DẠNG 13 Tích phân trong đề thi của BGD&ĐT

Câu 1: Cho hàm số $f(x)$. Biết $f(0)=4$ và $f'(x)=2\cos^2 x+1,\ \forall x\in\mathbb{R}$, khi đó $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx$ bằng

A. $\frac{\pi^2+4}{16}$. **B.** $\frac{\pi^2+14\pi}{16}$. **C.** $\frac{\pi^2+16\pi+4}{16}$. **D.** $\frac{\pi^2+16\pi+16}{16}$.

Câu 2: Cho $\int_0^1 \frac{xdx}{(x+2)^2}=a+b\ln 2+c\ln 3$ với a,b,c là các số hữu tỷ. Giá trị của $3a+b+c$ bằng

A. -2. **B.** -1. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 3: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} x^2-1\ khi\ x\ge 2 \\ x^2-2x+3\ khi\ x<2 \end{cases}$. Tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(2\sin x+1)\cos xdx$ bằng

A. $\frac{23}{3}$. **B.** $\frac{23}{6}$. **C.** $\frac{17}{6}$. **D.** $\frac{17}{3}$.

Câu 4: Biết $\int_1^2 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}+x\sqrt{x+1}}dx=\sqrt{a}-\sqrt{b}-c$ với a,b,c là các số nguyên dương. Tính $P=a+b+c$

A. $P=24$ **B.** $P=12$ **C.** $P=18$ **D.** $P=46$

Câu 5: Cho $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{e^x+1}=a+b\ln\frac{1+e}{2}$, với $a,\ b$ là các số hữu tỉ. Tính $S=a^3+b^3$.

A. $S=2$. **B.** $S=-2$. **C.** $S=0$. **D.** $S=1$.

Câu 6: Tính tích phân $I=\int_0^{\pi}\cos^3 x.\sin x\mathrm{d}x$.

A. $I=-\frac{1}{4}\pi^4$. **B.** $I=-\pi^4$. **C.** $I=0$. **D.** $I=-\frac{1}{4}$.

Câu 7: Cho hàm số $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $g(x)=(x+1)f'(x)$ là

A. $\frac{x+4}{2\sqrt{x^2+4}}+C$. **B.** $\frac{x-4}{2\sqrt{x^2+4}}+C$. **C.** $\frac{x^2+2x-4}{2\sqrt{x^2+4}}+C$. **D.** $\frac{2x^2+x+4}{2\sqrt{x^2+4}}+C$.

Câu 8: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f(3)=1$ và $\int_0^1 xf(3x)\mathrm{d}x=1$, khi đó $\int_0^3 x^2f'(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 3. **B.** 7. **C.** -9. **D.** $\frac{25}{3}$.

Câu 9: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f(6)=1$ và $\int_0^1 xf(6x)\,dx=1$, khi đó $\int_0^6 x^2 f'(x)\,dx$ bằng

A. $\frac{107}{3}$. **B.** 34. **C.** 24. **D.** -36.

Câu 10: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2)=-\frac{1}{5}$ và $f'(x)=x^3\left[f(x)\right]^2$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng

A. $-\frac{4}{35}$ **B.** $-\frac{71}{20}$ **C.** $-\frac{79}{20}$ **D.** $-\frac{4}{5}$

Câu 11: Biết $I=\int_3^4 \frac{dx}{x^2+x}=a\ln 2+b\ln 3+c\ln 5,$ với a,b,c là các số nguyên. Tính $S=a+b+c.$

A. $S=6$. **B.** $S=2$. **C.** $S=-2$. **D.** $S=0.$

Câu 12: Cho hàm số $f(x)$ có $f(0)=0$ và $f'(x)=\cos x.\cos^2 2x, \forall x\in\mathbb{R}$. Khi đó $\int_0^{\pi} f(x)dx$ bằng

A. $\frac{1042}{225}$. **B.** $\frac{208}{225}$. **C.** $\frac{242}{225}$. **D.** $\frac{149}{225}$.

Câu 13: Cho hàm số $f(x)$ có $f(3)=3$ và $f'(x)=\frac{x}{x+1-\sqrt{x+1}}$ với $x>0$. Khi đó $\int_3^8 f(x)dx$ bằng

A. 7. **B.** $\frac{197}{6}$. **C.** $\frac{29}{2}$. **D.** $\frac{181}{6}$

Câu 14: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f(5)=1$ và $\int_0^1 xf(5x)dx=1$, khi đó $\int_0^5 x^2 f'(x)dx$ bằng

A. 15. **B.** 23. **C.** $\frac{123}{5}$. **D.** -25.

Câu 15: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f(4)=1$ và $\int_0^1 xf(4x)dx=1$, khi đó $\int_0^4 x^2 f'(x)dx$ bằng

A. $\frac{31}{2}$. **B.** -16. **C.** 8. **D.** 14.

Câu 16: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\int_0^1 (x+1)f'(x)dx=10$ và $2f(1)-f(0)=2$. Tính $\int_0^1 f(x)dx$.

A. $I=-12$ **B.** $I=8$ **C.** $I=1$ **D.** $I=-8$

Câu 17: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thoả mãn $f(x)+f(-x)=\sqrt{2+2\cos 2x}$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Tính $I=\int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)dx.$

A. $I=-6$ **B.** $I=0$ **C.** $I=-2$ **D.** $I=6$

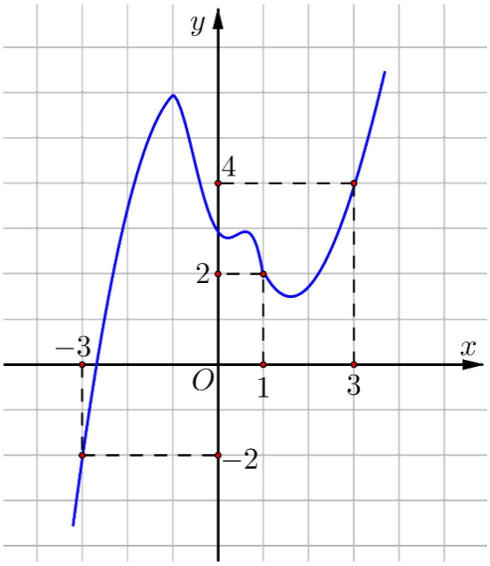
Câu 18: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa $xf(x^3)+f(1-x^2)=-x^{10}+x^6-2x, \forall x\in\mathbb{R}$. Khi đó $\int_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $-\frac{17}{20}$. **B.** $-\frac{13}{4}$. **C.** $\frac{17}{4}$. **D.** -1.

Câu 19: Cho hàm số $f(x)$ thoả mãn $f(2)=-\frac{2}{9}$ và $f'(x)=2x\left[f(x)\right]^2$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng.

A. $-\frac{35}{36}$ **B.** $-\frac{2}{3}$ **C.** $-\frac{19}{36}$ **D.** $-\frac{2}{15}$

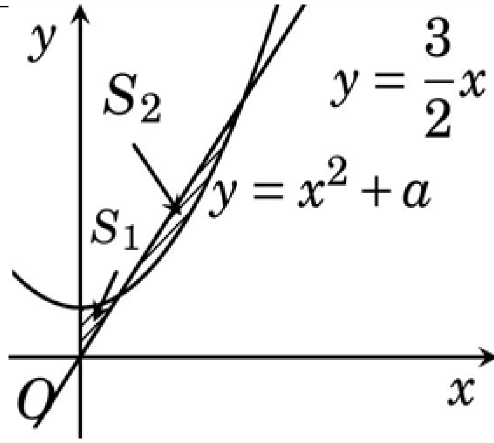
Câu 20: Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình bên. Đặt $g(x)=2f(x)-(x+1)^2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $g(-3)>g(3)>g(1)$ **B.** $g(1)>g(-3)>g(3)$

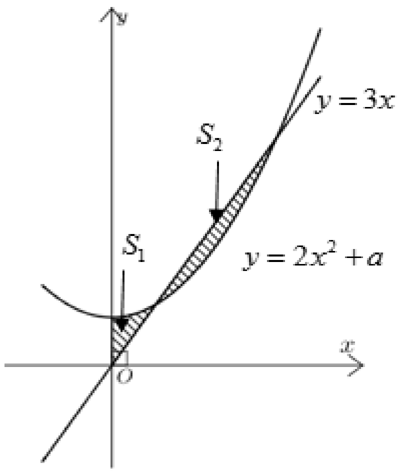
C. $g(3)>g(-3)>g(1)$ **D.** $g(1)>g(3)>g(-3)$

Câu 21: Cho đường thẳng $y=\frac{3}{2}x$ và parabol $y=x^2+a$ (a là tham số thực dương). Gọi S_1 và S_2 lần lượt là diện tích của 2 hình phẳng được gạch chéo trong hình vẽ bên. Khi $S_1=S_2$ thì a thuộc khoảng nào sau đây



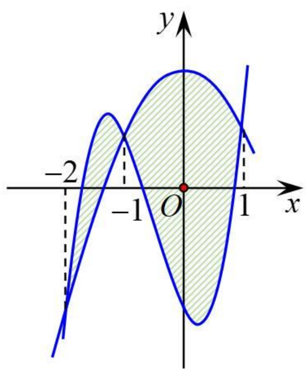
A. $\left(\frac{1}{2};\frac{9}{16}\right)$. **B.** $\left(\frac{2}{5};\frac{9}{20}\right)$. **C.** $\left(\frac{9}{20};\frac{1}{2}\right)$. **D.** $\left(0;\frac{2}{5}\right)$

Câu 22: Cho đường thẳng $y = 3x$ và parabol $y = 2x^2 + a$ (a là tham số thực dương). Gọi S_1 và S_2 lần lượt là diện tích của 2 hình phẳng được gạch chéo trong hình vẽ bên. Khi $S_1 = S_2$ thì a thuộc khoảng nào dưới đây?



A. $\left(\frac{4}{5};\frac{9}{10}\right)$. **B.** $\left(0;\frac{4}{5}\right)$. **C.** $\left(1;\frac{9}{8}\right)$. **D.** $\left(\frac{9}{10};1\right)$

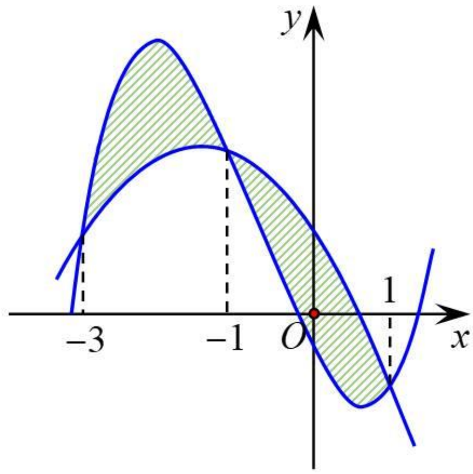
Câu 23: Cho hai hàm số $f(x) = ax^2 + bx^2 + cx - 2$ và $g(x) = dx^2 + ex + 2$ (a, b, c, d, $e \in \mathbb{R}$). Biết rằng đồ thị của hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt là -2; -1; 1 (tham khảo hình vẽ).



Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho có diện tích bằng

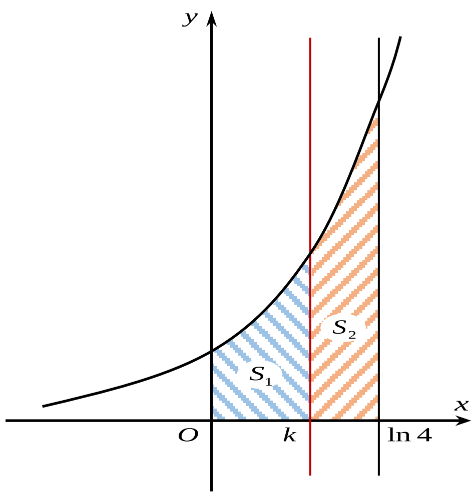
A. $\frac{37}{6}$. **B.** $\frac{13}{2}$. **C.** $\frac{9}{2}$. **D.** $\frac{37}{12}$

Câu 24: Cho hai hàm số $f\left(x\right)=ax^3+bx^2+cx-\frac{1}{2}$ và $g\left(x\right)=dx^2+ex+1$ $\left(a,b,c,d,e\in\mathbb{R}\right)$. Biết rằng đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ và $y=g\left(x\right)$ cắt nhau tại 3 điểm có hoành độ lần lượt là -3; -1; 1. Hình phẳng giới hạn bởi 2 đồ thị đã cho có diện tích bằng



A. $\frac{9}{2}$ **B.** 8 **C.** 4 **D.** 5

Câu 25: Cho hình thang cong $\left(H\right)$ giới hạn bởi các đường $y=e^x$, $y=0$, $x=0$, $x=\ln 4$. Đường thẳng $x=k$ $(0<k<\ln 4)$ chia $\left(H\right)$ thành hai phần có diện tích là S_1 và S_2 như hình vẽ bên. Tìm k để $S_1=2S_2$.

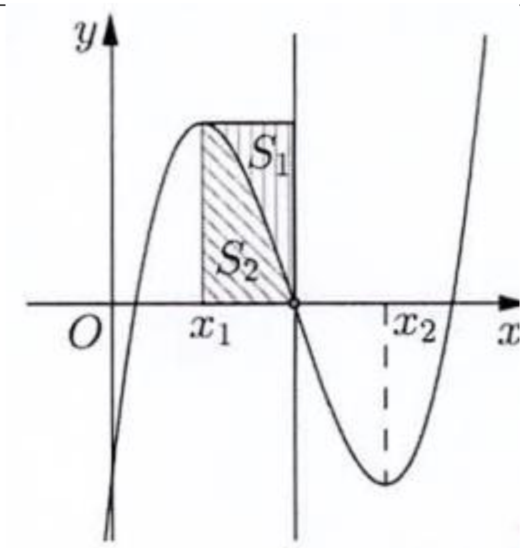


A. $k=\frac{2}{3}\ln 4$. **B.** $k=\ln 2$. **C.** $k=\ln\frac{8}{3}$ **D.** $k=\ln 3$.

Câu 26: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^3-x$ và đồ thị hàm số $y=x-x^2$.

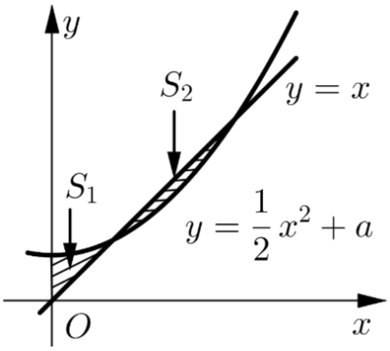
A. $\frac{37}{12}$ **B.** $\frac{9}{4}$ **C.** $\frac{81}{12}$ **D.** 13

Câu 27: Cho hàm số bậc ba $y=f\left(x\right)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên. Biết hàm số $f\left(x\right)$ đạt cực trị tại hai điểm x_1,x_2 thỏa mãn $x_2=x_1+2$ và $f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)=0$. Gọi S_1 và S_2 là diện tích của hai hình phẳng được gạch trong hình bên. Tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$ bằng



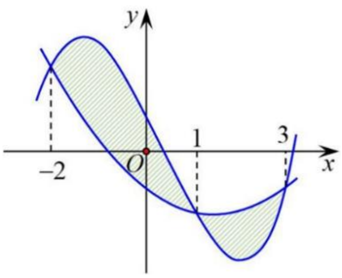
A. $\frac{3}{4}$. **B.** $\frac{5}{8}$. **C.** $\frac{3}{8}$. **D.** $\frac{3}{5}$.

Câu 28: Cho đường thẳng $y = x$ và Parabol $y = \frac{1}{2}x^2 + a$ (a là tham số thực dương). Gọi S_1 và S_2 lần lượt là diện tích của hai hình phẳng được gạch chéo trong hình vẽ bên. Khi $S_1 = S_2$ thì a thuộc khoảng nào sau đây?



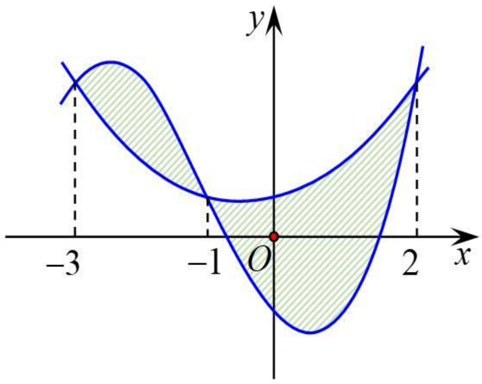
A. $\left(\frac{3}{7};\frac{1}{2}\right)$. **B.** $\left(0;\frac{1}{3}\right)$. **C.** $\left(\frac{1}{3};\frac{2}{5}\right)$. **D.** $\left(\frac{2}{5};\frac{3}{7}\right)$

Câu 29: Cho hai hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + \frac{3}{4}$ và $g(x) = dx^2 + ex - \frac{3}{4}$, $(a,b,c,d,e \in \mathbb{R})$. Biết rằng đồ thị của hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt là -2; 1; 3. Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho có diện tích bằng



A. $\frac{253}{48}$ **B.** $\frac{125}{24}$ **C.** $\frac{125}{48}$ **D.** $\frac{253}{24}$

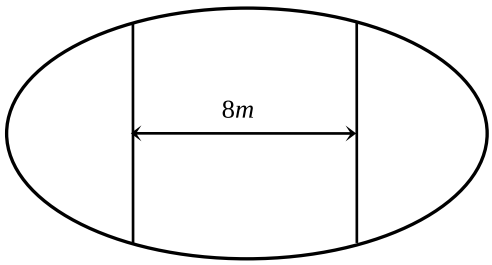
Câu 30: Cho hai hàm số $f\left(x\right)=ax^3+bx^2+cx-1$ và $g\left(x\right)=dx^2+ex+\frac{1}{2}\left(a,b,c,d,e\in\mathbb{R}\right)$. Biết rằng đồ thị của hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt $-3;-1;2$.



Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho có diện tích bằng

A. $\frac{253}{12}$. **B.** $\frac{125}{12}$. **C.** $\frac{253}{48}$. **D.** $\frac{125}{48}$

Câu 31: Ông An có một mảnh vườn hình Elip có độ dài trục lớn bằng $16m$ và độ dài trục bé bằng $10m$. Ông muốn trồng hoa trên một dải đất rộng $8m$ và nhận trục bé của elip làm trục đối xứng (như hình vẽ). Biết kinh phí để trồng hoa là 100.000 đồng/$1m^2$. Hỏi ông An cần bao nhiêu tiền để trồng hoa trên dải đất đó? (Số tiền được làm tròn đến hàng nghìn.)



A. $7.862.000$ đồng **B.** $7.653.000$ đồng **C.** $7.128.000$ đồng **D.** $7.826.000$ đồng

Câu 32: Một biển quảng cáo có dạng hình elip với bốn đỉnh A_1, A_2, B_1, B_2 như hình vẽ bên. Biết chi phí để sơn phần tô đậm là 200.000 đồng/ m^2 và phần còn lại là 100.000 đồng/ m^2. Hỏi số tiền để sơn theo cách trên gần nhất với số tiền nào dưới đây, biết $A_1A_2=8m, B_1B_2=6m$ và tứ giác MNPQ là hình chữ nhật có $MQ=3m$.

A. 7322000 đồng. **B.** 7213000 đồng. **C.** 5526000 đồng. **D.** 5782000 đồng.

Câu 33. Biết $F\left(x\right)$ và $G\left(x\right)$ là hai nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)$ trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^5 f\left(x\right)\mathrm{d}x=F\left(5\right)-G\left(0\right)+a,\ \left(a>0\right)$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bỡi các đường $y=F\left(x\right)$, $y=G\left(x\right)$, $x=0$ và $x=5$. Khi $S=20$ thì a bằng?

A. 4. **B.** 15. **C.** 25. **D.** 20.

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Cho hàm số $f\left(x\right)$. Biết $f\left(0\right)=4$ và $f'\left(x\right)=2\cos^2 x+1,\ \forall x\in\mathbb{R}$, khi đó $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} f\left(x\right)dx$ bằng

A. $\dfrac{\pi^2+4}{16}$. **B.** $\dfrac{\pi^2+14\pi}{16}$. **C.** $\dfrac{\pi^2+16\pi+4}{16}$. **D.** $\dfrac{\pi^2+16\pi+16}{16}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $f\left(x\right)=\int f'\left(x\right)dx=\int\left(2\cos^2 x+1\right)dx=\int\left(2+\cos 2x\right)dx=2x+\dfrac{1}{2}\sin 2x+C$.

Theo bài: $f\left(0\right)=4\Leftrightarrow 2.0+\dfrac{1}{2}.\sin 0+C=4\Leftrightarrow C=4$. Suy ra $f\left(x\right)=2x+\dfrac{1}{2}\sin 2x+4$.

Vậy:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} f\left(x\right)dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left(2x+\frac{1}{2}\sin 2x+4\right)dx=\left(x^2-\frac{\cos 2x}{4}+4x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=\left(\frac{\pi^2}{16}+\pi\right)-\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{\pi^2+16\pi+4}{16}.$$

Câu 2: Cho $\int\limits_0^1 \dfrac{xdx}{\left(x+2\right)^2}=a+b\ln 2+c\ln 3$ với a,b,c là các số hữu tỷ. Giá trị của $3a+b+c$ bằng

A. -2. **B.** -1. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

$$\int\limits_0^1 \frac{x\mathrm{d}x}{\left(x+2\right)^2}=\int\limits_0^1 \frac{x+2-2}{\left(x+2\right)^2}\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 \frac{1}{x+2}\mathrm{d}x-2\int\limits_0^1 \frac{1}{\left(x+2\right)^2}\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}\left(x+2\right)}{x+2}-2\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}\left(x+2\right)}{\left(x+2\right)^2}$$

$$=\ln\left(x+2\right)\Big|_0^1+\frac{2}{x+2}\Bigg|_0^1=\ln 3-\ln 2+\frac{2}{3}-1=-\frac{1}{3}-\ln 2+\ln 3.$$

Ta có $a=-\dfrac{1}{3},\ b=-1,\ c=1$. Vậy $3a+b+c=-1$.

Câu 3: Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases} x^2-1\ khi\ x\ge 2 \\ x^2-2x+3\ khi\ x<2\end{cases}$. Tích phân $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(2\sin x+1\right)\cos xdx$ bằng

A. $\dfrac{23}{3}$. **B.** $\dfrac{23}{6}$. **C.** $\dfrac{17}{6}$. **D.** $\dfrac{17}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=2\sin x+1\Leftrightarrow dt=2\cos xdx$.

Đổi cận $x=0\Rightarrow t=1; x=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow t=3$.

