

SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM NĂM 2017

ĐỀ TÀI: PHƯƠNG PHÁP QUY NẠP TOÁN HỌC

I. MỞ ĐẦU

I.1 Lý do chọn đề tài:

- “Phương pháp quy nạp toán học” là phương pháp được sử dụng xuyên suốt chương trình phổ thông. Song tài liệu nghiên cứu còn ít, chương trình được phân phối ở lớp 11 và chỉ có 1 tiết. Trong khi thực tế giảng dạy học sinh trên lớp những năm qua và yêu cầu của bộ môn đòi hỏi phải nghiên cứu, vận dụng phương pháp để giải các bài toán liên quan đến số tự nhiên lại rất cần thiết ở bậc phổ thông. Chính vì thế Tôi đã tìm các bài toán và sắp xếp một cách có hệ thống và lời giải thích hợp để giảng dạy để học sinh sử dụng “Phương pháp quy nạp toán học”. Ngày một tốt hơn.

I.2 Mục đích nghiên cứu:

- “Phương pháp quy nạp toán học” là tài liệu bổ trợ kiến thức cho các em học sinh trong quá trình học tập và ôn thi học sinh giỏi.

- Thông qua hệ thống ví dụ và bài tập. Học sinh thấy được sự vận dụng của “Phương pháp quy nạp toán học” vào các bài toán chứng minh đẳng thức, bất đẳng thức và chia hết liên quan đến số tự nhiên n trong chương trình bậc phổ thông.

I.3 Đối tượng nghiên cứu:

- Học sinh lớp 11, 12

I.4. Phương pháp nghiên cứu:

- Phương pháp thống kê.
- Phương pháp nêu vấn đề,

I.5 Những điểm mới của sáng kiến kinh nghiệm:

- Chỉ rõ “Phương pháp quy nạp” được sử dụng để giải toán trong những trường hợp nào.

- Hệ thống ví dụ, bài tập trong sáng kiến kinh nghiệm thể hiện sự kết nối các đại lượng kiến thức trong chương trình bậc phổ thông một cách thống nhất.

- Từ thực tế giảng dạy, với kinh nghiệm của bản thân trong quá trình dạy và học, từ đó tiến hành thực hiện đề tài sáng kiến cho năm 2016-2017 với nội dung: Cụ thể như sau:

Vấn đề 1: Dùng phương pháp quy nạp để chứng minh một đẳng thức

Vấn đề 2: Dùng phương pháp quy nạp để chứng minh một bất đẳng thức

Vấn đề 3 : Dùng quy nạp toán học để chứng minh một biểu thức dạng U_n chia hết cho một số tự nhiên

Trong sáng kiến này, các bước cơ bản để giải một bài toán sẽ được đưa ra từ các ví dụ minh họa, sau đó là ứng dụng vào giải một số bài toán trong các nâng cao trong chương trình sách giáo khoa và học sinh giỏi môn toán.

- Mặc dù rất tâm huyết với Sáng kiến kinh nghiệm “**Phương pháp quy nạp toán học**”, nhưng do thời gian và khả năng có hạn nên bài viết khó tránh khỏi những thiếu sót. Tôi rất mong nhận được sự góp ý kiến của quý Thầy, Cô,

bạn đồng nghiệp và các em học sinh để Sáng kiến kinh nghiệm được hoàn thiện hơn và trở thành tài liệu có ích trong giảng dạy và học tập.

II. NỘI DUNG SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM:

1. Cơ sở lý luận của sáng kiến kinh nghiệm:

- Các bài toán liên quan đến số tự nhiên n , học sinh được học từ bậc tiểu học ,trung học cơ sở được giải quyết trên các cơ sở biến đổi hoặc dựa trên một số dấu hiệu cho trước .Không thỏa mãn cho những thắc mắc của học sinh là các bài toán liên quan đến số tự nhiên có thật sự là đúng với mọi số tự nhiên hay không ? hay chỉ đúng trong trường hợp hữu hạn.

- Các kiến thức được sử dụng trong sáng kiến này đều thuộc phạm vi kiến thức được trình bày trong Sách giáo khoa Đại số và Giải tích lớp 11.

- Các ví dụ được tổng hợp từ các bài toán lấy từ sách giáo khoa,sách bài tập và một số sách tham khảo hiện hành và một số đề do tôi tự làm.

2. Thực trạng nghiên cứu trước khi áp dụng sáng kiến kinh nghiệm:

-Trong quá trình giảng dạy bài “ **Phương pháp quy nạp toán học**” thuộc Giải tích lớp 11 chương III “Dãy số,Cấp số cộng và Cấp số nhân” .Tôi nhận thấy rằng: giữa kiến thức cơ bản sách giáo khoa lớp 11 và một số bài toán liên quan đến số tự nhiên trong chương Đạo hàm,Số phức có khoảng cách rất gần gũi và không khó. Nhưng đối với học sinh thì thật không dễ chút nào.

Nguyên nhân là:

+Chương trình sách giáo khoa trình bày cô đọng và đơn giản nhất để học sinh dễ học.

+Thời gian học và rèn luyện kỹ năng vận dụng ít.

+Trong khi đó các bài toán đòi hỏi kiến thức vận dụng tổng hợp và liên môn.

+Các sách bồi dưỡng về chuyên đề Quy nạp toán học chưa có và chưa được quan tâm nên rất khó với các em học sinh .

- Để giải quyết khó khăn này.Tôi đã thực nghiệm đề tài : “**Phương pháp quy nạp toán học**” nhằm hệ thống các kiến thức liên quan từ dễ đến khó, sắp xếp trật tự phù hợp với từng đối tượng học sinh để các em dễ tiếp thu .

3. Giải pháp và tổ chức thực hiện

- Đề tài “**Phương pháp quy nạp toán học.**” được đưa vào ngay khi học sinh học bài “**Phương pháp quy nạp toán học.**” thuộc Giải tích lớp 11,Chương III “Dãy số,cấp số cộng,cấp số nhân” trong giờ bài tập, trong các tiết tự chọn và tiếp tục học ở các chương Đạo hàm lớp 11,Số phức trong chương trình lớp 12.

- Cùng phương pháp giải cụ thể giúp học sinh hứng thú, say mê học và giải quyết các vấn đề phát sinh trong quá trình làm toán.

