

.CHUYÊN ĐỀ 6-SỐ CHÍNH PHƯƠNG

CHỦ ĐỀ 4: DÙNG CHỮ SỐ TẬN CÙNG ĐỂ CHỨNG MINH MỘT SỐ KHÔNG PHẢI SỐ CHÍNH PHƯƠNG

PHẦN I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

-Số chính phương chỉ có thể có chữ số tận cùng là $0, 1, 4, 5, 6, 9$; không thể có chữ số tận cùng là $2, 3, 7, 8$. Như vậy để chứng minh một số không phải số chính phương ta chỉ ra số đó có hàng đơn vị là $2, 3, 7, 8$.

-Số chính phương tận cùng bằng $1; 4$ hoặc 9 thì chữ số hàng chục là chữ số chẵn. Ví dụ : $121; 49; \dots$

-Số chính phương tận cùng là 5 thì chữ số hàng chục là 2 .

-Số chính phương tận cùng là 6 thì chữ số hàng chục là lẻ.

-Nếu số chính phương có chữ số tận cùng là 0 thì số chính phương đó có một số chẵn chữ số 0 ở tận cùng. Chẳng hạn: $100, 10000, \dots$

PHẦN II. CÁC BÀI TOÁN

Bài 1: Chứng minh rằng các số sau không là số chính phương:

a) $A = 11^{11} + 111^{111} + 1111^{1111}$

b) $B = 100^{100} + 10^{10} + 8$

c) $C = 10^{10} + 17$

Lời giải

a) $A = 11^{11} + 111^{111} + 1111^{1111}$

Ta có: 11^{11} có chữ số tận cùng là 1 ;

111^{111} có chữ số tận cùng là 1 ;

1111^{1111} có chữ số tận cùng là 1 ;

Vì $1+1+1=3$

Suy ra A có chữ số tận cùng là 3 nên không là số chính phương.

b) $B = 100^{100} + 10^{10} + 8$

Ta có: 100^{100} có chữ số tận cùng là 0 ;

10^{10} có chữ số tận cùng là 0 ;

Vì $0+0+8=8$

$\Rightarrow B = 100^{100} + 10^{10} + 8$ có chữ số tận cùng là 8 nên không là số chính phương.

c) $C = 10^{10} + 17$

Ta có: 10^{10} có chữ số tận cùng là 0 ;

17 có chữ số tận cùng là 7 ;

$\Rightarrow C = 10^{10} + 17$ có chữ số tận cùng là $0 + 7 = 7$ nên không là số chính phương.

Bài 2: Chứng minh rằng số tự nhiên $N = 2015^3 + 2014^2 + 2013^2 + 2012^2 - 2011^2$ không là số chính phương.

Lời giải

2015^3 có chữ số tận cùng là 5 ;

2014^2 có chữ số tận cùng là 6 ;

2013^2 có chữ số tận cùng là 9

2012^2 có chữ số tận cùng là 4 ;

2011^2 có chữ số tận cùng là 1

Ta có tổng các chữ số tận cùng: $5 + 6 + 9 + 4 - 1 = 23$

Vì N có chữ số tận cùng là 3 nên N không là số chính phương.

Bài 3: Không mất tính tổng quát hãy cho biết các tổng, hiệu sau có phải là số chính phương không?

$$A = 7.13.25.63.105 + 113$$

$$B = 11.19.27.63.99 - 122.92$$

$$C = 12.13.14.15.16 - 3.12.13.14.82$$

Lời giải

$$A = 7.13.25.63.105 + 113$$

Ta có: $7.13.25.63.105$ có chữ số tận cùng là 5

113 có chữ số tận cùng là 3

$\Rightarrow A$ có chữ số tận cùng là 8

$\Rightarrow A$ không là số chính phương.

$$B = 11.19.27.63.99 - 122.92$$

Ta có: $11.19.27.63.99$ có chữ số tận cùng là 1 ;

122.92 có chữ số tận cùng là 4 ;

$\Rightarrow B$ có chữ số tận cùng là 7

$\Rightarrow B$ không là số chính phương.

$$C = 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16 - 3 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 82$$

$$= 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot (15 \cdot 16 - 3 \cdot 82)$$

$$= 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot (240 - 246) < 0$$

$\Rightarrow C$ không là số chính phương.

