

Người làm: Trần Minh Huệ

Zalo: Trần Minh Huệ

- số đt zalo: 0983746589

Email: tranminhhue2910@gmail.com

CD4: CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH CHIA HẾT

Dạng 1. CHỨNG MINH CHIA HẾT

A. Trắc nghiệm (nếu có)

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 Thị xã Kinh Môn, tỉnh Hải Dương 2022 - 2023)

Cho a, b là các số nguyên thỏa mãn: $(7a - 14b + 5)(a - 3b + 1) \vdots 7$

Chứng minh rằng $(29a + 18b + 36) \vdots 7$

Lời giải

Do $(7a - 14b + 5)(a - 3b + 1) \vdots 7$

vì $(7a - 14b + 5)$ không chia hết cho 7 mà 7 là số nguyên tố nên $(a - 3b + 1) \vdots 7$

Mà $(28a + 21b + 35) \vdots 7$

$\Rightarrow (28a + 21b + 35) + (a - 3b + 1) \vdots 7$

$\Rightarrow 29a + 18b + 36 \vdots 7$ (đpcm)

Câu 3. (HSG 7 huyện Tương Dương, tỉnh Nghệ An 2022 - 2023)

Chứng tỏ rằng $M = 75.(4^{2018} + 4^{2017} + \dots + 4^2 + 4 + 1) + 25$ chia hết cho 10^2 .

Lời giải

$M = 75.(4^{2018} + 4^{2017} + \dots + 4^2 + 4 + 1) + 25$

$= 25.(4 - 1).(4^{2018} + 4^{2017} + \dots + 4^2 + 4 + 1) + 25$

$= 25.[4.(4^{2018} + 4^{2017} + \dots + 4^2 + 4 + 1) - (4^{2018} + 4^{2017} + \dots + 4^2 + 4 + 1) + 1]$

$= 25.[(4^{2019} + 4^{2018} + \dots + 4^3 + 4^2 + 4) - (4^{2018} + 4^{2017} + \dots + 4^2 + 4 + 1) + 1]$

$= 25.(4^{2019} - 1 + 1)$

$= 25.4^{2019}$

$= 25.4.4^{2018}$

$= 10^2.4^{2018}$

Ta thấy $(10^2.4^{2018}) \vdots 10^2$.

Vậy $M = 75.(4^{2018} + 4^{2017} + \dots + 4^2 + 4 + 1) + 25$ chia hết cho 10^2 .

Câu 4. (HSG 7 huyện Ninh Giang, tỉnh Hải Dương 2022 - 2023)

Cho các số tự nhiên x, y thỏa mãn $(2x + 3y) \vdots 17$. Chứng minh $(9x + 5y) \vdots 17$.

Lời giải

Ta có $(2x + 3y) \vdots 17 \Rightarrow 4(2x + 3y) \vdots 17 \Rightarrow (8x + 12y) \vdots 17$

Ta lại có: $9x + 5y + 8x + 12y = 17x + 17y = 17(x + y) \vdots 17$

Mà $(2x+3y):17$ nên $(9x+5y):17$.

Câu 5. (HSG 7 huyện Hà Trung, tỉnh Thanh Hóa 2022 - 2023)

Cho $a, b \in \mathbb{N}^*$ thỏa mãn $M = (9a+11b)(5b+11a)$ chia hết cho 19. Chứng minh rằng $M : 361$

Lời giải

Ta có: $M = (9a+11b)(5b+11a):19$ mà 19 là số nguyên tố nên $(9a+11b):19$ hoặc $(5b+11a):19$

Lại có: $3(9a+11b):19 + (5b+11a) = 38a+38b = 19(2a+2b):19$ (*)

+ Nếu $(9a+11b):19$ kết hợp với (*) suy ra: $(5b+11a):19$

+ Nếu: $(5b+11a):19$ kết hợp với (*) suy ra $(9a+11b):19$

$\Rightarrow M = (9a+11b)(5b+11a):19.19$

$\Rightarrow M : 361$

Câu 6. (HSG 7 TP Bắc Giang, tỉnh Bắc Giang 2022 - 2023)

Cho $m; n; t$ là ba số nguyên tố lớn hơn 3 thỏa mãn: $m - n = n - t = a$ ($a \in \mathbb{N}^*$). Chứng minh rằng a chia hết cho 6.