- Nhìn tổng thể học sinh nắm được mối liên hệ giữa các đơn vị kiến thức liên quan thành một thể thống nhất và mục đích chương trình sách giáo khoa rõ ràng,khoa học.

a. Hình thức luyện tập trên lớp có sự hướng dẫn của Thầy giáo

- Thực hiện trong phạm vi một số buổi chữa bài tập của các buổi học chính khoá ,tự chọn với các bài tập ở mức độ vừa phải. Thầy giáo đưa ra phương

pháp giải, ví dụ mẫu và hệ thống bài tập, học sinh nêu các lời giải có thể có được của bài toán. Sau đó cho học sinh tìm tòi, phát hiện một số vấn đề xung quanh bài giải ở mức độ đơn giản.

- Thực hiện một số buổi trong công tác bồi dưỡng đối với những học sinh khá hơn ở mức độ những bài toán cao hơn.

b. Hình thức tự nghiên cứu các bài toán có sự hướng dẫn của Thầy giáo

Hình thức này cũng cần thực hiện liên tục trong quá trình học tập của học sinh, làm cho khả năng tư duy, tính sáng tạo của học sinh ngày càng được tăng lên.

4. Nội dung sáng kiến kinh nghiệm.

PHƯƠNG PHÁP QUY NẠP TOÁN HỌC

Các kiến thức vận dụng.

Phương pháp quy nạp thực sự có hiệu lực với lớp các bài toán chứng minh một mệnh đề phụ thuộc vào số tự nhiên $n \in \mathbb{N}$.

Phương pháp giải

Để chứng minh một mệnh đề $Q(n)$ đúng với mọi $n \geq p$, ta thực hiện 2 bước theo thứ tự:

Bước 1 : Kiểm tra mệnh đề là đúng với $n = p$

Bước 2 : Giả sử mệnh đề đúng với $n = k \geq p$, ta phải chứng minh rằng mệnh đề đúng với $n = k + 1$.

CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Vấn đề 1:: Dùng phương pháp qui nạp để chứng minh một đẳng thức .

Ví dụ 1 : Chứng minh rằng : với mọi số tự nhiên $n \geq 2$, ta có :

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}.b + \dots + a.b^{n-2} + b^{n-1})$$

Giải

Ta chứng minh đẳng thức bằng phương pháp qui nạp.

Khi $n=2$ thì VT = $a^2 - b^2$, VP = $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$.

Vậy đẳng thức đúng với $n=2$.

Giả sử đẳng thức đúng với mọi $n = k \geq 2$,

tức là : $a^k - b^k = (a - b)(a^{k-1} + a^{k-2}.b + \dots + a.b^{k-2} + b^{k-1})$

Ta chứng minh đẳng thức cũng đúng với $n=k+1$, tức là :

$$a^{k+1} - b^{k+1} = (a-b)(a^k + a^{k-1}.b + \dots + a.b^{k-1} + b^k)$$

Thật vậy : áp dụng giả thiết qui nạp, ta có :

$$a^{k+1} - b^{k+1} = a^{k+1} - a^k.b + a^k.b - b^{k+1} = a^k(a-b) + b(a^k - b^k)$$

$$= a^k(a-b) + b(a-b)(a^{k-1} + a^{k-2}.b + \dots + a.b^{k-2} + b^{k-1})$$

$$= (a-b) [a^k + b(a^{k-1} + a^{k-2}.b + \dots + a.b^{k-2} + b^{k-1})]$$

$$= (a-b)(a^k + a^{k-1}.b + \dots + a.b^{k-1} + b^k)$$

Vậy mệnh đề đúng với mọi số tự nhiên $n \geq 2$.

Mọi số tự nhiên $n \geq 1$, ta có: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Giải

Khi $n = 1$ $VT = 1^2 = 1$; $VP = \frac{1(1+1)(2+1)}{6} = 1$ nên mệnh đề đúng với $n=1$.

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (k-1)^2 + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$
$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + [(k+1) - 1]^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{6}$$
$$\begin{aligned} \text{Thật vậy : } 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (k-1)^2 + k^2 + (k+1)^2 &= \left[1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (k-1)^2 + k^2 \right] + (k+1)^2 \\ &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = (k+1) \left[\frac{2k^2 + 7k + 6}{6} \right] = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} \end{aligned}$$

Ví dụ 3: Tìm số hạng tổng quát của Dãy số sau : $u_1 = 3, u_{n+1} = 2u_n; (n \geq 1)$

“Giải toán Đại số và Giải tích 11-Trần Thành Minh”

Giải

Ta có :

$$\begin{array}{l}
 u_1 = 3 = 3.2^0 \\
 u_2 = 2.u_1 = 2.3 = 6 = 3.2^1 \\
 u_3 = 2.u_2 = 2.6 = 12 = 3.2^2 \\
 \dots\dots\dots \\
 u_n = 3.2^{n-1}
 \end{array}$$

Khi $n = 1$ ta có $u_1 = 3$. Mệnh đề đúng với $n=1$ đúng.

Ta phải chứng minh mệnh đề đúng với $n = k+1$, tức là: $u_{k+1} = 3.2^k$

Thật vậy : $u_{k+1} = 2.u_k = 3.2.2^{k-1} = 3.2^k$

Chú ý : Sau ví dụ ba ta rút ra phương pháp giải chung cho dạng toán tìm số hạng tổng quát của một Dãy số gồm hai bước :

Bước 1 : *Tìm vài số hạng đầu của Dãy*

Bước 2 : Dự đoán số hạng tổng quát, rồi chứng minh bằng qui nạp.

Ví dụ 4: Tính đạo hàm cấp n của hàm số sau : $y = \frac{1}{1+x}$

“Giải toán Đại số và Giải tích 11-Trần Thành Minh”

Giải

$$\text{Ta có : } y' = -\frac{1}{(1+x)^2}; y'' = \frac{1.2}{(1+x)^3}; y''' = \frac{-1.2.3}{(1+x)^4} \dots$$

$$\text{Dự đoán : } y^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$$

Bây giờ ta tìm $y^{(n)}$ bằng quy nạp như sau :

$$\text{Với } n=1 \text{ ta có } y' = \frac{(-1)^1 1!}{(1+x)^{1+1}} = -\frac{1}{(1+x)^2} \text{ Mệnh đề đúng với } n=1.$$

$$\text{Giả sử mệnh đề đúng với } n=k (k \geq 1) \text{ ta có : } y^{(k)} = \frac{(-1)^k k!}{(1+x)^{k+1}}$$

$$\text{Thật vậy: } y^{(k+1)} = y^{(k)} = \left[(-1)^k k! \right] \left[\frac{(-1)(k+1)(1+x)^k}{(1+x)^{2(k+1)}} \right] = \frac{(-1)^{k+1} (k+1)!}{(1+x)^{(k+1)+1}}$$

$$\text{Vậy mệnh đề đã cho đúng với mọi } n \in \mathbb{N} \text{ hay } y^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$$

Chú ý : Phương pháp giải chung cho dạng toán này có thể phân làm hai bước như sau :

Bước 1 : Tính đạo hàm cấp một, đạo hàm cấp hai, đạo hàm cấp ba,..., cho tới khi dự đoán được đạo hàm cấp n.