Bài 4: Chứng minh rằng tổng bình phương của năm số tự nhiên liên tiếp không là số chính phương.

Lời giải

Gọi năm số tự nhiên liên tiếp là: $n-2, n-1, n, n+1, n+2$ ($n \in \mathbb{N}, n \geq 2$).

Gọi S là tổng bình phương của năm số tự nhiên liên tiếp.

Ta có: $S = (n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2$

$$= 5n^2 + 10 = 5(n^2 + 2)$$

Vì n^2 là số chính phương nên không thể có chữ số tận cùng là 3 hoặc 8 nên $n^2 + 2$ không chia hết cho 5 $\Rightarrow 5(n^2 + 2)$ không chia hết cho 25.

Ta thấy S chia hết cho 5 nhưng không chia hết cho 25. Vậy S không là số chính phương.

Bài 5: Chứng minh số $n = 2004^2 + 2003^2 + 2002^2 - 2001^2$ không là số chính phương.

Lời giải

Vì chữ số tận cùng của các số $2004^2; 2003^2; 2002^2; 2001^2$ lần lượt là 6 ; 9 ; 4 ; 1.

Do đó số n có chữ số tận cùng là 8 nên n không là số chính phương.

Bài 6: Chứng minh số 1234567890 không phải là số chính phương.

Lời giải

Cách 1: Ta có 1234567890 chia hết cho 5 (vì chữ số tận cùng là 0) nhưng không chia hết cho 25 (vì hai chữ số tận cùng là 90). Do đó số 1234567890 không phải là số chính phương.

Cách 2: Ta có 1234567890 chia hết cho 2 (vì chữ số tận cùng là 0), nhưng không chia hết cho 4 (vì hai chữ số tận cùng là 90) nên 1234567890 không là số chính phương.

Bài 7: Cho $n \in \mathbb{N}$ và $n-1$ không chia hết cho 4. Chứng minh rằng $7^n + 2$ không thể là số chính phương.

Lời giải

Do $n-1$ không chia hết cho 4 nên $n = 4k + r$ ($k \in \mathbb{N}, r \in \{0, 2, 3\}$).

Ta có $7^4 - 1 = 2400 : 100$. Ta viết $7^n + 2 = 7^{4k+r} + 2 = 7^r (7^{4k} - 1) + 7^r + 2$.

Vậy hai chữ số tận cùng của $7^n + 2$ cũng chính là hai chữ số tận cùng của $7^r + 2 (r=0, 2, 3)$ nên chỉ có thể là 03, 51, 45.

Theo tính chất (1); (2); (3) thì rõ ràng $7^n + 2$ không thể là số chính phương khi $n-1$ không chia hết cho 4.

Bài 8: Tổng sau có là số chính phương hay không $A = 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{20}$.

Lời giải

Ta biết rằng số chính phương chia hết cho 3 thì chia hết cho 9.

Mà A chia hết cho 3, nhưng A chia 9 dư 3.

Do đó A không là số chính phương.

Bài 9: Chứng minh rằng tổng sau không là số chính phương: $B = 11 + 11^2 + 11^3$.

Lời giải

Ta có: 11 có chữ số tận cùng là 1;

11^2 có chữ số tận cùng 1;

11^3 có chữ số tận cùng 1;

$\Rightarrow B$ có chữ số tận cùng là $(1+1+1) = 3$

$\Rightarrow B$ không là số chính phương.

Bài 10: Cho $A = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{33}$. Hỏi A có là số chính phương không? Vì sao?

