

HSG TOÁN 9 KHÁNH HÒA 2023-2024

Thời gian làm bài : 150 phút

Câu 1 (4,00 điểm):

$$A = \frac{(\sqrt{3} - 1) \cdot \sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}}}{\sqrt{6 + 2\sqrt{5}} - \sqrt{5}}.$$

1) Rút gọn biểu thức

$$x^2 + y^2 + \left(\frac{xy + 1}{x + y} \right)^2 = 2$$

2) Cho x, y , là các số nguyên thỏa mãn đẳng thức

Chứng minh rằng $xy + 1$ là một số chính phương.

Câu 2 (4,00 điểm):

1) Cho đa thức $f(x)$ với các hệ số nguyên thỏa mãn $f(3) \cdot f(4) = 7$. Chứng minh rằng đa thức $f(x) - 12$ không có nghiệm nguyên.

2) Tìm 3 số nguyên tố sao cho tích của chúng gấp 5 lần tổng của chúng.

Câu 3 (4,00 điểm):

$$\sqrt{2x+4} - 2\sqrt{2-x} = \frac{6x-4}{\sqrt{x^2+4}}$$

1) Giải phương trình

2) Cho a, b là hai số thực lớn hơn 1 và thỏa mãn điều kiện $a + b \leq 4$. Tìm giá

$$A = \frac{a^4}{(b-1)^3} + \frac{b^4}{(a-1)^3}$$

trị nhỏ nhất của biểu thức

Câu 4 (6,00 điểm):

1) Cho tam giác ABC , I là một điểm bất kỳ nằm trong tam giác. Qua I vẽ đường thẳng DE song song với AB ($D \in AC, E \in BC$) và đường thẳng IM song song

với BC ($M \in AC$). Tính giá trị của biểu thức $\sqrt{\frac{ID}{AB} + \frac{BE}{BC} + \frac{CM}{CA}}$.

2) Cho hình vuông $ABCD$ có tâm O . Điểm E thay đổi trên cạnh BC (E khác B và C). Gọi F là giao điểm của tia AE và đường thẳng CD , gọi H là giao điểm của OE và BF .

a) Chứng minh rằng $\frac{1}{AE^2} + \frac{1}{AF^2}$ không đổi.

b) Tìm vị trí của điểm E để diện tích tam giác HAD đạt giá trị lớn nhất.

Câu 5 (2,00 điểm):

Một tứ giác lồi có độ dài bốn cạnh đều là số tự nhiên sao cho tổng ba số bất kì trong chúng chia hết cho số còn lại. Chứng minh rằng tứ giác đó có ít nhất hai cạnh bằng nhau.

ĐÁP ÁN

Câu 1 (4,00 điểm):

1) Ta có :

$$\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}(\sqrt{3}-1) = \sqrt[3]{(\sqrt{3}+1)^3(\sqrt{3}-1)}$$

$$\sqrt{6+2\sqrt{5}} - \sqrt{5} = \sqrt{(\sqrt{5}+1)^2} - \sqrt{5}$$

$$\begin{aligned} \text{Suy ra } A &= \frac{\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{6+2\sqrt{5}} - \sqrt{5}} = \frac{\sqrt[3]{(\sqrt{3}+1)^2(\sqrt{3}-1)}}{\sqrt{(\sqrt{5}+1)^2} - \sqrt{5}} = \frac{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{5}+1 - \sqrt{5}} \\ &= \frac{3-1}{1} = 2 \end{aligned}$$

Vậy $A=2$

2) Với điều kiện $x+y \neq 0$, ta có:

$$x^2 + y^2 + \left(\frac{xy+1}{x+y} \right)^2 = 2$$

$$\Leftrightarrow (x+y)^2 - 2(xy+1) + \left(\frac{xy+1}{x+y} \right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x+y - \frac{xy+1}{x+y} \right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x+y - \frac{xy+1}{x+y} = 0$$

$$\Leftrightarrow xy+1 = (x+y)^2$$

Do x, y là các số nguyên nên $x+y$ là số nguyên.