Bước 2 : Chứng minh đạo hàm cấp n đúng bằng qui nạp toán học .

$$\text{Ví dụ 5 : CMR : Nếu số phức } z \text{ thỏa mãn : } \frac{1}{z} + z = 2 \cos \alpha \Rightarrow \frac{1}{z^n} + z^n = 2 \cos \alpha .$$

Giải

$$\text{Với } n=1, VT = \frac{1}{z} + z, VP = 2 \cos \alpha . \text{ Mệnh đề đúng với } n=1.$$

$$\text{Giả sử mệnh đề đúng với } n=k (k \geq 1), \text{ tức là : } \frac{1}{z^k} + z^k = 2 \cos k\alpha$$

Ta phải chứng minh mệnh đề cũng đúng với $n=k+1$, tức là:

$$\frac{1}{z^{k+1}} + z^{k+1} = 2 \cos (k+1)\alpha$$

$$\begin{aligned} \text{Thật vậy : } \frac{1}{z^{k+1}} + z^{k+1} &= \left(\frac{1}{z^k} + z^k \right) \left(\frac{1}{z} + z \right) - \left(z^{k-1} + \frac{1}{z^{k-1}} \right) \\ &= 2 \cos k\alpha \cdot 2 \cos \alpha - 2 \cos (k-1)\alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 4 \frac{1}{2} [\cos(k-1)\alpha + \cos(k+1)\alpha] - 2\cos(k-1)\alpha \\
&= 2\cos(k+1)\alpha
\end{aligned}$$

Vậy mệnh đề đúng với $n = k+1$, hay $\forall n \geq 1$ ta có $\frac{1}{z} + z = 2\cos\alpha \Rightarrow \frac{1}{z^n} + z^n = 2\cos\alpha$

Ví dụ 6: CMR mọi n thuộc $\mathbb{N}^*$ ta có : $\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \dots + \frac{n}{3^n} = \frac{3}{4} - \frac{2n+3}{4 \cdot 3^n}$.

“Bài tập Đại số và giải tích 11 trang 86”

Giải

Với $n = 1$, ta có : $VT = \frac{1}{3}; VP = \frac{3}{4} - \frac{5}{12}$. Mệnh đề đúng với $n=1$.

Giả sử mệnh đề đúng với $n = k$ ($k \geq 1$), tức là : $\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \dots + \frac{k}{3^k} = \frac{3}{4} - \frac{2k+3}{4 \cdot 3^k}$. (*)

Ta phải chứng minh mệnh đề đúng với $n = k+1$, tức là :

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \dots + \frac{k}{3^k} + \frac{(k+1)}{3^{k+1}} = \frac{3}{4} - \frac{2(k+1)+3}{4 \cdot 3^{k+1}}$$

Thật vậy : Cộng vào hai vế của (*) một lượng là : $\frac{k+1}{3^{k+1}}$, ta sẽ được

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \dots + \frac{k}{3^k} + \frac{(k+1)}{3^{k+1}} = \frac{3}{4} - \frac{2(k+1)+3}{4 \cdot 3^{k+1}}$$

Vậy mệnh đề đúng với $n = k+1$, hay $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ta có $\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \dots + \frac{n}{3^n} = \frac{3}{4} - \frac{2n+3}{4 \cdot 3^n}$,

Ví dụ 7: Chứng minh rằng: $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots \sqrt{2}}} = 2 \cos \frac{\pi}{2^{n+1}}$.

“Bài tập Đại số và Giải tích 11-Trang 89”

Giải:

Gọi $C_n = 2 \cos \frac{\pi}{2^{n+1}}$

Khi $n=1$. ta có $VT = \sqrt{2}, VP = 2 \cos \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$. Mệnh đề đã cho đúng với $n=1$.

Giả sử mệnh đề đúng với $n=k \geq 1$, tức là $C_k = 2 \cos \frac{\pi}{2^{k+1}}$

Ta phải chứng minh mệnh đề đúng với $n=k+1$ tức là : $C_{k+1} = 2 \cos \frac{\pi}{2^{k+2}}$

Thật vậy từ giả thiết quy nạp ta có :

$$C_{k+1} = \sqrt{2 + C_k} = \sqrt{2 + 2 \cos \frac{\pi}{2^{k+1}}} = \sqrt{4 \cos^2 \frac{\pi}{2^{k+2}}} = 2 \cos \frac{\pi}{2^{k+2}} \quad (\text{Vì } \cos \frac{\pi}{2^{k+2}} > 0).$$

Vậy mệnh đề đã cho đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Hay $n \in N^*$ ta có $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots \sqrt{2}}} = 2 \cos \frac{\pi}{2^{n+1}}$

Ví dụ 8: Chứng minh rằng đạo hàm cấp n của hàm số $y = \sin(ax + b)$ là:

$$y^{(n)} = a^n \sin\left(ax + b + \frac{n\pi}{2}\right), \quad \forall n \in N^*$$

Giải:

Với $n=1$ ta có: $y' = a \cos(ax + b) = a \sin\left(ax + b + \frac{\pi}{2}\right)$

Với $n=2$ ta có: $y'' = a^2 \cos\left(ax + b + \frac{\pi}{2}\right) = a^2 \sin(ax + b + \pi)$

Dự đoán đạo hàm cấp n của hàm số $y = \sin(ax + b)$ là $y^{(n)} = a^n \sin\left(ax + b + \frac{n\pi}{2}\right)$

Với $n=1$ ta có: $y' = a \cos(ax + b) = a \sin\left(ax + b + \frac{\pi}{2}\right)$. Mệnh đề đúng với $n=1$