Tích phân trở thành:

$$I=\frac{1}{2}\int\limits_1^3 f\left(t\right)dt=\frac{1}{2}\left(\int\limits_1^2 f\left(t\right)dt+\int\limits_2^3 f\left(t\right)dt\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\int_1^2\left(t^2-2t+3\right)dt+\int_2^3\left(t^2-1\right)dt\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{7}{3}+\frac{16}{3}\right)=\frac{23}{6}.$$

Câu 4: Biết $\int_1^2 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}+x\sqrt{x+1}}dx=\sqrt{a}-\sqrt{b}-c$ với a,b,c là các số nguyên dương. Tính $P=a+b+c$

A. $P=24$ **B.** $P=12$ **C.** $P=18$ **D.** $P=46$

Lời giải

Chọn D

Cách 1

$$\int_1^2 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}+x\sqrt{x+1}}dx=\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x(x+1)}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}=\int_1^2 \frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x(x+1)}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)^2}dx$$

Đăt $t=\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\Rightarrow dt=\left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx\Leftrightarrow 2dt=\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x(x+1)}}dx$

Khi đó $I=\int_{1+\sqrt{2}}^{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\frac{2}{t^2}dt=\left(\frac{-2}{t}\right)\Bigg|_{1+\sqrt{2}}^{\sqrt{2}+\sqrt{3}}=-2\sqrt{3}+4\sqrt{2}-2=\sqrt{32}-\sqrt{12}-2$

$\Rightarrow P=a+b+c=32+12+2=46.$

Cách 2

$$\int_1^2 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}+x\sqrt{x+1}}dx=\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x(x+1)}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}=\int_1^2 \frac{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x(x+1)}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}dx$$

$$=\int_1^2 \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\sqrt{x(x+1)}}dx=\int_1^2\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)dx=\left(2\sqrt{x}-2\sqrt{x+1}\right)\Big|_1^2=2\sqrt{2}-2-2\sqrt{3}+2\sqrt{2}=\sqrt{32}-\sqrt{12}-2$$

Câu 5: Cho $\int_0^1 \frac{dx}{e^x+1}=a+b\ln\frac{1+e}{2}$, với $a,$ b là các số hữu tỉ. Tính $S=a^3+b^3$.

A. $S=2$. **B.** $S=-2$. **C.** $S=0$. **D.** $S=1$.

Lời giải

Chọn C

Cách 1. Đặt $t=e^x\Rightarrow dt=e^x dx$. Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=1; x=1\Rightarrow t=e$

$$\int_0^1\frac{dx}{e^x+1}=\int_0^1\frac{e^x dx}{e^x\left(e^x+1\right)}=\int_1^e\frac{dt}{t\left(t+1\right)}=\int_1^e\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right)dt=\left(\ln|t|-\ln|t+1|\right)\Big|_1^e=\left(1-\ln\left(1+e\right)\right)-(-\ln 2)$$

$$=1+\ln\frac{2}{1+e}=1-\ln\frac{1+e}{2}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\ b=-1\end{cases}\Rightarrow S=a^3+b^3=0.$$

Cách 2. $\int_0^1\frac{dx}{e^x+1}=\int_0^1\frac{\left(e^x+1\right)-e^x}{e^x+1}dx=\int_0^1 dx-\int_0^1\frac{d\left(e^x+1\right)}{e^x+1}=x\Big|_0^1-\ln\left|e^x+1\right|\Big|_0^1=1-\ln\frac{1+e}{2}.$

Suy ra $a=1$ và $b=-1$. Vậy $S=a^3+b^3=0$.

Câu 6: Tính tích phân $I=\int_0^{\pi}\cos^3 x.\sin x\mathrm{d}x$.

A. $I=-\frac{1}{4}\pi^4$. **B.** $I=-\pi^4$. **C.** $I=0$. **D.** $I=-\frac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $I=\int_0^{\pi}\cos^3 x.\sin xdx$. Đặt $t=\cos x\Rightarrow dt=-\sin xdx\Leftrightarrow -dt=\sin xdx$

Đổi cận: Với $x=0\Rightarrow t=1$; với $x=\pi\Rightarrow t=-1$.

Vậy $I=-\int_1^{-1}t^3dt=\int_{-1}^{1}t^3dt=\left.\frac{t^4}{4}\right|_{-1}^{1}=\frac{1^4}{4}-\frac{(-1)^4}{4}=0$.

Cách khác : Bấm máy tính.

Câu 7: Cho hàm số $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $g(x)=(x+1)f'(x)$ là

A. $\frac{x+4}{2\sqrt{x^2+4}}+C$. **B.** $\frac{x-4}{2\sqrt{x^2+4}}+C$. **C.** $\frac{x^2+2x-4}{2\sqrt{x^2+4}}+C$. **D.** $\frac{2x^2+x+4}{2\sqrt{x^2+4}}+C$.

Lời giải

Chọn B

$\int g(x)\mathrm{d}x=\int(x+1)f'(x)\mathrm{d}x$. Đặt $\begin{cases}u=(x+1)\\ \mathrm{d}v=f'(x)\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\ v=f(x)\end{cases}$.

$\Rightarrow\int g(x)\mathrm{d}x=(x+1)f(x)-\int f(x)\mathrm{d}x=(x+1)f(x)-\int\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\mathrm{d}x$.

Tính $\int\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\mathrm{d}x$, đặt $t=\sqrt{x^2+4}\Rightarrow t^2=x^2+4\Rightarrow t\mathrm{d}t=x\mathrm{d}x$.

$\int\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\mathrm{d}x=\int\frac{t}{t}\mathrm{d}t=\int 1\mathrm{d}t=t+C=\sqrt{x^2+4}+C$.

Khi đó: $\int g(x)\mathrm{d}x=(x+1)\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}-\sqrt{x^2+4}+C=\frac{x-4}{\sqrt{x^2+4}}+C$.

Câu 8: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f(3)=1$ và $\int_0^1 xf(3x)\mathrm{d}x=1$, khi đó $\int_0^3 x^2f'(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 3. **B.** 7. **C.** -9. **D.** $\frac{25}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Xét tích phân $I=\int_0^1 xf(3x)\mathrm{d}x=1$.

Đặt $t=3x\Rightarrow\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\mathrm{d}t$ và $x=\frac{1}{3}t$.

Khi $x=0$ thì $t=0$. Khi $x=1$ thì $t=3$.

Do đó $I=\int\limits_0^3 \frac{1}{3}tf\left(t\right).\frac{1}{3}\mathrm{d}t=\frac{1}{9}\int\limits_0^3 tf\left(t\right)\mathrm{d}t$,

suy ra $\frac{1}{9}\int\limits_0^3 tf\left(t\right)\mathrm{d}t=1\Rightarrow\int\limits_0^3 tf\left(t\right)\mathrm{d}t=9\Rightarrow\int\limits_0^3 tf\left(t\right)\mathrm{d}t=9\Rightarrow\int\limits_0^3 xf\left(x\right)\mathrm{d}x=9$.

Xét tích phân $J=\int\limits_0^3 x^2f'\left(x\right)\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases}u=x^2\\ \mathrm{d}v=f'\left(x\right)\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=2x\,\mathrm{d}x\\ v=f\left(x\right)\end{cases}$, ta có

$J=\int\limits_0^3 x^2f'\left(x\right)\mathrm{d}x=x^2f\left(x\right)\Big|_0^3-\int\limits_0^3 2xf\left(x\right)\mathrm{d}x=x^2f\left(x\right)\Big|_0^3-2\int\limits_0^3 xf\left(x\right)\mathrm{d}x$

$=3^2.f\left(3\right)-0^2.f\left(0\right)-2.9=-9$.

Câu 9: Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f\left(6\right)=1$ và $\int\limits_0^1 xf\left(6x\right)\mathrm{d}x=1$, khi đó $\int\limits_0^6 x^2f'\left(x\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{107}{3}$. **B.** 34. **C.** 24. **D.** -36.

Lời giải

Chọn D

Xét tích phân $I=\int\limits_0^1 xf\left(6x\right)\mathrm{d}x=1$.

Đặt $t=6x\Rightarrow\mathrm{d}x=\frac{1}{6}\mathrm{d}t$ và $x=\frac{1}{6}t$.

Khi $x=0$ thì $t=0$. Khi $x=1$ thì $t=6$.

Do đó $I=\int\limits_0^6 \frac{1}{6}tf\left(t\right).\frac{1}{6}\mathrm{d}t=\frac{1}{36}\int\limits_0^6 tf\left(t\right)\mathrm{d}t$,

suy ra $\frac{1}{36}\int\limits_0^6 tf\left(t\right)\mathrm{d}t=1\Rightarrow\int\limits_0^6 tf\left(t\right)\mathrm{d}t=36\Rightarrow\int\limits_0^6 tf\left(t\right)\mathrm{d}t=36\Rightarrow\int\limits_0^6 xf\left(x\right)\mathrm{d}x=36$.

Xét tích phân $J=\int\limits_0^6 x^2f'\left(x\right)\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases}u=x^2\\ \mathrm{d}v=f'\left(x\right)\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=2x\,\mathrm{d}x\\ v=f\left(x\right)\end{cases}$, ta có

$J=\int\limits_0^6 x^2f'\left(x\right)\mathrm{d}x=x^2f\left(x\right)\Big|_0^6-\int\limits_0^6 2xf\left(x\right)\mathrm{d}x=x^2f\left(x\right)\Big|_0^6-2\int\limits_0^6 xf\left(x\right)\mathrm{d}x$

$=6^2.f\left(6\right)-0^2.f\left(0\right)-2.36=-36$.

Câu 10: Cho hàm số $f\left(x\right)$ thỏa mãn $f\left(2\right)=-\frac{1}{5}$ và $f'\left(x\right)=x^3\left[f\left(x\right)\right]^2$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Giá trị của $f\left(1\right)$

bằng

A. $-\dfrac{4}{35}$ **B.** $-\dfrac{71}{20}$ **C.** $-\dfrac{79}{20}$ **D.** $-\dfrac{4}{5}$

Lời giải

Chọn D

Ta có: $f'(x)=x^3\left[f(x)\right]^2 \Rightarrow \dfrac{f'(x)}{f^2(x)}=x^3 \Rightarrow \int_1^2 \dfrac{f'(x)}{f^2(x)}\mathrm{d}x=\int_1^2 x^3\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow \left(-\dfrac{1}{f(x)}\right)\Bigg|_1^2=\dfrac{15}{4} \Leftrightarrow -\dfrac{1}{f(2)}+\dfrac{1}{f(1)}=\dfrac{15}{4} \Leftrightarrow f(1)=-\dfrac{4}{5}$.

Câu 11: Biết $I=\int_3^4 \dfrac{\mathrm{d}x}{x^2+x}=a\ln 2+b\ln 3+c\ln 5,$ với a,b,c là các số nguyên. Tính $S=a+b+c.$

A. $S=6$. **B.** $S=2$. **C.** $S=-2$. **D.** $S=0.$

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\dfrac{1}{x^2+x}=\dfrac{1}{x(x+1)}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}$.

Khi đó: $I=\int_3^4 \dfrac{\mathrm{d}x}{x^2+x}=\int_3^4\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x=\left(\ln x-\ln(x+1)\right)\Big|_3^4=(\ln 4-\ln 5)-(\ln 3-\ln 4)$

$=4\ln 2-\ln 3-\ln 5.$

Suy ra: $a=4, b=-1, c=-1$. Vậy $S=2.$

Câu 12: Cho hàm số $f(x)$ có $f(0)=0$ và $f'(x)=\cos x.\cos^2 2x, \forall x\in\mathbb{R}$. Khi đó $\int_0^\pi f(x)dx$ bằng

A. $\dfrac{1042}{225}$. **B.** $\dfrac{208}{225}$. **C.** $\dfrac{242}{225}$. **D.** $\dfrac{149}{225}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f'(x)=\cos x.\cos^2 2x, \forall x\in\mathbb{R}$ nên $f(x)$ là một nguyên hàm của $f'(x)$.