Vậy $xy+1$ là một số chính phương.

Câu 2 (4,00 điểm):

1) +) Giả sử đa thức $f(x) - 12$ có nghiệm nguyên a .

Khi đó $f(x) - 12 = (x-a) \cdot Q(x)$ với $Q(x)$ là đa thức có hệ số nguyên.

Suy ra $f(3) = (3-a) \cdot Q(3) + 12$ và $f(4) = (4-a) \cdot Q(4) + 12$

+) Ta có: $f(3) \cdot f(4) = 7$

$$\Leftrightarrow [(3-a).Q(3)+12][(4-a).Q(4)+12]=7$$

$$\Leftrightarrow (3-a)(4-a).Q(3).Q(4)+12(3-a).Q(3)+12.(4-a).Q(4)+144=7$$

+) Do $3-a$ và $4-a$ là hai số nguyên liên tiếp nên $(3-a)(4-a)$ là số chẵn. Do đó VT của (2) là số chẵn, nhưng VP của (2) là số lẻ, điều này mâu thuẫn.

Vậy giả sử trên sai. Suy ra đa thức $f(x)-12$ không có nghiệm nguyên.

2) +) Gọi 3 số nguyên tố cần tìm là a, b, c . Khi đó, ta có:

$$a.b.c=5(a+b+c) \Rightarrow a.b.c:5$$

+) Vì a, b, c có vai trò bình đẳng nên không mất tính tổng quát, giả sử $a:5 \Rightarrow a=5$ (vì $a \in P$)

+) Khi đó: $5.b.c=5(5+b+c) \Leftrightarrow 5+b+c=b.c \Leftrightarrow b.c-b-c+1=6$

$$\Leftrightarrow b(c-1)-(c-1)=6 \Leftrightarrow (c-1)(b-1)=6$$

$$\begin{aligned} \text{Suy ra } \begin{cases} b-1=1 \\ c-1=6 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} b-1=2 \\ c-1=3 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} b=2 \\ c=7 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} b=3 \\ c=4 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} b=2 \\ c=7 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} b=3 \\ c=4 \end{cases} \text{ (loại vì } c \notin P) \Leftrightarrow \begin{cases} b=2 \\ c=7 \end{cases} \end{aligned}$$

+) Do vai trò của a, b, c là bình đẳng nên ba số cần tìm là 2; 5; 7

Vậy ba số cần tìm là 2; 5; 7

Câu 3 (4,00 điểm):

1) +) ĐK: $-2 \leq x \leq 2$

$$\text{+) Ta có: } \sqrt{2x+4} - 2\sqrt{2-x} = \frac{6x-4}{\sqrt{x^2+4}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(3x-2)}{\sqrt{2x+4}+2\sqrt{2-x}} = \frac{2(3x-2)}{\sqrt{x^2+4}}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ \sqrt{2x+4} + 2\sqrt{2-x} = \sqrt{x^2+4} (*) \end{cases}$$

$$\text{+) Ta có: } (*) \Leftrightarrow 4\sqrt{2(2+x)(2-x)} + (2-x)(x+4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2-x}(4\sqrt{2(2+x)} + \sqrt{(2-x)(x+4)}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2-x} = 0 \\ 4\sqrt{2(2+x)} + \sqrt{(2-x)(x+4)} = 0 (**) \end{cases}$$

$$\text{+) Với } \sqrt{2-x} = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ (thỏa ĐK)}$$

+) Với $-2 \leq x \leq 2$ thì VT của (**) luôn dương nên (**) vô nghiệm.

$$S = \left\{ 2; \frac{2}{3} \right\}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là