Giả thiết mệnh đề đúng với $n=k (k \geq 1)$ ta có: $y^{(k)} = a^k \cdot \sin\left(ax + b + \frac{k\pi}{2}\right)$

Ta phải chứng minh mệnh đề đúng với $n=k+1$ tức là:

$$y^{(k+1)} = a^{k+1} \cdot \sin\left(ax + b + \frac{(k+1)\pi}{2}\right)$$

Thật vậy:

$$y^{(k+1)} = [y^{(k)}]' = \left[a^k \cdot \sin\left(ax + b + \frac{k\pi}{2}\right) \right]' = a^{k+1} \cdot \cos\left(ax + b + \frac{k\pi}{2}\right) = a^{k+1} \cdot \sin\left(ax + b + \frac{(k+1)\pi}{2}\right)$$

Vậy. Đạo hàm cấp n của hàm số $y = \sin(ax + b)$ là $y^{(n)} = a^n \sin\left(ax + b + \frac{n\pi}{2}\right), \quad \forall n \in N^*$

Bài tập đề nghị.

Bài 1: CMR: $\forall n \in N^*$, ta có: $1+3+5+\dots+(2n-1) = n^2$

Bài 2: CMR: $\forall n \in N^*$, ta có: $1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

Bài 3: CMR: $\forall n \in N^*$, ta có: $1^3+2^3+\dots+n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

Bài 4: CMR: Mọi $a > 0, a \neq 1, x_1, x_2, \dots, x_n > 0$, ta có hệ thức sau:

$$\log_a(x_1 x_2 \dots x_n) = \log_a x_1 + \log_a x_2 + \dots + \log_a x_n$$

Bài 5: CMR: $\in \mathbb{N}, n \geq 1$, với mọi cặp số (a, b) , ta có công thức sau đây, gọi là Công thức khai triển nhị thức Niuton.

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^k a^{n-k} b^k + \dots + C_n^n b^n$$

Bài 6: CMR : $S_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$

Bài 7: CMR: Với mọi số tự nhiên $n \geq 1$, ta có đẳng thức : $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Bài 8: CMR : Mọi n thuộc N ta có: $\left(1 - \frac{4}{1}\right) \left(1 - \frac{4}{9}\right) \left(1 - \frac{4}{25}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{(2n-1)^2}\right) = \frac{1+2n}{1-2n}$

Bài 9: Tính đạo hàm cấp n của các hàm số sau :

a) $y = \ln(1+x)$ b) $y = \frac{1}{x(1-x)}$ c) $y = \sin ax$ ($a = \text{const}$) d) $y = \sin^2 x$

Bài 10: Tìm tổng số $S_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$

Bài 11: Tìm số hạng tổng quát của các Dãy số sau :

a) $u_1 = 3, u_{n+1} = 2 + \frac{1}{2} u_n$ b) $u_1 = a, u_{n+1} = a + b u_n$

Vấn đề 2: Dùng phương pháp qui nạp để chứng minh một bất đẳng thức.

Ví dụ 1: Chứng minh bất đẳng thức Bec-nu-li (Bernoulli). Nếu $h > 0$, với mọi số tự nhiên $n \geq 2$ ta có: $(1+h)^n \geq 1+nh$ “Đại số và giải tích 11-2000”

Giải

Nếu $n=2$, ta có : $(1+h)^2 = 1+2h+h^2 > 1+2h$ (vì $h^2 > 0$). Vậy mệnh đề đúng với $n=2$. Giả sử mệnh đề đúng đến $n=k$ ($k \geq 2$), tức là : $(1+h)^k > 1+kh$ (2).

Ta phải chứng minh mệnh đề cũng đúng đến $n=k+1$. Hay $(1+h)^{k+1} > 1+(k+1)h$.

$$\begin{aligned} \text{Thật vậy : } (1+h)^{k+1} &= (1+h)(1+h)^k \stackrel{(do 2)}{\geq} (1+h)(1+kh) = 1+h+kh+kh^2 \\ &= 1+h(1+k)+kh^2 > 1+h(1+k). \text{ (vì } kh^2 > 0) \end{aligned}$$

Vậy mệnh đề đúng với $n=k+1$. hay $\forall n \geq 2$. ta có $(1+h)^n \geq 1+nh$.

Ví dụ 2 : Chứng minh rằng nếu $x > 0$ thì với mọi số tự nhiên n ta đều có :

$$e^x > 1+x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

“Chuyên đề Hàm số -Trần Phương”

Giải

Xét hàm số: $f_n(x) = e^x - \left(1+x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}\right)$

Ta phải chứng minh : $\forall x > 0, n \in N : f_n(x) > 0$ (2.1)

Thật vậy, ta có : $\forall n, f_n(0) = 0$

Xét $f_1(x) = e^x - (1+x)$

Ta có $f_1'(x) = e^x - 1 > 0, (\forall x > 0), f_1(x)$ tăng với mọi $x > 0 \Rightarrow f_1(x) > f_1(0)$

Vậy Công thức (2.1) đúng với $n=1$.

Giả sử bất đẳng thức đúng với $n=k$.

Ta có: $\forall x > 0, f_k(x) = e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^k}{k!}\right) > 0 \quad (2.2)$

Ta phải chứng minh: $\forall x > 0, f_{k+1}(x) = e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{k+1}}{(k+1)!}\right) > 0$

Thật vậy ta có: $f_{k+1}'(x) = e^x - \left(1 + \frac{2x}{2!} + \dots + \frac{k \cdot x^{k-1}}{k!} + \frac{(k+1)x^k}{(k+1)!}\right)$

$$f_{k+1}'(x) = e^x - \left(1 + x + \dots + \frac{x^{k-1}}{k-1!} + \frac{x^k}{k!}\right) = f_k(x)$$

Theo (2.2) có $f_k(x) > 0 \Rightarrow f_{k+1}(x) > 0 \Rightarrow f_{k+1}(x)$ tăng với

$$\forall x > 0 \rightarrow f_{k+1}(x) > f_{k+1}(0) = 0$$

Vậy bất đẳng thức đúng với $n=k+1$ nên cũng đúng với mọi số tự nhiên n .