Lời giải

Ta có $A = 1 + 2 + (2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5) + \dots + (2^{30} + 2^{31} + 2^{32} + 2^{33})$

$= 3 + 2^2 \cdot (1 + 2 + 2^2 + 2^3) + \dots + 2^{30} \cdot (1 + 2 + 2^2 + 2^3)$

$= 3 + 2 \cdot 30 + \dots + 2^{29} \cdot 30 = 3 + (2 + \dots + 2^{29}) \cdot 3 \cdot 10$

Ta thấy A có chữ số tận cùng bằng 3.

Mà số chính phương không có chữ số tận cùng là 3.

Do đó A không là số chính phương.

Bài 11: Cho $A = 10^{2012} + 10^{2011} + 10^{2010} + 10^{2009} + 8$. Chứng minh rằng A không phải là số chính phương.

Lời giải

Ta có các số : $10^{2012}; 10^{2011}; 10^{2010}; 10^{2009}$ đều có chữ số tận cùng là 0.

Nên $A = 10^{2012} + 10^{2011} + 10^{2010} + 10^{2009} + 8$ có chữ số tận cùng là 8.

Vậy A không phải là số chính phương. (Vì số chính phương có chữ số tận cùng là $1; 4; 5; 6; 9$).

Bài 12: Cho $A = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2010} + 2^{2011}$. Hỏi $A + 8$ có phải là số chính phương không?

Lời giải

$$A + 8 = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2010} + 2^{2011} + 8 = 2^{2012} - 1 + 8 = 2^{2012} + 7.$$

Ta có: 2^{2012} có chữ số tận cùng là 6;

$\Rightarrow A$ có chữ số tận cùng là $6 + 7 = 13$.

Vì số chính phương không có tận cùng bằng 3, nên $A + 8$ không phải là số chính phương.

Bài 13: Chứng minh rằng các số sau không là số chính phương:

a) $A = 12^{12} + 13^{12} + 14^{12}$

b) $B = 7^{100} + 161$

c) $C = 100^{100} + 9^8 + 6$

Lời giải

a) A có chữ số tận cùng là 3 nên không là số chính phương.

b) $B = 7^{100} + 161 = (7^4)^{25} + 161 \equiv 1^{25} + 1 \equiv 1 + 1 \equiv 2 \pmod{10}$

$\Rightarrow B$ có chữ số tận cùng là 2 nên không là số chính phương.

c) $C = 100^{100} + 9^8 + 6$

Ta có: 100^{100} có chữ số tận cùng là 0;

9^8 có chữ số tận cùng là 1;

$\Rightarrow C$ có chữ số tận cùng là $(0 + 1 + 6) = 7$

$\Rightarrow C$ có chữ số tận cùng là 7 nên không là số chính phương.

Bài 14: Cho $N = 1.3.5.....2015$. Chứng minh rằng $N + 3$ không là số chính phương.

Lời giải

Ta có N chia hết cho 5 và N lẻ nên chữ số tận cùng của N là 5.

$N + 3$ có chữ số tận cùng là 8 nên không phải là số chính phương.

Bài 15: Các tổng sau có phải là số chính phương không ? Vì sao ?

a) $B = 11^{20} + 11^{21} + 11^{22}$.

b) $C = 10^{10^{10}} + 117$.

Lời giải

a) Tổng $B = 11^{20} + 11^{21} + 11^{22}$ có chữ số tận cùng là 3 nên không là số chính phương.

b) Tổng $C = 10^{10^{10}} + 117$ có chữ số tận cùng là 7 nên không là số chính phương.

Bài 16: Cho 4 chữ số $0, 2, 3, 4$. Tìm số chính phương có 4 chữ số gồm cả 4 chữ số trên.

Lời giải

Gọi A là số chính phương có bốn chữ số cần tìm.

A không có tận cùng là 2 hoặc 3 nên chữ số tận cùng của A là 0 hoặc 4 .

+) Nếu chữ số tận cùng của A là 0 thì chữ số hàng chục là 0 , không thỏa mãn yêu cầu.

+) Nếu chữ số tận cùng của A là 4 thì chữ số hàng chục là chẵn nên chữ số hàng chục là 0 hoặc 2 .