2) +) Do $a > 1, b > 1$ nên $a - 1 > 0, b - 1 > 0$

+) Áp dụng BĐT Cauchy cho hai số dương, ta có:

$$B \geq \frac{2a^2b^2}{(a-1)(b-1)\sqrt{(a-1)(b-1)}} \quad (1)$$

+) Ta lại có:

$$0 < 1.(b-4) \leq \frac{b^2}{4} \quad (2)$$

$$0 < 1.(a-4) \leq \frac{a^2}{4} \quad (3)$$

$$4 \geq a+b \geq 2\sqrt{ab} \Rightarrow ab \leq 4 \quad (4)$$

Từ (1), (2), (3) và (4) suy ra

$$B \geq \frac{2a^2b^2 \cdot 4^3}{a^3b^3} = \frac{128}{ab} \geq \frac{128}{4} = 32$$

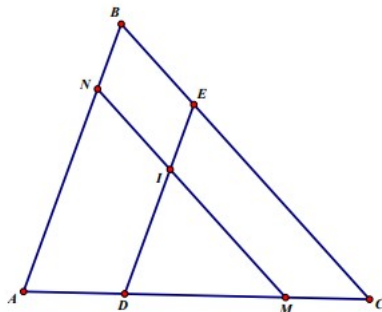
$$\begin{cases} \frac{a^4}{(b-1)^3} = \frac{b^4}{(a-1)^3} \\ a-1=b-1; a+b=4 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=2$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi

Vậy giá trị nhỏ nhất của B là 32 và đạt được khi $a=b=2$

Câu 4 (6,00 điểm):

1)



+) Gọi N là giao điểm của IM và AB .

+) Xét $\triangle ABC$, ta có: $MN \parallel BC$

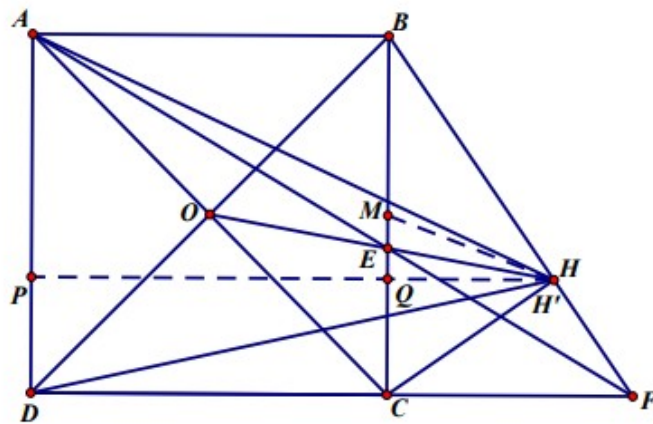
$$\Rightarrow \frac{CM}{CA} = \frac{BN}{BA} = \frac{IE}{AB} \quad (\text{vì tứ giác BNIE là hình bình hành})$$

Suy ra: $\frac{ID}{AB} + \frac{CM}{CA} = \frac{IE}{AB} + \frac{ID}{AB} = \frac{DE}{AB}$

+) Ta lại có: $DE \parallel AB \Rightarrow \frac{DE}{AB} = \frac{CE}{CB}$. Suy ra $\frac{ID}{AB} + \frac{CM}{CA} = \frac{CE}{BC}$
 $\Rightarrow \frac{ID}{AB} + \frac{CM}{CA} + \frac{BE}{CB} = \frac{CE}{BC} + \frac{BE}{BC} = \frac{BC}{BC} = 1$

Vậy $\sqrt{\frac{ID}{AB} + \frac{BE}{BC} + \frac{CM}{CA}} = 1$

2)



a) + Ta có:

$$\cos BAE = \frac{AB}{AE}$$

$$\sin BAE = \sin DFA = \frac{AD}{AF}$$

+ Ta lại có: $\sin^2 BAE + \cos^2 BAE = 1$

Suy ra $\left(\frac{AB}{AE}\right)^2 + \left(\frac{AD}{AF}\right)^2 = 1$

$$\Leftrightarrow AB^2 \cdot \left(\frac{1}{AE^2} + \frac{1}{AF^2}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{AE^2} + \frac{1}{AF^2} = \frac{1}{AB^2} \text{ (không đổi vì AB không đổi)}$$