Ví dụ 3: Cho hàm số f xác định với mọi x và thỏa mãn điều kiện:

$$f(x+y) \geq f(x).f(y) \quad \text{với mọi } x, y \quad (3)$$

«Chuyên đề Hàm số -Hồng Đức »

CMR: Với mọi số thực x và mọi số tự nhiên n ta có $f(x) \geq \left[f\left(\frac{x}{2^n}\right)\right]^{2^n} \quad (3)$

Giải

Trong BĐT $f(x+y) \geq f(x).f(y)$ thay x và y bằng $\frac{x}{2}$, ta được:

$$f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) \geq f\left(\frac{x}{2}\right).f\left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow f(x) \geq \left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2$$

Vậy bất đẳng thức $f(x) \geq \left[f\left(\frac{x}{2^n}\right)\right]^{2^n}$ đúng với $n=1$

Giả sử bất đẳng thức đúng với $n=k, (k \geq 1)$. Ta có: $f(x) \geq \left[f\left(\frac{x}{2^k}\right)\right]^{2^k}$

Ta chứng minh bất đẳng thức đúng với $n=k+1$, tức là: $f(x) \geq \left[f\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right)\right]^{2^{k+1}}$

Thật vậy ta có:

$$f\left(\frac{x}{2^k}\right) = f\left(\frac{x}{2^{k+1}} + \frac{x}{2^{k+1}}\right) \geq \left[f\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right)\right]^2 \Rightarrow \left[f\left(\frac{x}{2^k}\right)\right]^{2^k} \geq \left[\left[f\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right)\right]^2\right]^{2^{k-1}}$$

$$\Rightarrow \left[f\left(\frac{x}{2^k}\right)\right]^{2^k} \geq \left[f\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right)\right]^{2^{k+1}}$$

Do tính chất bắc cầu ta có được : $f(x) \geq \left[f\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right)\right]^{2^{k+1}}$

Bất đẳng thức đúng với $n = k+1$ nên cũng đúng với mọi số tự nhiên n .

Ví dụ 4: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, ta có : $|\sin n\alpha| \leq n|\sin \alpha|$.

“Giải toán Đại số và Giải tích 11-Trần Thành Minh”

Giải

Với $n = 1$, $VT = |\sin 1.\alpha| = 1.|\sin \alpha| = VP$ nên mệnh đề đúng với $n=1$.

Giả sử mệnh đề đúng với $n = k (k \geq 1)$, ta có : $|\sin k\alpha| \leq k|\sin \alpha|$.

Ta phải chứng minh mệnh đề đúng với $n = k+1$, tức là: $|\sin(k+1)\alpha| \leq (k+1)|\sin \alpha|$.

Thật vậy, ta có :

$$|\sin(k+1)\alpha| = |\sin k\alpha \cos \alpha + \cos k\alpha \sin \alpha| \leq |\sin k\alpha| \cdot |\cos \alpha| + |\cos k\alpha| \cdot |\sin \alpha| \leq |\sin k\alpha| + |\sin \alpha| \leq k|\sin \alpha| + |\sin \alpha| \leq (k+1)|\sin \alpha|$$

Vậy mệnh đề đúng với $n = k+1$, nên $\forall n \in \mathbb{N}^*$, ta có : $|\sin n\alpha| \leq n|\sin \alpha|$.

Ví dụ 5: Chứng minh rằng Dãy số $u_1 = 2, u_{n+1} = \frac{u_n + 1}{2} (\forall n \geq 1)$ là dãy số giảm và bị chặn.

“Giải toán Đại số và Giải tích 11-Trần Thành Minh”

Giải

Giải:

Để chứng minh dãy số đã cho là dãy số là giảm. Ta chứng minh bằng phương pháp qui nạp. Ta phải chứng minh : $u_{n+1} < u_n, (\forall n \in \mathbb{N}^*)$.

Khi $n = 1$ thì $u_2 = \frac{u_1 + 1}{2} = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2} < 2 = u_1$. Mệnh đề đúng với $n=1$.

Giả sử mệnh đề đúng với $n = k, (k \geq 1)$, tức là : $u_{k+1} < u_k$.

Ta phải chứng minh mệnh đề đúng với $n=k+1$: $u_{k+2} < u_{k+1}$

$$\text{Thật vậy : } u_{k+2} = \frac{u_{k+1} + 1}{2} \stackrel{(do 5.1)}{<} \frac{u_k + 1}{2} = u_{k+1}$$

Vậy mệnh đề đã cho đúng với $n = k+1$ nên cũng đúng với mọi n thuộc $\mathbb{N}^*$.

Chúng minh Dãy đó cho là bị chặn dưới. Ta dùng phương pháp qui nạp để chứng minh : $u_n > 1, (\forall n \in \mathbb{N}^*)$

Khi $n=1$, $u_1 = 2 > 1$ nên mệnh đề đúng với $n=1$.

Giả sử mệnh đề đúng với $n = k$, $(k \geq 1)$ nghĩa là $u_k > 1$.

Ta phải chứng minh : $u_{k+1} > 1$

Thật vậy : $u_{k+1} = \frac{u_k + 1}{2} > \frac{1+1}{2} = 1$. Vậy dãy số đã cho bị chặn dưới bởi 1.

Chú ý : Khi gặp dạng toán chứng minh Dãy số đơn điệu và bị chặn ta thực hiện như sau :

Bước 1 : Dùng phương pháp qui nạp để chứng minh dãy số là đơn điệu

Bước 2 : Dự đoán số M trong trường hợp dãy bị chặn trên bởi M và Số m trong trường hợp dãy số bị chặn dưới bởi m .Sau đó dùng phương pháp qui nạp để chứng minh dãy bị chặn bởi trên bởi M hoặc bị chặn dưới bởi m trong trường hợp ngược lại .

Ví dụ 6: Chứng minh rằng : $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < n, \forall n \in \mathbb{N}, n > 2$.

Giải

Khi $n=3$ bất đẳng thức đã cho trở thành $\left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 = \frac{64}{27} < 3$.Mệnh đề đúng với $n=3$.

Giả sử mệnh đề đúng với $n = k$ ($k \geq 3$) ta có $\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k < k$

Ta chứng minh mệnh đề đúng với $n = k + 1$, tức là : $\left(1 + \frac{1}{k+1}\right)^{k+1} < k + 1$

Thật vậy : $\left(1 + \frac{1}{k+1}\right)^{k+1} = \left(1 + \frac{1}{k+1}\right)^k \cdot \left(1 + \frac{1}{k+1}\right) < \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k \cdot \left(1 + \frac{1}{k}\right) < k \cdot \left(1 + \frac{1}{k}\right) = k + 1$

Vậy mệnh đề đúng với $n = k + 1$ nên nó cũng đúng với mọi n .