Có $\int f'(x)dx=\int \cos x.\cos^2 2xdx=\int \cos x.\dfrac{1+\cos 4x}{2}dx=\int\dfrac{\cos x}{2}dx+\int\dfrac{\cos x.\cos 4x}{2}dx$

$=\dfrac{1}{2}\int\cos xdx+\dfrac{1}{4}\int\left(\cos 5x+\cos 3x\right)dx=\dfrac{1}{2}\sin x+\dfrac{1}{20}\sin 5x+\dfrac{1}{12}\sin 3x+C$.

Suy ra $f(x)=\dfrac{1}{2}\sin x+\dfrac{1}{20}\sin 5x+\dfrac{1}{12}\sin 3x+C, \forall x\in\mathbb{R}$. Mà $f(0)=0\Rightarrow C=0$.

Do đó $f(x)=\dfrac{1}{2}\sin x+\dfrac{1}{20}\sin 5x+\dfrac{1}{12}\sin 3x, \forall x\in\mathbb{R}$. Khi đó:

$\int_0^\pi f(x)dx=\int_0^\pi\left(\dfrac{1}{2}\sin x+\dfrac{1}{20}\sin 5x+\dfrac{1}{12}\sin 3x\right)dx=\left(-\dfrac{1}{2}\cos x-\dfrac{1}{100}\cos 5x-\dfrac{1}{36}\cos 3x\right)\Bigg|_0^\pi=\dfrac{242}{225}$.

Câu 13: Cho hàm số $f\left(x\right)$ có $f\left(3\right)=3$ và $f'\left(x\right)=\dfrac{x}{x+1-\sqrt{x+1}}$ với $x>0$. Khi đó $\int\limits_3^8 f\left(x\right)dx$ bằng

A. 7. **B.** $\dfrac{197}{6}$. **C.** $\dfrac{29}{2}$. **D.** $\dfrac{181}{6}$

Lời giải

Chọn B

$f\left(x\right)$ là một nguyên hàm của hàm số $f'\left(x\right)=\dfrac{x}{x+1-\sqrt{x+1}}$

$$\int\frac{x}{x+1-\sqrt{x+1}}dx=\int\frac{\left(\sqrt{x+1}+1\right)\left(\sqrt{x+1}-1\right)}{\sqrt{x+1}\left(\sqrt{x+1}-1\right)}dx=\int\left(1+\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)dx=x+2\sqrt{x+1}+C$$

Suy ra $f\left(x\right)=x+2\sqrt{x+1}+C$

$f\left(3\right)=3\Leftrightarrow C=-4$

$f\left(x\right)=x+2\sqrt{x+1}-4$

Dùng máy tính bấm $\int\limits_3^8\left(x+2\sqrt{x+1}-4\right)dx=\dfrac{197}{6}$

Cách 2

Xét $\int f'\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\dfrac{x}{x+1-\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x$. Đặt $t=\sqrt{x+1}\Rightarrow x+1=t^2\Rightarrow x=t^2-1\Rightarrow \mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$.

Khi đó, $\int f'\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\dfrac{x}{x+1-\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x=\int\dfrac{t^2-1}{t^2-t}\cdot 2t\mathrm{d}t=\int\dfrac{\left(t-1\right).\left(t+1\right)}{t.\left(t-1\right)}\cdot 2t\mathrm{d}t=\int\left(2t+2\right)\mathrm{d}t$

$=t^2+2t+C=\left(x+1\right)+2\sqrt{x+1}+C$.

Mà $f\left(3\right)=3\Leftrightarrow\left(3+1\right)+2\sqrt{3+1}+C=3\Leftrightarrow C=-5$.

$\Rightarrow f\left(x\right)=\left(x+1\right)+2\sqrt{x+1}-5=x+2\sqrt{x+1}-4$.

$$\Rightarrow\int\limits_3^8 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_3^8\left(x+2\sqrt{x+1}-4\right)\mathrm{d}x=\left.\left(\frac{x^2}{2}+\frac{4}{3}\sqrt{\left(x+1\right)^3}-4x\right)\right|_3^8=36-\frac{19}{6}=\frac{197}{6}.$$

Câu 14: Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f\left(5\right)=1$ và $\int\limits_0^1 xf\left(5x\right)\mathrm{d}x=1$, khi đó $\int\limits_0^5 x^2f'\left(x\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. 15. **B.** 23. **C.** $\dfrac{123}{5}$. **D.** -25.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t=5x\Rightarrow\begin{cases}dx=\dfrac{dt}{5}\\ x=\dfrac{t}{5}\end{cases}$. Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=0$; $x=1\Rightarrow t=5$.

Khi đó: $\int_0^1 xf(5x)\mathrm{d}x = 1 \Leftrightarrow \int_0^5 \frac{t}{5}f(t)\frac{\mathrm{d}t}{5} = 1 \Leftrightarrow \int_0^5 t.f(t)\mathrm{d}t = 25 \Leftrightarrow \int_0^5 x.f(x)\mathrm{d}x = 25 \quad (*)$

Đặt: $\begin{cases} u = f(x) \\ \mathrm{d}v = x\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = f'(x)\mathrm{d}x \\ v = \dfrac{x^2}{2} \end{cases}$.

Ta có: $(*) \Leftrightarrow \frac{x^2}{2}.f(x)\Big|_0^5 - \frac{1}{2}\int_0^5 x^2.f'(x)\mathrm{d}x = 25$

$\Leftrightarrow \frac{25}{2} - \frac{1}{2}\int_0^5 x^2.f'(x)\mathrm{d}x = 25 \Leftrightarrow \int_0^5 x^2.f'(x)\mathrm{d}x = -25$.

Câu 15: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f(4) = 1$ và $\int_0^1 xf(4x)\mathrm{d}x = 1$, khi đó $\int_0^4 x^2 f'(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{31}{2}$. **B.** -16. **C.** 8. **D.** 14.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t = 4x \Rightarrow \mathrm{d}t = 4\mathrm{d}x$

Khi đó: $\int_0^1 xf(4x)\mathrm{d}x = \int_0^4 \frac{t.f(t)}{16}\mathrm{d}t = 1 \Rightarrow \int_0^4 xf(x)\mathrm{d}x = 16$

Xét: $\int_0^4 x^2 f'(x)\mathrm{d}x$

Áp dụng công thức tích phân từng phần ta có:

$\int_0^4 x^2 f'(x)\mathrm{d}x = x^2 f(x)\Big|_0^4 - \int_0^4 2x.f(x)\mathrm{d}x = 16.f(4) - 2\int_0^4 x.f(x)\mathrm{d}x = 16 - 2.16 = -16$

Câu 16: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\int_0^1 (x+1)f'(x)\mathrm{d}x = 10$ và $2f(1) - f(0) = 2$. Tính $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I = -12$ **B.** $I = 8$ **C.** $I = 1$ **D.** $I = -8$

Lời giải

Chọn D

Đặt $\begin{cases} u = x+1 \\ \mathrm{d}v = f'(x)\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ v = f(x) \end{cases}$. Khi đó $I = (x+1)f(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

Suy ra $10 = 2f(1) - f(0) - \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \Rightarrow \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = -10 + 2 = -8$

Vậy $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = -8$.

Câu 17: Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thoả mãn $f\left(x\right)+f\left(-x\right)=\sqrt{2+2\cos 2x}$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Tính $I=\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f\left(x\right)dx.$

A. $I=-6$ **B.** $I=0$ **C.** $I=-2$ **D.** $I=6$

Lời giải

Chọn D

Đặt $x=-t$. Khi đó $\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{0} f\left(x\right)dx=\int\limits_{\frac{3\pi}{2}}^{0} f\left(-t\right)d\left(-t\right)=-\int\limits_{\frac{3\pi}{2}}^{0} f\left(-t\right)dt=\int\limits_{0}^{\frac{3\pi}{2}} f\left(-x\right)dx$

Ta có: $I=\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f\left(x\right)d\left(x\right)=\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{0} f\left(x\right)d\left(x\right)+\int\limits_{0}^{\frac{3\pi}{2}} f\left(x\right)d\left(x\right)=\int\limits_{0}^{\frac{3\pi}{2}} f\left(-x\right)d\left(x\right)+\int\limits_{0}^{\frac{3\pi}{2}} f\left(x\right)d\left(x\right)$

Hay $I=\int\limits_{0}^{\frac{3\pi}{2}}\left(f\left(-x\right)+f\left(x\right)\right)d\left(x\right)=\int\limits_{0}^{\frac{3\pi}{2}}\sqrt{2+2\cos 2x}d\left(x\right)=\int\limits_{0}^{\frac{3\pi}{2}}\sqrt{2(1+\cos 2x)}d\left(x\right)$

$\Leftrightarrow I=\int\limits_{0}^{\frac{3\pi}{2}}\sqrt{4\cos^2 x}d\left(x\right)=2\int\limits_{0}^{\frac{3\pi}{2}}\left|\cos x\right|d\left(x\right)=2\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos xd\left(x\right)-2\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{3\frac{\pi}{2}}\cos xd\left(x\right)$

Vậy $I=2\sin x\big|_0^{\frac{\pi}{2}}-2\sin x\big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}=6.$

Câu 18: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa $xf(x^3)+f(1-x^2)=-x^{10}+x^6-2x,\forall x\in\mathbb{R}$. Khi đó $\int\limits_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $-\dfrac{17}{20}$. **B.** $-\dfrac{13}{4}$. **C.** $\dfrac{17}{4}$. **D.** -1.

Lời giải

Chọn B

Với $\forall x\in\mathbb{R}$ ta có : $xf(x^3)+f(1-x^2)=-x^{10}+x^6-2x$

$\Rightarrow x^2f(x^3)+xf(1-x^2)=-x^{11}+x^7-2x^2$ (*)

$\Rightarrow\int\limits_0^1 x^2f(x^3)\mathrm{d}x+\int\limits_0^1 xf(1-x^2)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\left(-x^{11}+x^7-2x^2\right)\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow\dfrac{1}{3}\int\limits_0^1 f(x^3)\mathrm{d}(x^3)-\dfrac{1}{2}\int\limits_0^1 f(1-x^2)\mathrm{d}(1-x^2)=-\dfrac{5}{8}$

$\Leftrightarrow\dfrac{1}{3}\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x+\dfrac{1}{2}\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=-\dfrac{5}{8}\Leftrightarrow\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=-\dfrac{3}{4}$

Mặt khác : (*) $\Rightarrow\int\limits_{-1}^0 x^2f(x^3)\mathrm{d}x+\int\limits_{-1}^0 xf(1-x^2)\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^0\left(-x^{11}+x^7-2x^2\right)\mathrm{d}x$

(*) $\Rightarrow\dfrac{1}{3}\int\limits_{-1}^0 f(x^3)\mathrm{d}\left(x^3\right)-\dfrac{1}{2}\int\limits_{-1}^0 f(1-x^2)\mathrm{d}\left((1-x)^2\right)=-\dfrac{17}{24}$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}\int_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x = -\frac{17}{24} \Rightarrow \int_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x = 3\left(\frac{1}{2}.\frac{-3}{4} - \frac{17}{24}\right) = -\frac{13}{4}.$$

Cách khác tham khảo câu 48:

Cách 1:

Từ giả thiết : $xf(x^3) + f(1-x^2) = -x^{10} + x^6 - 2x, \forall x \in \mathbb{R}$

ta suy ra $f\ \ x$ là bậc ba có $a = -1$. Nên $f\ \ x\ = -x^3 + bx^2 + cx + d$

Cho $x = 0 \Rightarrow f\ \ 1\ = 0 \Rightarrow b + c + d = 1.$

Cho $x = 1 \Rightarrow f\ \ 1\ + f\ \ 0\ = -2 \Rightarrow f\ \ 0\ = -2 \Rightarrow d = -2$

Cho $x = -1 \Rightarrow -f\ \ -1\ + f\ \ 0\ = 2 \Rightarrow f\ \ -1\ = -4 \Rightarrow 1 + b - c + d = -4$.