Vậy $\frac{1}{AE^2} + \frac{1}{AF^2}$ không đổi

b) +) Gọi H' là chân đường vuông góc hạ từ C xuống BF

+) Xét $\triangle BCF$ vuông tại C, ta có: $CH' \perp BF \Rightarrow BC^2 = BH' \cdot BF$

Xét $\triangle BCD$ vuông tại C, ta có: $CO \perp BD \Rightarrow BC^2 = BO \cdot BD$

Suy ra $BH' \cdot BF = BO \cdot BD$ hay $\frac{BH'}{BD} = \frac{BO}{BF}$

+) Xét $\triangle BHO'$ và $\triangle BDF$, ta có: $\hat{B}$ chung và $\frac{BH'}{BD} = \frac{BO}{BF}$ (cmt)

Suy ra $\triangle BHO' \sim \triangle BDF \Rightarrow \angle BH'O = \angle BDF = 45^\circ$

Suy ra HO' là tia phân giác của $\angle BH'C$ (1)

+) Ta có: $\triangle BHC \sim \triangle BCF'$ (vì $\hat{B}$ chung và $\angle H' = \angle F' = 90^\circ$).

$\Rightarrow \frac{BH'}{BC} = \frac{CH'}{CF} \Rightarrow \frac{BH'}{CH'} = \frac{BC}{CF} = \frac{AB}{CF}$, mà $\frac{BE}{CE} = \frac{AB}{CF}$ (vì $AB \parallel CF$)

Suy ra $\frac{BE}{CE} = \frac{BH'}{CH'} \Rightarrow H'E$ là tia phân giác của $\angle BH'C$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra H, O, E' thẳng hàng.

Do đó $H \equiv H'$. Suy ra $CH \perp BF$.

+) Gọi M là trung điểm của BC.

Khi đó $HM = \frac{1}{2}AD$ (vì $\triangle BHC$ vuông tại H)

+) Ta có:

$$2S_{HAD} = AD \cdot HP = AD(HQ + PQ) = AD^2 + AD \cdot HQ \leq AD^2 + AD \cdot HM = \frac{3}{2}AD^2$$

$$\Rightarrow S_{HAD} \leq \frac{3}{4}AD^2$$

Dấu “=” xảy ra khi $HQ = HM \Leftrightarrow Q \equiv M \Leftrightarrow O, Q, H$ thẳng hàng

$\Leftrightarrow E \equiv M$ (vì H, O, E thẳng hàng).

Vậy để diện tích tam giác HAD đạt giá trị lớn nhất thì E là trung điểm của BC.

Câu 5 (2,00 điểm):

+) Gọi độ dài các cạnh của tứ giác là a, b, c, d ($a, b, c, d \in \mathbb{N}^*$)

+) Giả sử không có 2 cạnh nào của tứ giác bằng nhau.

+) Không mất tính tổng quát, giả sử $a > b > c > d$ (*)

+) Do tứ giác lồi nên $a < b + c + d \Rightarrow a < b + c + d < 3a$

$$\Rightarrow 2a < a + b + c + d < 4a (**)$$

+) Từ giả thiết bài toán suy ra $a + b + c + d$ chia hết cho các số a, b, c, d .

Kết hợp với (**), ta có: $a + b + c + d = 3a$ (1)

+) Đặt $a + b + c + d = mb$ với $m \in N^*$ (2)

$a + b + c + d = nc$ với $n \in N^*$ (3)

Do $a > b > c \Rightarrow n > m > 3 \Rightarrow n \geq 5, m \geq 4$.

Cộng (1), (2), (3) vế theo vế ta có: $3(a + b + c + d) = 3a + mb + nc \geq 3a + 4b + 5c$

mà $3a + mb + nc \geq 3a + 4b + 5c$ (vì $n \geq 5, m \geq 4$)

Suy ra $3(a + b + c + d) \geq 3a + 4b + 5c$

$\Leftrightarrow (b - d) + 2(c - d) \leq 0$ mâu thuẫn (*)

Vậy tứ giác có ít nhất 2 cạnh bằng nhau.