Hay $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < n, \forall n \in \mathbb{N}, n > 2$

Ví dụ 7: Cho $x_1, x_2, \dots, x_n$ là các số dương. Chứng minh rằng :

$$\frac{x_1}{x_2 + x_n} + \frac{x_2}{x_3 + x_1} + \frac{x_3}{x_4 + x_2} + \dots + \frac{x_{n-1}}{x_n + x_{n-2}} + \frac{x_n}{x_1 + x_{n-1}} \geq 2, n \geq 4.$$

« Chuyên đề Hàm số Hồng Đức »

Giải

Với $n = 4$, bất đẳng thức có dạng :

$$\frac{x_1}{x_2 + x_4} + \frac{x_2}{x_3 + x_1} + \frac{x_3}{x_4 + x_2} + \frac{x_4}{x_1 + x_3} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{x_1 + x_3}{x_2 + x_4} + \frac{x_2 + x_4}{x_1 + x_3} \geq 2 \text{ mệnh đề đúng với } n=4$$

Giả sử bất đẳng thức đúng với $n = k$ ($k \geq 4$).

$$\text{Tức là : } \frac{x_1}{x_2 + x_k} + \frac{x_1}{x_3 + x_1} + \dots + \frac{x_{k-1}}{x_k + x_{k-2}} + \frac{x_k}{x_1 + x_{k-1}} \geq 2.$$

Ta chứng minh bất đẳng thức đúng với $n = k+1$.

Do vai trò bình đẳng giữ các x_i ($i = 1, 2, \dots, k+1$), nên không giảm tính tổng quát của bài toán ta có thể giả sử $x_{k+1} = \min\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, tức là :

$$x_{k+1} > 0, x_{k+1} \leq x_k, x_{k+1} \leq x_1 \quad \text{Do vậy ta có :}$$

$$S_{k+1} = \frac{x_1}{x_2 + x_{k+1}} + \frac{x_2}{x_3 + x_1} + \dots + \frac{x_k}{x_{k+1} + x_{k-1}} + \frac{x_{k+1}}{x_1 + x_k} > \frac{x_1}{x_2 + x_k} + \frac{x_2}{x_3 + x_1} + \dots + \frac{x_k}{x_1 + x_{k-1}}.$$

$$\text{Do: } \frac{x_1}{x_2 + x_{k+1}} \geq \frac{x_1}{x_2 + x_k}; \frac{x_k}{x_{k+1} + x_{k-1}} \geq \frac{x_k}{x_1 + x_{k-1}}; \frac{x_{k+1}}{x_1 + x_k} > 0.$$

Từ đó suy ra $S_{k+1} > 2$.

Vậy bất đẳng thức đúng với $n = k+1$ nên cũng đúng với mọi $n \geq 4$

Ví dụ 8 : Chứng minh rằng : $\forall n \geq 1$, ta có $\frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{2.4.6.2n} < \frac{1}{\sqrt{2k+1}}$.

“Giải toán Đại số và Giải tích 11-Trần Thành Minh”

Giải

Khi $n = 1$, thì (1) trở thành : $\frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}}$. Mệnh đề đúng với $n=1$.

Giả sử mệnh đề đúng với $n = k$ ($k \geq 1$), nghĩa là : $\frac{1.3.5 \dots (2k-1)}{2.4.6 \dots 2n} < \frac{1}{\sqrt{2k+1}}$.

Ta phải chứng minh mệnh đề đúng với $n = k+1$, tức là :

$$\frac{1.3.5 \dots (2k-1)(2k+1)}{2.4.6 \dots 2k(2k+2)} < \frac{1}{\sqrt{2k+3}}$$

Thật vậy: $\frac{(2k+1)}{2k+2} < \frac{\sqrt{2k+1}}{\sqrt{2k+3}}$ (bất đẳng thức luôn đúng vì sau khi bình phương hai

vế, quy đồng, chuyển vế ta thu được bất đẳng thức tương đương: $1 > 0$. mệnh đề đúng.

Ta có: $\frac{1.3.5 \dots (2k-1)(2k+2)}{2.4.6 \dots 2k(2k+2)} < \frac{1}{\sqrt{2k+1}} \cdot \frac{\sqrt{2k+1}}{\sqrt{2k+3}} = \frac{1}{\sqrt{2k+3}}$ mệnh đề đúng với $n=k+1$

Vậy : $\forall n \geq 1, \frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{2.4.6.2n} < \frac{1}{\sqrt{2k+1}}$

Bài tập đề nghị .

Bài 1. Cho $0 < \alpha < \frac{\pi}{4(n-1)}$ Chứng minh rằng : $\tan n\alpha > n \tan \alpha$

Bài 2. Chứng minh rằng : với $a > 0$ thì $\sqrt{a + \sqrt{a + \dots + \sqrt{a}}} < \frac{1 + \sqrt{4a+1}}{2}$

Bài 3. Chứng minh rằng : $n^{n+1} > (n+1)^n, (n \geq 3)$

Bài 4. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n ta có :

$$a) 1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \dots + \sqrt{n} \leq n \sqrt{\frac{n+1}{n}}$$

$$b) 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \leq 2\sqrt{n} - 1$$

$$c) 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^n - 1} > \frac{n}{2}$$

Bài 5. Chứng minh bất đẳng thức $(1 + 2^2)(1 + 2^{2^2})(1 + 2^{2^3}) \times \dots \times (1 + 2^{2^n}) < \frac{1}{3} \cdot 2^{2^{n+1}}$

Bài 6. Chứng minh với mọi số nguyên dương n , ta có :

$$a) \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \quad b) (2n! < 2^{2n} (n!))$$

Bài 7. Chứng minh rằng : $\forall n \in \mathbb{N}$ ta có $\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \dots + \frac{n}{3^n} < \frac{3}{4}$.

Bài 8. Chứng minh rằng dãy số u_n xác định bởi : $u_1 = \sqrt{2}, u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$,

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ là tăng và bị chặn trên .