A có thể là: $3204, 2304, 3024$.

Ta có: $56 < 3204 < 57^2; 2304 = 48^2; 54^2 < 3204 < 55^2$

Vậy số cần tìm là 2304 .

Bài 17: Ta ký hiệu $n!$ là tích của n số nguyên dương đầu tiên. Cụ thể $n! = 1.2....n$. Tìm số tự nhiên n sao cho: $1! + 2! + 3! + ... + n!$ là số chính phương.

Lời giải

$$S = 1! + 2! + 3! + ... + n!$$

* Với $n \geq 5 \rightarrow n! = 1.2.3.4.5...n : 10 \rightarrow n!$ có chữ số tận cùng là 0 .

+) Với $n = 1$ thì $S = 1! = 1 = 1^2$

+) Với $n = 2$ thì $S = 1! + 2! = 3$ (loại)

+) Với $n = 3$ thì $S = 1! + 2! + 3! = 9 = 3^2$

+) Với $n = 4$ thì $S = 1! + 2! + 3! + 4! = 33$ (loại)

+) Với $n \geq 5$ thì $S = 1! + 2! + 3! + 4! + 5! + ... + n!$

Ta thấy $1! + 2! + 3! + 4! = 33$ có chữ số tận cùng là 3 ;

$5! + ... + n!$ có tận cùng là 0

$\Rightarrow S$ có tận cùng là 3 nên S không là số chính phương.

Vậy $n=1$ hoặc $n=3$ thì $1!+2!+3!+\dots+n!$ là số chính phương.

Bài 18: Chứng minh rằng số tự nhiên $N=114^2+113^2+112^2-111^{11}+2015$ không là số chính phương.

Lời giải

114^2 có chữ số tận cùng là 6;

113^2 có chữ số tận cùng là 9;

112^2 có chữ số tận cùng là 4;

111^{11} có chữ số tận cùng là 1

2015 có chữ số tận cùng là 5;

Ta có $6+9+4-1+5=23$

Vậy N có chữ số tận cùng là 3

$\Rightarrow N$ không là số chính phương.

Bài 19: Cho $P=2014^{2014}+2019^{2019}+2^{3^4}$. Chứng minh rằng P không phải là số chính phương.

Lời giải

Chữ số tận cùng của 2014^{2014} là 6;

Chữ số tận cùng của 2019^{2019} là 9;

Chữ số tận cùng của 2^{3^4} là 2;

Chữ số tận cùng của $P=2014^{2014}+2019^{2019}+2^{3^4}$ là chữ số tận cùng của tổng $(6+9+2)=17$ là 7.

Vậy P không phải là số chính phương.

PHẦN III. BÀI TOÁN THƯỜNG GẶP TRONG ĐỀ HỌC SINH GIỎI

Bài 1: Cho $S=4+2^2+2^3+2^4+\dots+2^{98}$. Chứng tỏ rằng S không phải là số chính phương.

(Trích Đề thi HSG lớp 9 huyện Cẩm Giàng năm 2018 -2019).

Hướng dẫn

Gọi $M=2+2^2+2^3+2^4+\dots+2^{98}$

$\Rightarrow S=2+M$

Ta có: $M=2M-M=(2^2+2^3+2^4+\dots+2^{99})-(2+2^2+2^3+\dots+2^{98})=2^{99}-2$

$$\Rightarrow S = 2^{99} = (2^4)^{24} \cdot 2^3 = 8 \cdot 16^{24}$$

Vì 16^{24} có chữ số tận cùng là 6 $\Rightarrow S$ có chữ số tận cùng là 8.

Vậy S không là số chính phương.

Cách 2: Gọi $M = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{98}$

$$\Rightarrow S = 2 + M$$

Ta có $M = 2M - M = (2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{99}) - (2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{98}) = 2^{99} - 2$

$$\Rightarrow S = 2^{99}$$

Ta thấy thừa số nguyên tố 2 có số mũ lẻ.