Lời giải

Ta có

$$m - n = n - t = a \quad (a \in \mathbb{N}^*)$$

Suy ra $n = t + a$; $m = n + a = t + 2a$

Do đó ta có t ; $t + a$; $t + 2a$ là các số nguyên tố lớn hơn 3

Xét số dư của ba số nguyên tố t ; $t + a$; $t + 2a$ đã cho khi chia cho 3, số dư nhận được có thể là 1 hoặc 2. Do đó có ít nhất hai số có cùng số dư khi chia cho 3 và hiệu của chúng chia hết cho 3.

Mặt khác $(t+a) - t = a$; $(t+2a) - t = 2a$; $(t+2a) - (t+a) = a$

Suy ra a hoặc $2a$ chia hết cho 3. Mà $(2,3)=1$ nên $a:3$ (1)

Vì m, n là các số nguyên tố lớn hơn 3 nên m, n là các số lẻ

$\Rightarrow m - n$ Từ (1) và (2) kết hợp với $(2,3)=1$ ta có $a:6$

Câu 7. (HSG 7 thị xã Bỉm Sơn, tỉnh Thanh Hóa 2022 - 2023)

Cho các số nguyên dương a, b, c sao cho: $a^2 + b^2 = c^2$. Chứng minh: $ab:(a+b+c)$.

Lời giải

Ta có: $a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow (a+b)^2 - c^2 = 2ab \Rightarrow (a+b+c)(a+b-c) = 2ab$

Suy ra $2ab:(a+b+c)$ (1)

mà $(a+b+c) - (a+b-c) = 2c$ chẵn nên $(a+b+c); (a+b-c)$ cùng tính chẵn lẻ.

Nếu $(a+b+c)$ lẻ thì từ (1) suy ra $ab \vdots (a+b+c)$

Nếu $(a+b+c)$ chẵn thì $(a+b-c)$ chẵn. Đặt $(a+b-c)=2k$ thì

$$(a+b+c)2k=2ab \Rightarrow (a+b+c)k=ab \text{ suy ra } ab \vdots (a+b+c)$$

Vậy

Câu 6. (HSG 7 huyện Lạng Giang, tỉnh Bắc Giang 2022 - 2023)

Cho bốn số tự nhiên phân biệt $d < c < b < a$. Chứng minh rằng:

$$P=(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d) \vdots 12$$

Lời giải

Xét P chia hết cho 3:

Chia bốn số phân biệt a, b, c, d cho 3 luôn có hai phép chia có cùng số dư $\Rightarrow$ hiệu hai số bị chia đó chia hết cho 3 $\Rightarrow$ tồn tại hiệu hai số trong bốn số a, b, c, d chia hết cho 3

Do vậy P chia hết cho 3 (1)

Xét P chia hết cho 4:

Trường hợp 1: Trong bốn số a, b, c, d nếu có hai số có cùng số dư khi chia cho 4 thì P chia hết cho 4

Trường hợp 2: Khi chia bốn số đó cho 4 có đủ các trường hợp về số dư 1; 2; suy ra trong bốn số a, b, c, d có hai số chẵn, hai số lẻ. Giả sử a, c chẵn và b, d lẻ $\Rightarrow (a-c) \vdots 2$ và $(b-d) \vdots 2$

Do vậy P chia hết cho 4 (2)

Suy ra P luôn chia hết cho 4

Từ (1) và (2) và suy ra $P \vdots (3.4)$ hay $P \vdots 12$

Câu 7. (HSG 7 huyện Quốc Oai, Hà Nội 2022 - 2023)

Cho P là số nguyên tố lớn hơn 3 thỏa mãn $10P+1$ cũng là số nguyên tố. Chứng minh rằng $5P+1$ chia hết cho 6.

