dãy số ta thường định lý về dãy đn điệu và bị chặn. Nếu dãy không đơn điệu thì có thể thử xét dãy với chỉ số chẵn và dãy với chỉ số lẻ. Tuy nhiên, có những dãy số có "hành vi" phức tạp hơn nhiều. Chúng tăng giảm rất bất thường. Trong một số trường hợp như thế, ta có thể xây dựng một (hoặc 2) dãy số phụ đn điệu, chứng minh các dãy số phụ có giới hạn và sau đó chứng minh dãy số ban đầu có cùng giới hạn. Tất nhiên, dãy số phụ phải được xây dựng từ dãy số chính.

Ví dụ. Dãy số $\{a_n\}$ được xác định bởi $a_1 > 0, a_2 > 0$ và $a_{n+1} = 2/(a_n + a_{n-1})$. Chứng minh rằng dãy số $\{a_n\}$ hội tụ và tìm giới hạn của dãy số đó.

Giải. Xét hai dãy

$$M_n = \max\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}\}$$
$$m_n = \min\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}\}$$

Ta chứng minh M_n là dãy số giảm và m_n là dãy số tăng. Thật vậy, ta sẽ chứng minh $a_{n+4} \leqslant \max\{a_{n+1}, a_{n+3}\}$. Từ đây suy ra $M_{n+1} = a_{n+1}$ hoặc a_{n+2} hoặc

a_{n+3} và rõ ràng khi đó $M_n = \max\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}\} \geqslant M_{n+1}$. Thật vật nếu $a_{n+4} \geqslant a_{n+3}$ thì $2/(a_{n+3} + a_{n+2}) \geqslant a_{n+3}$ suy ra $2 \geqslant (a_{n+3} + a_{n+2})a_{n+3}$. Khi đó $a_{n+1} = 2/a_{n+3} - a_{n+2} = 2/a_{n+3} - 2/(a_{n+2} + a_{n+3}) - a_{n+2} + a_{n+4} = 2a_{n+2}/(a_{n+3} + a_{n+2})a_{n+3} - a_{n+2} + a_{n+4} \geqslant a_{n+4}$ suy ra đpcm. Vậy ta đã chứng minh được M_n giảm. Tưng tự m_n tăng. Hai dãy số này đều bị chặn nên hội tụ. Cuối cùng, ta chỉ còn cần chứng minh hai giới hạn bằng nhau.

Ví dụ. Dãy số $\{a_n\}$ được xác định bởi $a_1 > 0, a_2 > 0$ và $a_{n+1} = \sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n-1}}$. Chứng minh rằng dãy số $\{a_n\}$ hội tụ và tìm giới hạn của dãy số đó.

Giải. Xét dãy số $M_n = \max\{a_n, a_{n+1}, 4\}$.

Nếu $M_n = 4$ thì $a_n, a_{n+1} \leqslant 4$, suy ra $a_{n+2} \leqslant 4$, từ đó $M_{n+1} = 4$.

Nếu $M_n = a_{n+1}$ thì $a_{n+1} \geqslant a_n, 4$. Khi đó $\sqrt{a_{n-1}} = a_{n+1} - \sqrt{a_{n+1}} \geqslant \sqrt{a_{n+1}}$, suy ra $a_{n+2} = \sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n+1}} \leqslant \sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n-1}} = a_{n+1}$ suy ra $M_{n+1} = \max\{a_{n+1}, a_{n+2}, 4\} = a_{n+1}$.

Nếu $M_n = a_n$ thì $a_n \geqslant a_{n+1}, 4$. Khi đó $a_{n+2} = \sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n+1}} \leq 2\sqrt{a_n}$. Suy ra $M_{n+1} \leqslant a_n = M_n$.

Vậy trong mọi trường hợp thì $M_{n+1} \leqslant M_n$, tức là dãy $\{M_n\}$ là dãy số giảm. Do M_n bị chặn dưới bởi 4 nên dãy này có giới hạn. Ta chứng minh giới hạn này bằng 4. Thực vậy, giả sử giới hạn là $M > 4$. Khi đó với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại N sao cho với mọi $n \geqslant N$ thì $M - \epsilon < M_n < M + \epsilon$. Chọn $n \in N$ sao cho $M_{n+2} = a_{n+2}$ (theo các lập luận ở trên và do $M > 4$ thì tồn tại chỉ số n như vậy). Ta có

$$M - \epsilon < M_{n+2} = a_{n+2} = \sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n-1}} < 2\sqrt{M + \epsilon}$$

hay $M(M-4) - \epsilon(2M + 4 - \epsilon) < 0$

Mâu thuẫn vì $M > 4$ và ϵ có thể chọn nhỏ tuỳ ý.

0.4.7 Phương pháp sai phân

Để tính tổng n số hạng đầu tiên của một dãy số, một trong những phương pháp hiệu qủa nhất là phương pháp sai phân: Để tính tổng n số hạng đầu tiên của dãy số $\{a_n\}$, ta tìm hàm số $f(n)$ sao cho $a_n = f(n+1) - f(n)$. Khi đó $a_0 + \cdots + a_{n-1} = f(n) - f(0)$.