Suy ra $\Rightarrow b = 0; c = 3$. Từ đó có $f\ \ x\ = -x^3 + 3x - 2$.

$$\Rightarrow \int_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0}\ -x^3 + 3x - 2\ \mathrm{d}x = -\frac{13}{4}$$

Cách 2:

Ta có :

$xf(x^3) + f(1-x^2) = -x^{10} + x^6 - 2x, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x^2 f(x^3) + xf(1-x^2) + 2x^2 = -x^{11} + x^7, \forall x \in \mathbb{R}$

Suy ra $x^2 f(x^3) + xf(1-x^2) + 2x^2$ là hàm số lẻ

Do đó:

$$\int_{-1}^{0}\left[x^2 f(x^3) + xf(1-x^2) + 2x^2\right]dx = -\int_{0}^{1}\left[x^2 f(x^3) + xf(1-x^2) + 2x^2\right]dx = -\int_{0}^{1}\left(-x^{11} + x^7\right)dx = \frac{-1}{24}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}\int_{-1}^{0} f(x^3)\mathrm{d}(x^3) - \frac{1}{2}\int_{-1}^{0} f(1-x^2)\mathrm{d}(1-x^2) + \frac{2}{3} = \frac{1}{3}\int_{0}^{1} f(x^3)\mathrm{d}(x^3) - \frac{1}{2}\int_{0}^{1} f(1-x^2)\mathrm{d}(1-x^2) - \frac{2}{3} = -\frac{1}{24}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}\int_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x + \frac{4}{3} = -\frac{1}{3}\int_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x = \frac{15}{24}$$

$$\Rightarrow 2\int_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x - 3\int_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x + 8 = -5\int_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x = \frac{15}{4}$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x = -4 - \int_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x = -\frac{13}{4}$$

Cách 3:

Thay x bởi $-x$ ta có: $\begin{cases} xf(x^3) + f(1-x^2) = -x^{10} + x^6 - 2x, \forall x \in \mathbb{R} \\ -xf(-x^3) + f(1-x^2) = -x^{10} + x^6 + 2x, \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$

$\Rightarrow xf(x^3) + xf(-x^3) = -4x, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x^3) + f(-x^3) = -4, \forall x \in \mathbb{R}$

Thay x^3 bởi x ta có $f(x) + f(-x) = -4, \forall x \in \mathbb{R}$

Do đó $\int_{-1}^{0} f(x)dx + \int_{-1}^{0} f(-x)dx = \int_{-1}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{1} f(-x)dx = -4 \Rightarrow \int_{-1}^{1} f(x)dx = -4$

Từ giả thiết suy ra $xf(x^3) + f(1-x^2) = -x^{10} + x^6 - 2x, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}\int_{0}^{1} f(x^3)\mathrm{d}(x^3) - \frac{1}{2}\int_{0}^{1} f(1-x^2)\mathrm{d}(1-x^2) = -\frac{5}{8}$$

$\frac{1}{3}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=-\frac{5}{8}\Rightarrow\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=-\frac{3}{4}$

Vậy $\int_{-1}^0 f(x)\mathrm{d}x=-4-\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=-\frac{13}{4}$

Cách 4:

Do $f(0)=-2$, ta có: $xf(x^3)+f(1-x^2)=-x^{10}+x^6-2x,\forall x\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow\int_{-1}^a x^2 f(x^3)\mathrm{d}x+\int_{-1}^a xf(1-x^2)\mathrm{d}x=\int_{-1}^a\left(-x^{11}+x^7-2x^2\right)\mathrm{d}x$

$\Rightarrow\frac{1}{3}\int_{-1}^{a^3} f(x)\mathrm{d}(x)+\frac{1}{2}\int_{1-a^2}^{0} f(x)\mathrm{d}(x)=\int_{-1}^a\left(-x^{11}+x^7-2x^2\right)\mathrm{d}x$

Đặt $I=\int_{-1}^0 f(x)\mathrm{d}x$ và $J=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$

Cho $a=0\Rightarrow\frac{1}{3}I-\frac{1}{2}J=-\frac{17}{24}$

$a=1\Rightarrow\frac{1}{3}I+\frac{1}{3}J=-\frac{4}{3}$

Vậy $\int_{-1}^0 f(x)\mathrm{d}x=-4-\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=-\frac{13}{4}$

Cách trình bày khác

Cách 1 : Chọn $f(x)$ là hàm đa thức và giả sử n là bậc của $f(x)$.

Ta có : bậc của vế phải là 10. Bậc của $xf(x^3)$ là $3n+1$, bậc của $f(1-x^2)$ là $2n$, suy ra bậc của vế trái là $3n+1$. Khi đó : $3n+1=10\Leftrightarrow n=3$. Giả sử hệ số của x^3 trong $f(x)$ là a.

Mặt khác, hệ số bậc cao nhất của vế trái và vế phải lần lượt là a và -1 nên $a=-1$.

Cho $x=0$ thì $f(1)=0\Rightarrow f(x)=-(x-1)(x^2+bx+c)$.

Cho $x=1$ thì $f(1)+f(0)=-2\Rightarrow f(0)=-2\Rightarrow c=-2$.

Cho $x=-1$ thì $f(-1)=-4\Rightarrow b=1$.

Suy ra $f(x)=-(x-1)(x^2+x-2)$. Thử lại thấy thỏa.

Vậy $\int_{-1}^0 f(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^0\left[-(x-1)(x^2+x-2)\right]\mathrm{d}x=-\frac{13}{4}$.

Cách 2 : Đặt $I=\int_{-1}^0 f(x)\mathrm{d}x$ và $J=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$

ta có : $\begin{cases}xf(x^3)+f(1-x^2)=-x^{10}+x^6-2x,\forall x\in\mathbb{R}\\-xf(-x^3)+f(1-x^2)=-x^{10}+x^6+2x,\forall x\in\mathbb{R}\end{cases}$

$\Rightarrow xf(x^3)+xf(-x^3)=-4x,\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow f(x^3)+f(-x^3)=-4,\forall x\neq 0$

$\Rightarrow f(x)+f(-x)=-4,\forall x\in\mathbb{R}$ (do $f(0)=-2$)

Suy ra $\int_{-1}^0\left[f(x)+f(-x)\right]\mathrm{d}x=-4\Leftrightarrow\int_{-1}^0 f(x)\mathrm{d}x+\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=-4\Rightarrow I+J=-4$ (1)

Mặt khác, với $\forall x\in\mathbb{R}$ ta có : $xf(x^3)+f(1-x^2)=-x^{10}+x^6-2x$

$\Rightarrow x^2f(x^3)+xf(1-x^2)=-x^{11}+x^7-2x^2$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{0} x^2 f(x^3)\mathrm{d}x + \int_{-1}^{0} xf(1-x^2)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0}\left(-x^{11}+x^7-2x^2\right)\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}\int_{-1}^{0} f(x^3)\mathrm{d}(x^3) - \frac{1}{2}\int_{-1}^{0} f(1-x^2)\mathrm{d}(1-x^2) = -\frac{17}{24} \Rightarrow \frac{1}{3}I - \frac{1}{2}J = -\frac{17}{24}. \ (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $I = \int_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x = -\frac{13}{4}$.

Câu 19: Cho hàm số $f(x)$ thoả mãn $f(2) = -\frac{2}{9}$ và $f'(x) = 2x\left[f(x)\right]^2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng.

A. $-\frac{35}{36}$ **B.** $-\frac{2}{3}$ **C.** $-\frac{19}{36}$ **D.** $-\frac{2}{15}$

Lời giải

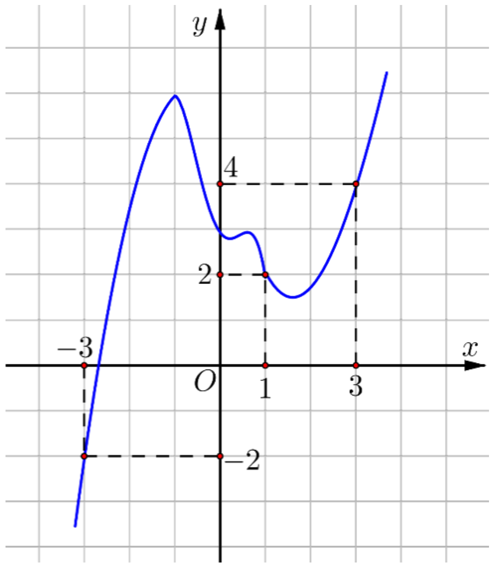
Chọn B

Ta có $f'(x) = 2x\left[f(x)\right]^2 \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{\left[f(x)\right]^2} = 2x \Rightarrow \int \frac{f'(x)}{\left[f(x)\right]^2}\mathrm{d}x = \int 2x\mathrm{d}x \Rightarrow -\frac{1}{f(x)} = x^2 + C$

$\Rightarrow f(x) = -\frac{1}{x^2+C}$. Theo giả thiết: $f(2) = -\frac{2}{9} \Rightarrow -\frac{2}{9} = -\frac{1}{4+C} \Rightarrow C = \frac{1}{2}$.

Vậy $f(x) = -\frac{1}{x^2+\frac{1}{2}} \Rightarrow f(1) = -\frac{2}{3}$.

Câu 20: Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Đặt $g(x) = 2f(x) - (x+1)^2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $g(-3) > g(3) > g(1)$ **B.** $g(1) > g(-3) > g(3)$

C. $g(3) > g(-3) > g(1)$ **D.** $g(1) > g(3) > g(-3)$

Lời giải

Chọn D

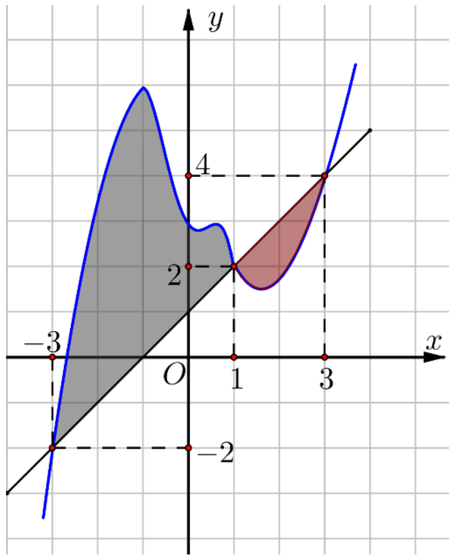
Ta có $g'(x) = 2f'(x) - 2(x+1)$

$g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=x+1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\pm 3 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-3		1		3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$g(-3)$	$\nearrow$	$g(1)$	$\searrow$	$g(3)$	$\nearrow$	$+\infty$

Suy ra $g(-3)<g(1)$ và $g(3)<g(1)$.



Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường: $y=f'(x),\ y=x+1,\ x=-3,\ x=1$

Gọi S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường: $y=x+1,\ y=f'(x),\ x=1,\ x=3$

Dựa vào hình vẽ, ta thấy: $S_1>S_2>0$.