Lời giải

Vì P là số nguyên tố lớn hơn 3 nên P là số lẻ $\Rightarrow 5P$ là số lẻ $\Rightarrow 5P+1$ là số chẵn $\Rightarrow (5P+1) \vdots 2$ (1)

Xét ba số chẵn liên tiếp: $10P, 10P+1, 10P+2$ luôn tồn tại một số chia hết cho 3

Mà $10P+1$ là số nguyên tố lớn hơn 3 $\Rightarrow (10P+1) \nmid 3$

P là số nguyên tố lớn hơn 3 $\Rightarrow P \nmid 3$ và $\text{ƯCLN}(10;3)=1 \Rightarrow 10P \nmid 3$

Do đó $10P+2 \vdots 3 \Rightarrow 2(5P+1) \vdots 3$ mà $\text{ƯCLN}(2;3)=1 \Rightarrow 5P+1 \vdots 3$ (2)

Từ (1) và (2) kết hợp với $\text{ƯCLN}(2;3)=1$ nên $5P+1 \vdots 6$

Câu 8. (HSG 7 thành phố Phúc Yên, tỉnh Vĩnh Phúc, 2022 - 2023)

Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh rằng $(p^2 - 1) : 24$.

Lời giải

Ta có $p^2 - 1 = (p - 1)(p + 1)$.

Vì p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p lẻ. Do đó $p - 1$ và $p + 1$ là hai số chẵn liên tiếp. Từ đó $(p - 1)(p + 1) : 8$ (1)

Xét ba số tự nhiên liên tiếp $p - 1; p; p + 1$. Ta có $(p - 1)p(p + 1) : 3$.

Mà p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p không chia hết cho 3 nên $(p - 1)(p + 1) : 3$ (2)

Từ (1) và (2) kết hợp với $(3; 8) = 1$ và $3 \cdot 8 = 24$ ta suy ra $(p^2 - 1) : 24$ (đpcm).

Câu 9. (HSG 7 huyện Gia Viễn, Ninh Bình 2022 - 2023)

Chứng tỏ rằng tích của hai số nguyên lẻ liên tiếp cộng thêm 9 thì chia hết cho 4.

Lời giải

Gọi hai số nguyên lẻ liên tiếp là $2a + 1$ và $2a - 1$ ($a \in \mathbb{Z}$)

Tích của hai số nguyên lẻ liên tiếp cộng thêm 9 bằng:

$$\begin{aligned} & (2a + 1)(2a - 1) + 9 \\ &= 4a^2 - 2a + 2a - 1 + 9 \\ &= 4a^2 + 8 \\ &= 4 \cdot (a^2 + 2) : 4 \end{aligned}$$

Vậy tích của hai số nguyên lẻ liên tiếp cộng thêm 9 thì chia hết cho 4.

Câu 10. (HSG 7 thành phố Bắc Ninh, tỉnh Bắc Ninh 2022 - 2023)

Chứng minh rằng số $B = 11^{n+2} + 12^{2n+1}$ chia hết cho 133, với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Lời giải

$$B = 11^{n+2} + 12^{2n+1} = 11^n \cdot 121 + 144^n \cdot 12 = 133 \cdot 11^n + 12 \cdot (144^n - 11^n) \quad (1)$$

Ta có

$$(144^n - 11^n) : (144 - 11) \Rightarrow (144^n - 11^n) : 133 \quad (2)$$

Mặt khác ta có

$$(1) \quad (2) \quad B \text{ M } 133$$

Từ và suy ra .

Câu 11. (HSG 7 huyện Nghi Lộc, tỉnh Thanh Hóa 2022 - 2023)

Chứng minh rằng số $A = \frac{(17^{2014^{2016}} - 3^{96^{97}})}{2}$ là một số tự nhiên chia hết cho 5.