Một trong những ví dụ kinh điển chính là phương pháp mà Bernoulli và các nhà toán học thế kỷ 18 đã đưa ra để tìm công thức tính tổng $S(k, n) = 1^k + 2^k + \cdots + n^k$. Dùng phương pháp hệ số bất định, họ tìm đa thức $f_k(n)$ sao cho $n^k = f_k(n+1) - f_k(n)$ và từ đó tìm được $S(k, n) = f_k(n+1) - f_k(n)$. Phương pháp này hiệu qủa hơn phương pháp xây dựng công thức truy hồi, vì để tính S_k ta không cần phải dùng đến các công thức tính S_{k-1}, S_{k-2}

Khi dự đoán các hàm f, ta có thể sử dụng tích phân rồi tương tự hóa qua. Ví dụ tích phân của đa thức bậc k là đa thức bậc $k+1$. Vậy thì $\Delta f_k = n_k$ suy ra f_k phải có bậc $k+1$.

Tuy nhiên, khác với tích phân, đôi khi các hàm rời rạc không có "nguyên hàm". Trong trường hợp đó ta không tính được tổng mà chỉ có thể đánh giá tổng bằng các bất đẳng thức.

Ví dụ. Tìm phần nguyên của tổng $S = 1/1 + 1/\sqrt{2} + \cdots + 1/\sqrt{100}$.

Giải. Ta cần tìm một đánh giá cho S. Nhận xét rằng hàm $1/\sqrt{x}$ có nguyên hàm là $2\sqrt{x}$, ta xét hàm số $f(n) = 2\sqrt{n}$. Khi đó $f(n+1) - f(n) = 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} = 2/(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$.

Suy ra, $1/\sqrt{n+1} < f(n+1) - f(n) < 1/\sqrt{n}$. Từ đó, $2(\sqrt{101} - 1) < S < 2(\sqrt{100} - 1) + 1$, suy ra $[S] = 18$.

Ví dụ. (Đề đề nghị Toán quốc tế 2001) Cho $x_1, x_2, ..., x_n$ là các số thực bất kỳ. Chứng minh rằng

$$x_1/(1 + x_1^2) + x_2/(1 + x_1^2 + x_2^2) + \cdots + x_n/(1 + x_1^2 + \cdots + x_n^2) < \sqrt{n}.$$

Giải. Đặt vế trái của bất đẳng là A. ~p dụng bất đẳng thức Bunhiacopsky ta có

$$A^2 \leqslant n[x_1^2/(1 + x_1^2)^2 + x_2^2/(1 + x_1^2 + x_2^2)^2 + \cdots + x_n^2/(1 + x_1^2 + \cdots + x_n^2)^2]$$

Để chứng minh bất đẳng thức đầu bài, ta chỉ cần chứng minh

$$x_1^2/(1 + x_1^2)^2 + x_2^2/(1 + x_1^2 + x_2^2)^2 + \cdots + x_n^2/(1 + x_1^2 + \cdots + x_n^2)^2 < 1.$$

Nhưng điều này là hiển nhiên do bất đẳng thức

$$x_k^2/(1 + x_1^2 + \cdots + x_k^2)^2 \leqslant 1/(1 + x_1^2 + \cdots + x_{k-1}^2) - 1/(1 + x_1^2 + \cdots + x_k^2).$$

Ví dụ. Xét dãy số $\{x_n\}_{n=1}$ cho bởi: $x_{n+2} = [(n-1)x_{n+1} + x_n]/n$. Chứng minh rông với mọi giá trị ban đầu x_1, x_2, dãy số đã cho hội tụ. Tìm giới hạn của dãy như một hàm số theo x_1, x_2.

Giải. Ta có từ công thức của dãy số $x_{n+2} - x_{n+1} = -(x_{n+1} - x_n)/n = (x_n - x_{n-1})/n(n-1) = \cdots = (-1)^n(x_2 - x_1)/n!$. Từ đó suy ra $x_{n+2} = (x_{n+2} - x_{n+1}) + (x_{n+1} - x_n) + \cdots + (x_2 - x_1) + x_1 = x_1 + (x_2 - x_1)K_n$, trong đó $K_n = 1 - 1/1! + 1/2! - ... + (-1)n/n!$. Từ đây suy ra dãy số có giới hạn và giới hạn đó bằng $x_1 + (x_2 - x_1)/e$. Câu hỏi:

1) Có thể tổng quát hóa bài toán trên như thế nào?

2) Hãy tìm sai phân của các hàm số $\arctan(n)$. Từ đó đặt ra bài toán tính tổng tưng ứng.

3) Tìm sai phân của hàm số $\ln(n)$. Từ đó tìm đánh giá cho tổng $1 + 1/2 + \cdots + 1/n$.

4) Từ công thức $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin 3x$ có thể lập ra công thức tính tổng nào?