Suy ra: $S_1-S_2>0$

$$\Rightarrow \int_{-3}^{1}\left[f'(x)-(x+1)\right]\mathrm{d}x-\int_{1}^{3}\left[(x+1)-f'(x)\right]\mathrm{d}x>0$$

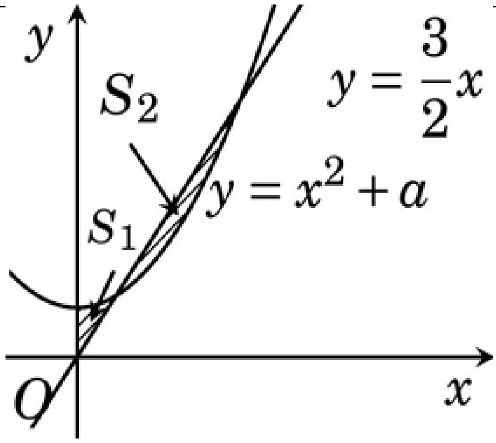
$$\Rightarrow \int_{-3}^{1}\left[f'(x)-(x+1)\right]\mathrm{d}x+\int_{1}^{3}\left[f'(x)-(x+1)\right]\mathrm{d}x>0$$

$$\Rightarrow \int_{-3}^{3}\left[f'(x)-(x+1)\right]\mathrm{d}x>0.$$

Khi đó: $g(3)-g(-3)=\int_{-3}^{3}g'(x)\mathrm{d}x=2\int_{-3}^{3}\left[f'(x)-(x+1)\right]\mathrm{d}x>0$

Từ và suy ra: $g(1)>g(3)>g(-3)$.

Câu 21: Cho đường thẳng $y=\frac{3}{2}x$ và parabol $y=x^2+a$ (a là tham số thực dương). Gọi S_1 và S_2 lần lượt là diện tích của 2 hình phẳng được gạch chéo trong hình vẽ bên. Khi $S_1=S_2$ thì a thuộc khoảng nào sau đây



A. $\left(\frac{1}{2};\frac{9}{16}\right)$. **B.** $\left(\frac{2}{5};\frac{9}{20}\right)$. **C.** $\left(\frac{9}{20};\frac{1}{2}\right)$. **D.** $\left(0;\frac{2}{5}\right)$

Lời giải

Chọn B

Xét phương trình tương giao: $\frac{3}{2}x = x^2 + a \Rightarrow x^2 - \frac{3}{2}x + a = 0\ (1)$

Để phương trình (1) có hai nghiệm dương phân biệt x_1, x_2 ($x_2 > x_1 > 0$)

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta = \frac{9}{4} - 4a > 0 \\ x_1 + x_2 = \frac{3}{2} > 0 \Rightarrow 0 < a < \frac{9}{16}. \\ x_1.x_2 = a > 0 \end{cases}$$

Ta có: $S_1 = \int\limits_0^{x_1}\left(x^2 - \frac{3}{2}x + a\right)dx = \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + ax\right)\Big|_0^{x_1} = \frac{1}{3}x_1^3 - \frac{3}{4}x_1^2 + ax_1$

$$S_2 = -\int\limits_{x_1}^{x_2}\left(x^2 - \frac{3}{2}x + a\right)dx = -\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + ax\right)\Big|_{x_1}^{x_2} = -\left(\frac{1}{3}x_2^3 - \frac{3}{4}x_2^2 + ax_2\right) + \left(\frac{1}{3}x_1^3 - \frac{3}{4}x_1^2 + ax_1\right)$$

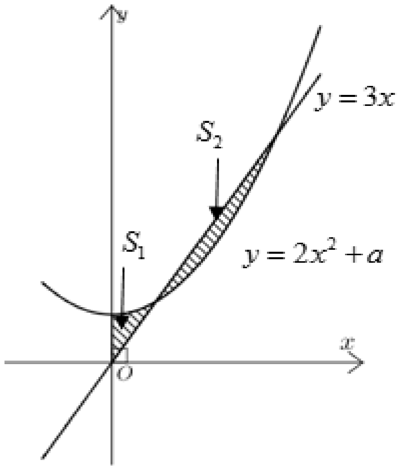
Do $S_1 = S_2 \Rightarrow \frac{1}{3}x_2^3 - \frac{3}{4}x_2^2 + ax_2 = 0$

mà x_2 là nghiệm của (1) nên $x_2^2 - \frac{3}{2}x_2 + a = 0 \Rightarrow a = -x_2^2 + \frac{3}{2}x_2\ (2)$

$\Rightarrow \frac{1}{3}x_2^3 - \frac{3}{4}x_2^2 + \left(-x_2^2 + \frac{3}{2}x_2\right).x_2 = 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{3}x_2^3 + \frac{3}{4}x_2^2 = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{9}{8}$ (loại nghiệm $x_2 = 0$)

Thay vào $(2) \Rightarrow a = \frac{27}{64} \in \left(\frac{2}{5};\frac{9}{20}\right)$.

Câu 22: Cho đường thẳng $y = 3x$ và parabol $y = 2x^2 + a$ (a là tham số thực dương). Gọi S_1 và S_2 lần lượt là diện tích của 2 hình phẳng được gạch chéo trong hình vẽ bên. Khi $S_1 = S_2$ thì a thuộc khoảng nào dưới đây?



A. $\left(\frac{4}{5};\frac{9}{10}\right)$. **B.** $\left(0;\frac{4}{5}\right)$. **C.** $\left(1;\frac{9}{8}\right)$. **D.** $\left(\frac{9}{10};1\right)$

Lời giải

Chọn A

Xét phương trình tương giao: $3x=2x^2+a \Rightarrow 2x^2-3x+a=0\ (1)$

Để phương trình (1) có hai nghiệm dương phân biệt x_1,x_2 ($x_2>x_1>0$)

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta=9-8a>0 \\ x_1+x_2=\frac{3}{2}>0 \Rightarrow 0<a<\frac{9}{8}. \\ x_1.x_2=\frac{a}{2}>0 \end{cases}$$

Ta có: $S_1=\int\limits_0^{x_1}\left(2x^2-3x+a\right)dx=\left.\left(\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+ax\right)\right|_0^{x_1} =\frac{2}{3}x_1^3-\frac{3}{2}x_1^2+ax_1$

$$S_2=-\int\limits_{x_1}^{x_2}\left(2x^2-3x+a\right)dx=-\left.\left(\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+ax\right)\right|_{x_1}^{x_2}=-\left(\frac{2}{3}x_2^3-\frac{3}{2}x_2^2+ax_2\right)+\left(\frac{2}{3}x_1^3-\frac{3}{2}x_1^2+ax_1\right)$$

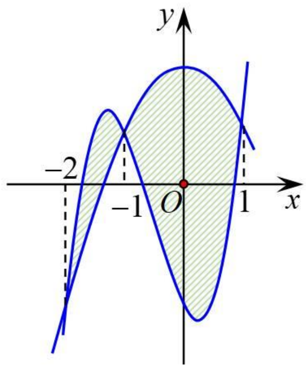
Do $S_1=S_2 \Rightarrow \frac{2}{3}x_2^3-\frac{3}{2}x_2^2+ax_2=0$

mà x_2 là nghiệm của (1) nên $2x_2^2-3x_2+a=0 \Rightarrow a=-2x_2^2+3x_2\ \ (2)$

$\Rightarrow \frac{2}{3}x_2^3-\frac{3}{2}x_2^2+\left(-2x_2^2+3x_2\right).x_2=0 \Leftrightarrow -\frac{4}{3}x_2^3+\frac{3}{2}x_2^2=0 \Rightarrow x_2=\frac{9}{8}$ (loại nghiệm $x_2=0$)

Thay vào $(2) \Rightarrow a=\frac{27}{32}\in\left(\frac{4}{5};\frac{9}{10}\right)$.

Câu 23: Cho hai hàm số $f\left(x\right)=ax^2+bx^2+cx-2$ và $g\left(x\right)=dx^2+ex+2$ (a , b , c , d , $e\in\mathbb{R}$). Biết rằng đồ thị của hàm số $y=f\left(x\right)$ và $y=g\left(x\right)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt là -2; -1; 1 (tham khảo hình vẽ).



Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho có diện tích bằng

A. $\dfrac{37}{6}$. **B.** $\dfrac{13}{2}$. **C.** $\dfrac{9}{2}$. **D.** $\dfrac{37}{12}$

Lời giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị $f\left(x\right)$ và $g\left(x\right)$ là

$ax^3+bx^2+cx-2=dx^2+3x+2 \Leftrightarrow a^3+\left(b-d\right)x^2+\left(c-e\right)x-4=0.$ (*)

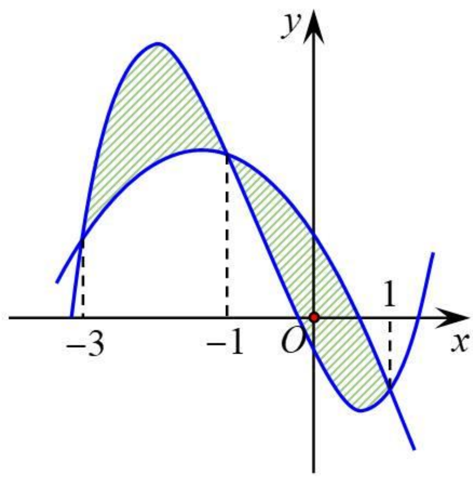
Do đồ thị của hai hàm số cắt nhau tại ba điểm suy ra phương trình $(*)$ có ba nghiệm $x=-2$; $x=-1$; $x=1$. Ta được

$ax^3+\left(b-d\right)x^2+\left(c-e\right)x-4=k\left(x+2\right)\left(x+1\right)\left(x-1\right)$.

Khi đó $-4=-2k \Rightarrow k=2$.

Vậy diện tích hình phẳng cần tìm là $\int\limits_{-2}^{1}\left|2\left(x+2\right)\left(x+1\right)\left(x-1\right)\right|\mathrm{d}x=\dfrac{37}{6}$.

Câu 24: Cho hai hàm số $f\left(x\right)=ax^3+bx^2+cx-\dfrac{1}{2}$ và $g\left(x\right)=dx^2+ex+1$ $\left(a,b,c,d,e\in\mathbb{R}\right)$. Biết rằng đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ và $y=g\left(x\right)$ cắt nhau tại 3 điểm có hoành độ lần lượt là -3; -1; 1. Hình phẳng giới hạn bởi 2 đồ thị đã cho có diện tích bằng



A. $\dfrac{9}{2}$ **B.** 8 **C.** 4 **D.** 5

Lời giải

Chọn C

Cách 1:

Xét phương trình $ax^3+bx^2+cx-\frac{1}{2}=dx^2+ex+1 \Leftrightarrow ax^3+(b-d)x^2+(c-e)x-\frac{3}{2}=0$ có 3 nghiệm lần lượt là -3; -1; 1 nên suy ra $\begin{cases}-27a+9(b-d)-3(c-e)-\frac{3}{2}=0\\ -a+(b-d)-(c-e)-\frac{3}{2}=0\\ a+(b-d)+(c-e)-\frac{3}{2}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b-d=\frac{3}{2}\\ a=\frac{1}{2}\\ c-e=\frac{-1}{2}\end{cases}$

Vậy $f(x)-g(x)=\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$.

Hình phẳng giới hạn bởi 2 đồ thị đã cho có diện tích bằng

$$S=\int_{-3}^{-1}\left(f(x)-g(x)\right)dx+\int_{-1}^{1}\left(g(x)-f(x)\right)dx$$

$$\Leftrightarrow S=\int_{-3}^{-1}\left(\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}\right)dx-\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}\right)dx=2+2=4.$$

Cách 2:

Ta có: $f(x)-g(x)=a(x+3)(x+1)(x-1)$.