Bài 9. Với $n \geq 3$. Chứng minh rằng: $n^{n+1} = (n+1)^n$

Bài 10. Chứng minh mọi số tự nhiên n khác 0 ta luôn có : $2 \leq \left(\frac{1}{n}\right)^n < 3$

Bài 11. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n lớn hơn 5 ta có : $\left(\frac{n}{2}\right)^n > n! > \left(\frac{n}{3}\right)^n$

Bài 12. Với $n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng: $\frac{(2n)!}{(n!)^2} \geq \frac{4n}{n+1}$,

Bài 13. Cho n số dương $a_1, a_2, \dots, a_n$ thỏa mãn $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n = 1$.

Chứng minh rằng : $a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq n$ (*). Dấu “=” xảy ra khi nào ?

Bài 14. Chứng minh mọi số tự nhiên $n > 1$, ta có : $(n+1)\cos \frac{\pi}{n+1} - n \cos \frac{\pi}{n} > 1$

Bài 15. Cho n là số tự nhiên và $0 < (n+1)\alpha < \frac{\pi}{2}$.

Chứng minh rằng: $(1 - \cos^n \alpha)(1 + \cos^n \alpha) < \tan n\alpha \cdot \tan \alpha$

Bài 16. $\forall n \in \mathbb{N}, n > 1$. Chứng minh rằng: $\frac{1}{n+1} \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{14}$

Vấn đề 3 : Dùng qui nạp toán học để chứng minh một biểu thức dạng U_n chia hết cho một số tự nhiên .

Ví dụ 1: Chứng minh rằng $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = n^3 + 3n^2 + 5n$ chia hết cho 3.

Giải

Với $n = 1$ ta có : $a_1 = 1^3 + 3 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 = 9 : 3$ đúng .

Giả sử mệnh đề đúng với $n = k$, ($k \geq 1$), tức là : $a_k = k^3 + 3k^2 + 5k : 3$

Ta phải chứng minh mệnh đề đúng với $n = k+1$, nghĩa là :

$$a_{k+1} = (k+1)^3 + 3(k+1)^2 + 5(k+1) : 3$$

$$\begin{aligned} \text{Thật vậy :} \quad a_{k+1} &= k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 3k^2 + 6k + 3 + 5k + 5 \\ &= \underbrace{k^3 + 3k^2 + 5k}_{:3} + \underbrace{3k^2 + 9k + 9}_{:3} : 3 \end{aligned}$$

Vậy mệnh đề đúng với $n = k+1$, nên cũng đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Ví dụ 2: Chứng minh rằng $\forall n \geq 2$, ta có : $a_n = (n+1)(n+2) \dots (n+n) : 2^n$

Giải

Khi $n = 2$, ta có : $a_2 = (2+1)(2+2) : 2^2$ đúng

Giả sử mệnh đề đúng với $n = k$, ($k \geq 2$) , tức là : $a_k = (k+1)(k+2) \dots (k+k) : 2^k$

Ta phải chứng minh mệnh đề đúng với $n = k+1$, nghĩa là :

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= (k+1+1)(k+1+2) \dots (k+k+1+1) : 2^{k+1} \\ &= (k+2)(k+3) \dots (k+k+2) = (k+2)(k+3) \dots (k+k)(k+k+1)(k+k+2) \\ &= \underbrace{[(k+1)(k+2)(k+3) \dots (k+k)]}_{:2^k} \cdot \underbrace{2 \cdot (k+k+1)}_{:2} : 2^{k+1} \end{aligned}$$

Vậy mệnh đề đúng với $n = k+1$, nên mệnh đề đúng với $\forall n \geq 2$.

Ví dụ 3: Chứng minh rằng : $a_n = 3^{3n+3} - 26n - 27 : 676, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Giải

Với $n = 1$, ta có : $a_1 = 3^{3 \cdot 1 + 3} - 26 \cdot 1 - 27 = 676 : 676$ nên mệnh đề đúng.

Giả sử mệnh đề đúng với $n = k$, $k \geq 1$ tức là : $a_k = 3^{3k+3} - 26k - 27 : 676$.

Ta phải chứng minh mệnh đề đúng với $n = k+1$,

$$\text{tức là : } a_{k+1} = 3^{3(k+1)+3} - 26(k+1) - 27 : 676$$

$$\text{Thật vậy : } a_{k+1} = 3^{3(k+1)+3} - 26(k+1) - 27 = \underbrace{3^{3k+3}}_{:676 \text{ (do 3.1)}} - \underbrace{26k}_{:676} - \underbrace{27}_{:676} + \underbrace{676k}_{:676} + \underbrace{676}_{:676}$$

Vậy mệnh đề đúng với $n = k+1$, nên mệnh đề đúng với mọi $n \geq 1$.

Ví dụ 4: Chứng minh rằng: $\forall n \geq 1 : 5^{2n-1} \cdot 2^{n+1} + 3^{n+1} \cdot 2^{2n-1} : 38$.

Giải

Với $n = 1$, ta có : $5^{2 \cdot 1 - 1} \cdot 2^{1+1} + 3^{1+1} \cdot 2^{2 \cdot 1 - 1} = 5 \cdot 4 + 9 \cdot 2 = 38$ nên mệnh đề đúng với $n=1$.

Giả sử mệnh đề đúng với $n = k$, ($k \geq 1$) tức là : $5^{2k-1} \cdot 2^{k+1} + 3^{k+1} \cdot 2^{2k-1} : 38$.

Ta phải chứng minh mệnh đề đúng với $n = k+1$, tức là $5^{2k+2-1} \cdot 2^{k+1+1} + 3^{k+1+1} \cdot 2^{2k+2-1} : 38$

Thật vậy :

$$\begin{aligned} 5^{2k+2-1} \cdot 2^{k+1+1} + 3^{k+1+1} \cdot 2^{2k+2-1} &= 25 \cdot 5^{2k-1} \cdot 2 \cdot 2^{k+1} + 3 \cdot 3^{k+1} \cdot 4 \cdot 2^{k+1} = 50 \cdot 5^{2k-1} \cdot 2^{k+1} + 12 \cdot 3^{k+1} \cdot 2^{2k-1} \\ &= 50(5^{2k-1} \cdot 2^{k+1} + 3^{k+1} \cdot 2^{2k-1}) - 38 \cdot 3^{k+1} \cdot 2^{2k-1} \text{ Chia hết cho } 38. \end{aligned}$$

Vậy mệnh đề đúng với $n = k+1$, nên cũng đúng với $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Ví dụ 5: Chứng minh rằng : $\forall n \geq 1$, ta có : $3n^4 - 14n^3 + 21n^2 - 10n : 24$.