Vậy S không là số chính phương.

Bài 2: Cho biểu thức $M = 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{80}$. Chứng tỏ rằng M không phải là số chính phương.

(Trích Đề thi HSG lớp 6 trường THCS Quỳnh Giang năm 2015 -2016).

Hướng dẫn

Ta thấy $M = 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{80}$ chia hết cho số nguyên tố 5.

Mặt khác $5^2 + 5^3 + \dots + 5^{80}$ chia hết cho 5^2 (Vì các số hạng đều chia hết cho 5^2)

$\Rightarrow M$ không chia hết cho 5^2 (Vì tổng M có một số hạng 5 không chia hết cho 5^2)

$\Rightarrow M$ chia hết cho 5 nhưng không chia hết cho 5^2

Vậy M không phải là số chính phương.

Bài 3: Chứng minh rằng tổng sau: $P = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{61} + 3^{62}$ không là số chính phương.

(Trích Đề thi HSG lớp 6 trường THCS Nguyễn Thị Lợi năm 2009 -2010).

Lời giải

$$\begin{aligned} P &= (1 + 3 + 3^2 + 3^3) + (3^4 + 3^5 + 3^6 + 3^7) + \dots + (3^{56} + 3^{57} + 3^{58} + 3^{59}) + 3^{60} + 3^{61} + 3^{62} \\ &= (40 + 3^4 \cdot 40 + \dots + 3^{56} \cdot 40) + 3^{60} + 3^{61} + 3^{62}. \end{aligned}$$

Ta thấy: $(40 + 3^4 \cdot 40 + \dots + 3^{56} \cdot 40)$ có chữ số tận cùng là 0.

Số $3^{60} = (3^2)^{30} = 9^{30}$ có chữ số tận cùng là 1.

Số $3^{61} = 3 \cdot 3^{60}$ có chữ số tận cùng là 3.

Số $3^{62} = 9 \cdot 3^{60}$ có chữ số tận cùng là 9.

Vậy tổng P có chữ số tận cùng là $3 \Rightarrow P$ không là số chính phương.

Bài 4: Cho $A = 10^{2012} + 10^{2011} + 10^{2010} + 10^{2009} + 8$. Chứng minh rằng A không phải là số chính phương.
(Trích Đề thi HSG lớp 6 trường THCS Nông Trang - TP Việt Trì năm 2014 - 2015).

Lời giải

Ta có các số : $10^{2012}; 10^{2011}; 10^{2010}; 10^{2009}$ đều có chữ số tận cùng là 0 .

Nên $A = 10^{2012} + 10^{2011} + 10^{2010} + 10^{2009} + 8$ có chữ số tận cùng là 8 .

Vậy A không phải là số chính phương.

Bài 5: Cho $P = 14^{14^{14}} + 9^{9^9} + 2^{3^4}$. Chứng minh rằng P không phải là số chính phương.
(Trích Đề thi HSG lớp 6 huyện Lý Nhân năm 2018 -2019).

Lời giải

Vì $14^{14^{14}} = (14^2)^k \equiv 6^k \equiv 6 \pmod{10}$, $k \in \mathbb{N}$ nên chữ số tận cùng của $14^{14^{14}}$ là 6 .

Chữ số tận cùng của 9^{9^9} là 9 . (vì 9^9 lẻ)

Chữ số tận cùng của 2^{3^4} là 2 . $\left(2^{3^4} = 2^{81} \equiv (2^4)^{20} \cdot 2 \equiv 6^{20} \cdot 2 \equiv 6 \cdot 2 \equiv 2 \pmod{10} \right)$

Chữ số tận cùng của $P = 14^{14^{14}} + 9^{9^9} + 2^{3^4}$ là chữ số tận cùng của tổng $(6 + 9 + 2)$ là 7 .

Vậy P không phải là số chính phương.

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

<https://www.vnteach.com>

Hướng dẫn tìm và tải các tài liệu ở đây

<https://forms.gle/LzVNwfMpYB9qH4JU6>