Suy ra $a(x+3)(x+1)(x-1)=ax^3+(b-d)x^2+(c-d)x-\frac{3}{2}$

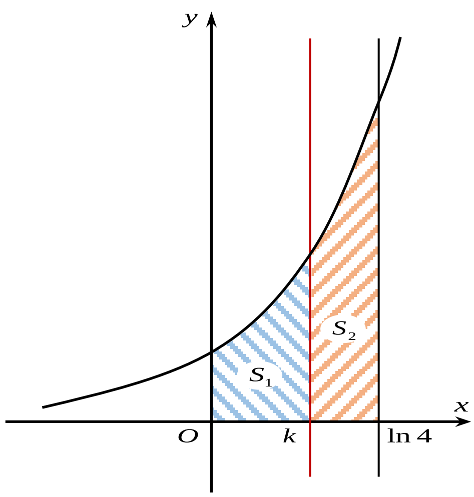
Xét hệ số tự do suy ra: $-3a=-\frac{3}{2}\Rightarrow a=\frac{1}{2}$.

Do đó: $f(x)-g(x)=\frac{1}{2}(x+3)(x+1)(x-1)$.

Diện tích bằng: $S=\int_{-3}^{-1}\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x+\int_{-1}^{1}\left[g(x)-f(x)\right]\mathrm{d}x$

$$\Leftrightarrow S=\frac{1}{2}\int_{-3}^{-1}(x+3)(x+1)(x-1)\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(x+3)(x+1)(x-1)\mathrm{d}x=4.$$

Câu 25: Cho hình thang cong (H) giới hạn bởi các đường $y=e^x$, $y=0$, $x=0$, $x=\ln 4$. Đường thẳng $x=k$ $(0<k<\ln 4)$ chia (H) thành hai phần có diện tích là S_1 và S_2 như hình vẽ bên. Tìm k để $S_1=2S_2$.



A. $k=\frac{2}{3}\ln 4$. **B.** $k=\ln 2$. **C.** $k=\ln\frac{8}{3}$ **D.** $k=\ln 3$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $S_1=\int\limits_0^k e^x\mathrm{d}x=e^x\Big|_0^k=e^k-1$ và $S_2=\int\limits_k^{\ln 4} e^x\mathrm{d}x=e^x\Big|_k^{\ln 4}=4-e^k$.

Lại có $S_1=2S_2\Leftrightarrow e^k-1=2\left(4-e^k\right)\Leftrightarrow k=\ln 3$.

Câu 26: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^3-x$ và đồ thị hàm số $y=x-x^2$.

A. $\frac{37}{12}$ **B.** $\frac{9}{4}$ **C.** $\frac{81}{12}$ **D.** 13

Lời giải

Chọn A

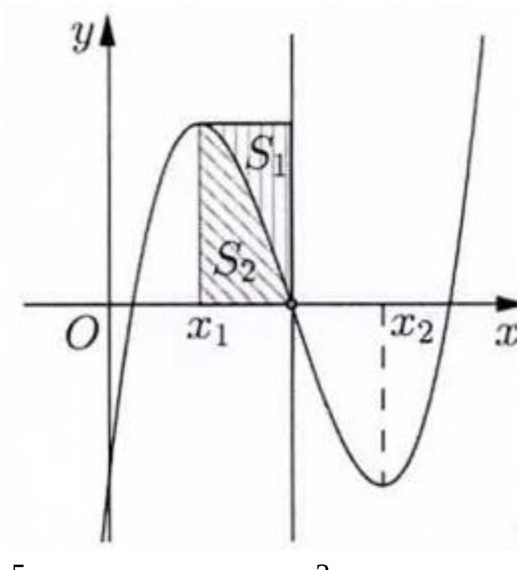
Phương trình hoành độ giao điểm $x^3-x=x-x^2\Leftrightarrow x^3+x^2-2x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\\x=-2\end{array}\right.$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^3-x$ và đồ thị hàm số $y=x-x^2$ là:

$$S=\int\limits_{-2}^{1}\left|x^3-x-\left(x-x^2\right)\right|dx=\left|\int\limits_{-2}^{0}\left(x^3+x^2-2x\right)dx\right|+\left|\int\limits_{0}^{1}\left(x^3+x^2-2x\right)dx\right|$$

$$=\left|\left(\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-x^2\right)\Bigg|_{-2}^{0}\right|+\left|\left(\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-x^2\right)\Bigg|_{0}^{1}\right|=\left|-\left(\frac{16}{4}-\frac{8}{3}-4\right)\right|+\left|\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-1\right)\right|=\frac{37}{12}.$$

Câu 27: Cho hàm số bậc ba $y=f\left(x\right)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên. Biết hàm số $f\left(x\right)$ đạt cực trị tại hai điểm x_1,x_2 thỏa mãn $x_2=x_1+2$ và $f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)=0$. Gọi S_1 và S_2 là diện tích của hai hình phẳng được gạch trong hình bên. Tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$ bằng



A. $\frac{3}{4}$. **B.** $\frac{5}{8}$. **C.** $\frac{3}{8}$. **D.** $\frac{3}{5}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, với $a>0 \Rightarrow f'(x)=3ax^2+2bx+c$.

Theo giả thiết ta có $f'(x_1)=f'(x_2)=0 \Rightarrow f'(x)=3a(x-x_1)(x-x_2)=3a(x-x_1)(x-x_1-2)$.

$\Rightarrow f'(x)=3a(x-x_1)^2-6a(x-x_1)$.

$\Rightarrow f(x)=\int f'(x)\mathrm{d}x=a(x-x_1)^3-3a(x-x_1)^2+C$.

Ta có $f(x_1)+f(x_2)=0 \Rightarrow f(x_1)+f(x_1+2)=0 \Rightarrow C+8a-12a+C=0 \Rightarrow C=2a$.

Do đó $f(x)=a(x-x_1)^3-3a(x-x_1)^2+2a=a\left[(x-x_1)^3-3(x-x_1)^2+2\right]$.

$$f(x)=0 \Rightarrow a\left[(x-x_1)^3-3(x-x_1)^2+2\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_1+1-\sqrt{3} \\ x=x_1+1 \\ x=x_1+1+\sqrt{3} \end{array}\right..$$

Suy ra $S_2=\int\limits_{x_1}^{x_1+1} f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{x_1}^{x_1+1} a\left[(x-x_1)^3-3(x-x_1)^2+2\right]\mathrm{d}x$

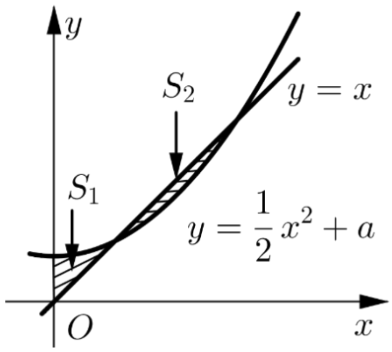
$$=\int\limits_{x_1}^{x_1+1} a\left[(x-x_1)^3-3(x-x_1)^2+2\right]\mathrm{d}(x-x_1)$$

$$=a\left[\frac{(x-x_1)^4}{4}-(x-x_1)^3+2(x-x_1)\right]\Bigg|_{x_1}^{x_1+1}=\frac{5a}{4}.$$

Mặt khác ta có $S_1+S_2=\int\limits_{x_1}^{x_1+1} f(x_1)\mathrm{d}x=f(x_1)\int\limits_{x_1}^{x_1+1}\mathrm{d}x=f(x_1)=2a \Rightarrow S_1=2a-S_2=\frac{3a}{4}$.

Vậy $\frac{S_1}{S_2}=\frac{3}{5}$.

Câu 28: Cho đường thẳng $y=x$ và Parabol $y=\frac{1}{2}x^2+a$ (a là tham số thực dương). Gọi S_1 và S_2 lần lượt là diện tích của hai hình phẳng được gạch chéo trong hình vẽ bên. Khi $S_1=S_2$ thì a thuộc khoảng nào sau đây?



A. $\left(\frac{3}{7};\frac{1}{2}\right)$. **B.** $\left(0;\frac{1}{3}\right)$. **C.** $\left(\frac{1}{3};\frac{2}{5}\right)$. **D.** $\left(\frac{2}{5};\frac{3}{7}\right)$.

Lời giải

Chọn C

Xét phương trình tương giao: $\frac{1}{2}x^2+a=x$

$\Rightarrow \frac{1}{2}x^2 - x + a = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 1-\sqrt{1-2a} \\ x_1 = 1+\sqrt{1-2a} \end{array}\right.$, với điều kiện $a < \frac{1}{2}$.

Đặt $t = \sqrt{1-2a}, (t \geq 0) \Rightarrow a = \frac{1-t^2}{2}$.

Xét $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + a$ và $\int g(x)dx = G(x) + C$.

Theo giả thiết ta có $S_1 = \int\limits_0^{x_1} g(x)dx = G(x_1) - G(0)$.

$S_2 = -\int\limits_{x_1}^{x_2} g(x)dx = G(x_1) - G(x_2)$.

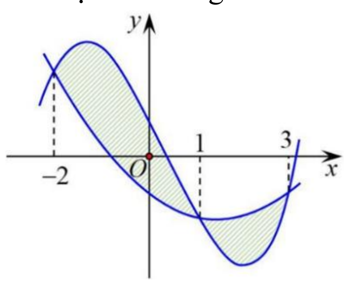
Do $S_1 = S_2 \Rightarrow G(x_2) = G(0) \Rightarrow \frac{1}{6}x_2^3 - \frac{1}{2}x_2^2 + ax_2 = 0$

$\Rightarrow x_2^2 - 3x_2 + 6a = 0 \Rightarrow (1+t)^2 - 3(1+t) + 6\left(\frac{1-t^2}{2}\right) = 0$

$\Rightarrow -2t^2 - t + 1 = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{2}$ và $t = -1$.

Khi $t = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{3}{8}$.

Câu 29: Cho hai hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + \frac{3}{4}$ và $g(x) = dx^2 + ex - \frac{3}{4}$, $(a, b, c, d, e \in \mathbb{R})$. Biết rằng đồ thị của hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt là -2; 1; 3. Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho có diện tích bằng



A. $\frac{253}{48}$ **B.** $\frac{125}{24}$ **C.** $\frac{125}{48}$ **D.** $\frac{253}{24}$

Lời giải

Chọn A

Ta có phương trình hoành độ giao điểm là:

$ax^3 + bx^2 + cx + \frac{3}{4} = dx^2 + ex - \frac{3}{4} \Leftrightarrow ax^3 + (b-d)x^2 + (c-e)x + \frac{3}{2} = 0$.

Đặt $h(x) = ax^3 + (b-d)x^2 + (c-e)x + \frac{3}{2}$

Dựa vào đồ thị ta có $h(x) = ax^3 + (b-d)x^2 + (c-e)x + \frac{3}{2}$ có ba nghiệm là $x = -2$; $x = 1; x = 3$.

Với $x = -2$ ta có $-8a + 4(b-d) - 2(c-e) = -\frac{3}{2}$, (1).

Với $x = 1$ ta có $a + (b-d) + (c-e) = -\frac{3}{2}$, (2).

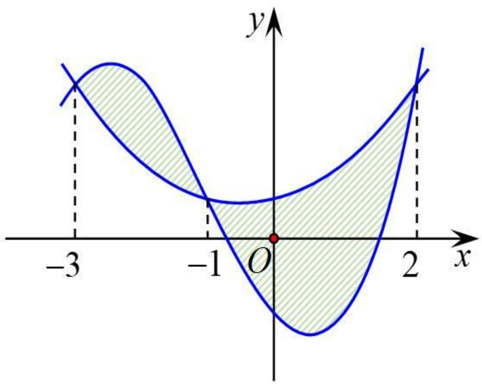
Với $x=3$ ta có $27a+9(b-d)+3(c-e)=-\dfrac{3}{2},\ (3)$.