Giải

Với $n = 1$ ta có : $3 - 14 + 21 - 10 = 0 : 24$, nên (5) đúng.

Giả sử mệnh đề đúng với $n = k$, $k \geq 1$, nghĩa là : $3k^4 - 14k^3 + 21k^2 - 10k : 24$.

Ta phải chứng minh mệnh đề đúng với $n = k+1$, nghĩa là:

$$3(k+1)^4 - 14(k+1)^3 + 21(k+1)^2 - 10(k+1) : 24$$

Thật vậy :

$$\begin{aligned} 3(k+1)^4 - 14(k+1)^3 + 21(k+1)^2 - 10(k+1) &= 3(k^4 + 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1) - 14(k^3 + 3k^2 + 3k + 1) \\ &\quad + 21(k^2 + 2k + 1) - 10(k+1) = 3k^4 - 14k^3 + 21k^2 - 10k + 12k(k-1)(k-1) : 24 \end{aligned}$$

$\begin{matrix} \text{do } 5 \cdot 1 & & 24 \end{matrix}$

Vậy mệnh đề đúng với $n = k+1$, nên với $\forall n \geq 1$, $3n^4 - 14n^3 + 21n^2 - 10n : 24$

Bài tập đề nghị.

Bài 1: CMR $\forall n \in \mathbb{N}^* : 16^n - 15n - 1 : 225$

Bài 2: CMR $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 13^n - 1 : 6$

Bài 3: CMR $\forall n \in \mathbb{N}, 12^{2n+1} + 11^{n+2} : 133$

Bài 4: CMR $\forall n \in \mathbb{N} : 4 \cdot 3^{2n+2} + 32n - 36 : 64$

Bài 5: CMR $\forall n \in \mathbb{N} : n^3 + 2n$ chia hết cho 3

Bài 6: CMR $(n+1)(n+2) \dots (2n)$ chia hết cho $1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1), n \in \mathbb{N}$.

5. Hiệu quả của sáng kiến kinh nghiệm:

- Sau khi tôi dạy một số tiết trên lớp và một số buổi bồi dưỡng thì từ cho tiến hành kiểm tra khả năng tiếp thu kiến thức của học sinh trên các lớp tôi dạy thì thu được kết quả sau:

Bài kiểm tra: (15 phút)

Câu 1: Biểu thức nào sau đây cho ta giá trị đúng của tổng: $S = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$.

A. $\frac{n(n+1)}{2}$ B. $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ C. $\frac{n(n+1)(2n+1)(3n+1)}{24}$ D. $\left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$

Câu 2: Biểu thức nào sau đây cho ta giá trị của tổng $S = 1 - 2 + 3 - 4 + \dots - 2n + (2n + 1)$

- A. 1 B. 0 C. n D. n+1

Câu 3: Với mọi số nguyên dương n, Tổng $S = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$

- A. $\frac{1}{n+1}$ B. $\frac{n}{n+1}$ C. $\frac{n}{n+2}$ D. $\frac{n+1}{n+2}$.

Câu 4: Với mọi số nguyên dương n, Tổng $S_n = 3^{2n} - 1$

- A. 6 B. 3 C. 12 D. 8

Câu 5: Bất đẳng thức nào sau đây đúng? Với mọi số tự nhiên n thỏa mãn $n \geq 3$ thì:

- A. $2^n < n$ B. $2^n < 2n$ C. $2^n < n+1$ D. $2^n > 2^n + 1$

Câu 6: Bất đẳng thức nào sau đây đúng? Với mọi số nguyên dương n thì:

- A. $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > 2\sqrt{n}$ B. $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > 3\sqrt{n}$
C. $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$ D. $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > 4\sqrt{5}$

Câu 7: Với mọi số nguyên dương $n \geq 1$. Bất đẳng thức nào sau đây là đúng?

- A. $3^n > 4n + 1$ B. $3^n > 4n + 2$ C. $3^n > 3n + 2$ D. $3^n > 3n + 5$

Câu 8: Với mọi số nguyên dương n. Tổng $S_n = n^3 + 11n$ chia hết cho:

- A. 6 B. 4 C. 9 D. 12

Câu 9: Với mọi số nguyên dương n. Tổng $S_n = n^3 + 3n^2 + 5n + 3$ chia hết cho:

- A. 3 B. 4 C. 5 D. 7.

Câu 10. Với mọi số nguyên dương n. Tổng $S_n = 4^{2n} - 3^{2n} - 7$ chia hết cho:

- A. $2^3.3$ B. $2^2.3.7$ C. $2.3^2.7$ D. $2.3.7^2$

Kết quả thu được:

Lớp	Năm học	Số học sinh đạt yêu cầu
11A	2016-2017	21/31 (67,7 %)
11B	2016-2017	23/32 (71,9%)
11C	2016-2017	25/30 (83,3%)
11D	2016-2017	25/29 (88,2%)

C. KIẾN NGHỊ, ĐỀ XUẤT

- Cần tăng cường hơn nữa hệ thống ví dụ và bài tập trên sách giáo khoa, tài liệu tham khảo để học sinh có thể tự nghiên cứu và vận dụng Đề tài: “**Phương pháp quy nạp toán học.**” trong quá trình giải toán.

- Tôi xin cam đoan đây là SKKN của mình viết, không sao chép nội dung của người khác.

XÁC NHẬN CỦA HIỆU TRƯỞNG

Thanh hóa, Ngày 02 tháng 5 năm 2017

Người viết đề tài

Lê Nguyên Thạch

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Giải toán Giải tích và Đại số 11-Trần Thành Minh
2. Chuyên đề Hàm số -Hồng Đức
3. Chuyên đề Hàm số -Trần Phương.
4. Đại số và Giải tích 11-2007
5. Bài tập Đại số và Giải tích 11-2007
6. Bài tập Giải tích 12-2007
7. Đại số và Giải tích 11-2000

NHỮNG SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM ĐÃ ĐƯỢC XẾP LOẠI CẤP NGÀNH

tt	Tên đề tài	Xếp loại	Năm học
1	Rèn luyện kỹ năng chứng minh đẳng thức trong Đại số tổ hợp	C	2013-2014
2	Các yếu tố tam giác trong khảo sát hàm số	B	2014-2015