Từ $(1),(2)$ và (3) ta có $\begin{cases}-8a+4(b-d)-2(c-e)=-\dfrac{3}{2}\\ a+(b-d)+(c-e)=-\dfrac{3}{2}\\ 27a+9(b-d)+3(c-e)=-\dfrac{3}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{1}{4}\\ b-d=-\dfrac{1}{2}\\ c-e=-\dfrac{5}{4}\end{cases}$.

Hay ta có

$S=\int\limits_{-2}^{3}\left|f(x)-g(x)\right|dx=\int\limits_{-2}^{1}\left|\dfrac{1}{4}x^3-\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{5}{4}x+\dfrac{3}{2}\right|dx+\int\limits_{1}^{3}\left|\dfrac{1}{4}x^3-\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{5}{4}x+\dfrac{3}{2}\right|dx=\dfrac{63}{16}+\dfrac{4}{3}=\dfrac{253}{48}$.

Câu 30: Cho hai hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx-1$ và $g(x)=dx^2+ex+\dfrac{1}{2}\ (a,b,c,d,e\in\mathbb{R})$. Biết rằng đồ thị của hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt $-3;-1;2$.



Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho có diện tích bằng

A. $\dfrac{253}{12}$.　　**B.** $\dfrac{125}{12}$.　　**C.** $\dfrac{253}{48}$.　　**D.** $\dfrac{125}{48}$

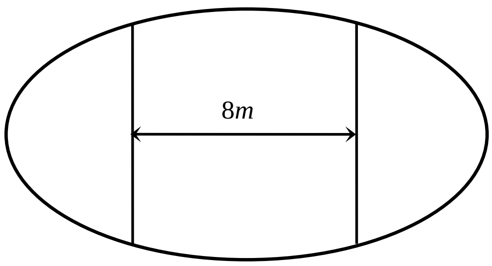
Lời giải

Chọn C

Vì phương trình $f(x)-g(x)=0$ có 3 nghiệm $-3;-1;2$ nên $f(x)-g(x)=a(x+3)(x-2)(x+1)$.

So sánh hệ số tự do ta được $-6a=-\dfrac{3}{2}\Rightarrow a=\dfrac{1}{4}$. Do đó $S=\int\limits_{-3}^{2}\left|\dfrac{1}{4}(x+3)(x+1)(x-2)\right|dx=\dfrac{253}{48}$.

Câu 31: Ông An có một mảnh vườn hình Elip có độ dài trục lớn bằng $16m$ và độ dài trục bé bằng $10m$. Ông muốn trồng hoa trên một dải đất rộng $8m$ và nhận trục bé của elip làm trục đối xứng (như hình vẽ). Biết kinh phí để trồng hoa là 100.000 đồng/$1m^2$. Hỏi ông An cần bao nhiêu tiền để trồng hoa trên dải đất đó? (Số tiền được làm tròn đến hàng nghìn.)

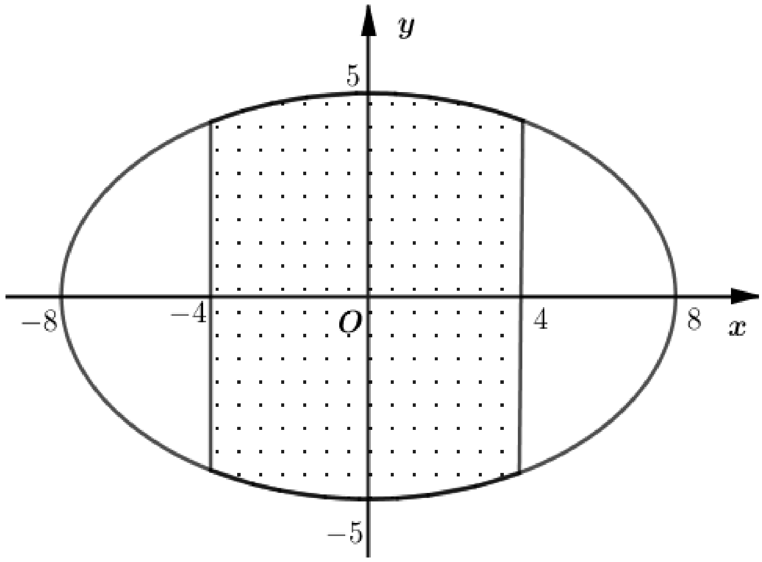


A. 7.862.000 đồng **B.** 7.653.000 đồng **C.** 7.128.000 đồng **D.** 7.826.000 đồng

Lời giải

Chọn B

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ



Giả sử elip có phương trình $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

Từ giả thiết ta có $2a=16\Rightarrow a=8$ và $2b=10\Rightarrow b=5$

Vậy phương trình của elip là $\dfrac{x^2}{64}+\dfrac{y^2}{25}=1\Rightarrow\left[\begin{array}{l} y=\dfrac{5}{8}\sqrt{64-x^2}\ \ (E_1) \\ y=-\dfrac{5}{8}\sqrt{64-x^2}\ \ (E_2)\end{array}\right.$

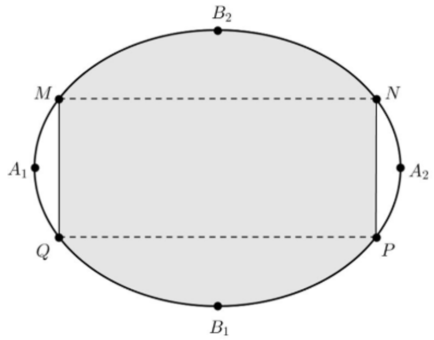
Khi đó diện tích dải vườn được giới hạn bởi các đường (E_1); (E_2); $x=-4$; $x=4$ và diện tích của dải vườn là $S=2\int\limits_{-4}^{4}\dfrac{5}{8}\sqrt{64-x^2}\mathrm{d}x=\dfrac{5}{2}\int\limits_{0}^{4}\sqrt{64-x^2}\mathrm{d}x$

Tính tích phân này bằng phép đổi biến $x=8\sin t$, ta được $S=\dfrac{40\pi}{3}+20\sqrt{3}$

Khi đó số tiền là $T=\left(\dfrac{40\pi}{3}+20\sqrt{3}\right).100000=7652891,82\simeq 7.653.000$.

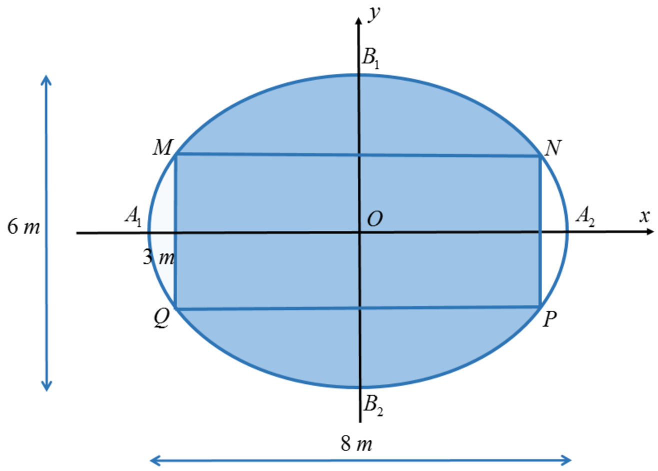
Câu 32: Một biển quảng cáo có dạng hình elip với bốn đỉnh A_1,A_2,B_1,B_2 như hình vẽ bên. Biết chi phí để sơn phần tô đậm là 200.000 đồng/ m^2 và phần còn lại là 100.000 đồng/ m^2. Hỏi số tiền để sơn theo cách trên gần nhất với số tiền nào dưới đây, biết $A_1A_2=8m, B_1B_2=6m$ và tứ giác MNPQ là hình chữ nhật có $MQ=3m$.

A. 7322000 đồng. **B.** 7213000 đồng. **C.** 5526000 đồng. **D.** 5782000 đồng.



Lời giải

Chọn A



Gắn hệ trục tọa độ Oxy có A_1A_2 trùng với trục Ox, B_1B_2 trùng với trục Oy, gốc tọa độ $O = A_1A_2 \cap B_1B_2$ (như hình vẽ).

Elip có độ dài trục lớn $2a = A_1A_2 = 8 \Leftrightarrow a = 4\ (m)$, độ dài trục nhỏ $2b = B_1B_2 = 6 \Leftrightarrow b = 3\ (m)$.

Suy ra phương trình chính tắc của elip là $\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1 \Leftrightarrow y = \pm\frac{3}{4}\sqrt{16 - x^2}$. Trong đó:

Do $MQ = 3 \Rightarrow y_M = \frac{MQ}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow x_M = -4\sqrt{1 - \frac{y_M^2}{9}} = -2\sqrt{3} \Rightarrow x_N = 2\sqrt{3}$.

Gọi S_1 là diện tích phần tô đậm của elip, S_2 là diện tích phần không bị tô đậm của elip và S là diện tích elip. Suy ra S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \frac{3}{4}\sqrt{16 - x^2}$, $y = -\frac{3}{4}\sqrt{16 - x^2}$, $x = -2\sqrt{3}$, $x = 2\sqrt{3}$

Ta có:

$+\ S = \pi ab = 12\pi\left(m^2\right)$.

$+\ S_1 = \int\limits_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}} \left| \frac{3}{4}\sqrt{16 - x^2} - \left(-\frac{3}{4}\sqrt{16 - x^2}\right) \right| \mathrm{d}x = 3\int\limits_{0}^{2\sqrt{3}} \sqrt{16 - x^2}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $x = 4\sin t \Rightarrow \mathrm{d}x = 4\cos t\mathrm{d}t$.

Khi $x = 0 \Rightarrow t = 0$. Khi $x = 2\sqrt{3} \Rightarrow t = \frac{\pi}{3}$

$\Rightarrow S_1 = 3\int\limits_0^{2\sqrt{3}} \sqrt{16-x^2}\ \mathrm{dx} = 3\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{16-16\sin^2 t}.4\cos t dt = \int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} 48\cos^2 t\mathrm{dt} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} 24\left(1+\cos 2\mathrm{t}\right)\mathrm{dt}$

$= \left(24t\ +\ 12\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = 8\pi + 6\sqrt{3}\left(m^2\right)$.

$\Rightarrow S_2 = S - S_1 = 4\pi - 6\sqrt{3}\left(m^2\right)$.

Suy ra chi phí để sơn biển quảng cáo là: $200000.S_1 + 100000.S_2 \approx 7322416$ (đồng).

Vậy số tiền để sơn biển quảng cáo gần nhất với $7\,322\,000$ đồng.

Câu 33. Biết $F\left(x\right)$ và $G\left(x\right)$ là hai nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)$ trên $\mathbb{R}$ và $\int\limits_0^5 f\left(x\right)\mathrm{d}x = F\left(5\right) - G\left(0\right) + a,\ \left(a>0\right)$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = F\left(x\right)$, $y = G\left(x\right)$, $x=0$ và $x=5$. Khi $S=20$ thì a bằng?

A. 4. **B.** 15. **C.** 25. **D.** 20.

Lời giải

Chọn A

Đặt $G\left(x\right) = F\left(x\right) + C$ (C là hằng số).

$\int\limits_0^5 f\left(x\right)\mathrm{d}x = F\left(5\right) - F\left(0\right) = F\left(5\right) - \left(G\left(0\right) - C\right) = F\left(5\right) - G\left(0\right) + C$

Suy ra $C = a$.

$S = \int\limits_0^5 \left|F\left(x\right) - G\left(x\right)\right|\mathrm{d}x = \int\limits_0^5 \left|a\right|\mathrm{d}x = \int\limits_0^5 a\mathrm{d}x = 5a$.

Theo giả thiết $5a = 20 \Leftrightarrow a = 4$