Lời giải

Ta có: $2014 : 2 \Rightarrow 2014^{2016} : 2^{2016}$

$$\Rightarrow 2014^{2016} : 4 \Rightarrow 2014^{2016} = 4k (k \in \mathbb{N}^*)$$

Vì 17^4 có chữ số tận cùng là 1

$$\Rightarrow 17^{2014^{2016}} = 17^{4k} = (17^4)^k \text{ có chữ số tận cùng là } 1$$

$$\text{Tương tự } 3^{96^{97}} = 3^{4l} = (3^4)^l = (81)^l \text{ có chữ số tận cùng là } 1$$

$$\Rightarrow 17^{2014^{2016}} - 3^{96^{97}} \text{ có chữ số tận cùng là } 0$$

Nên A là một số tự nhiên, vì $A > 0$

$$\Rightarrow A : 2$$

$\Rightarrow A$ là một số tự nhiên có tận cùng là 0

$$\Rightarrow A : 5$$

Câu 12. (HSG 7 huyện Vĩnh Lộc, tỉnh Thanh Hóa 2022 - 2023)

Cho a, b là các số nguyên thỏa mãn $(7a + 5 - 21b)(a + 1 - 3b) \equiv 0 \pmod{7}$. Chứng minh rằng : $(11b + 15 + 43a) \equiv 0 \pmod{7}$

Lời giải

$$\text{Từ } (7a + 5 - 21b)(a + 1 - 3b) \equiv 0 \pmod{7}$$

$$\text{suy ra } (7a - 21b + 5)(a - 3b + 1) \equiv 0 \pmod{7}$$

$\Rightarrow (a - 3b + 1) \equiv 0 \pmod{7}$ vì $(7a - 21b + 5)$ không chia hết cho 7 và 7 là số nguyên tố.

$$\text{Từ } (a - 3b + 1) \equiv 0 \pmod{7} \Rightarrow a \equiv 3b - 1 \pmod{7}$$

$$\text{Vì } (42a + 14b + 14) \equiv 0 \pmod{7}$$

$$\Rightarrow (11b + 15 + 43a) \equiv 0 \pmod{7}$$

Câu 13. (HSG 7 huyện Vĩnh Lộc, tỉnh Thanh Hóa 2022 - 2023)

Cho hai số nguyên tố khác nhau p và q . Chứng minh rằng : $p^{q-1} + q^{p-1} - 1$ chia hết cho $p \cdot q$

Lời giải

Vì p, q nguyên tố cùng nhau và p khác q nên: $(p, q) = 1$.

Áp dụng định lý Fermat ta có :

$$p^{q-1} \equiv 1 \pmod{q} \text{ và } q^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

suy ra $p^{q-1} - 1 \equiv 0 \pmod{q}$ và $q^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p}$ mặt khác $p^{q-1} \not\equiv 0 \pmod{p}$ và $q^{p-1} \not\equiv 0 \pmod{q}$

nên ta có : $p^{q-1} + q^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{q}$; $p^{q-1} + q^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p}$ mà $(p, q) = 1$

nên : $(p^{q-1} + q^{p-1} - 1) \equiv 0 \pmod{p \cdot q}$

Dạng 2.1. TÌM CHỮ SỐ TẬN CÙNG

A. Trắc nghiệm (nếu có)

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 thành phố Bắc Ninh, tỉnh Bắc Ninh 2022 - 2023)

Cho $C = 3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$ với $n \in \mathbb{N}$.
Tìm chữ số tận cùng của C biết với ().

Lời giải

Với $n=0$, khi đó $C=3^2-2^2+1=5$, C có chữ số tận cùng là 5.

Với $n \geq 1$. Ta có

$$C = (3^{n+2} + 3^n) - (2^{n+2} + 2^n) = 10 \cdot 3^n - 10 \cdot 2^{n-1} \text{ M10}$$

Vì $(10 \cdot 3^n - 10 \cdot 2^{n-1}) \text{ M10}$ nên C có tận cùng là chữ số 0.

Dạng 2.2. TÌM HAI CHỮ SỐ TẬN CÙNG

A. Trắc nghiệm (nếu có)

Dạng 2.3. TÌM BA CHỮ SỐ TẬN CÙNG TRỞ LÊN

A. Trắc nghiệm (nếu có)

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 huyện Tiền Hải, tỉnh Thái Bình 2022 - 2023)

Cho tích $A = 1.2.3.4.5.....398.399.400$. Hỏi tích A có tận cùng bao nhiêu chữ số 0?

Lời giải

Vì tích A có tận cùng bằng 1 chữ số 0. Muốn biết tích A có tận cùng bao nhiêu chữ số 0 thì cần xem khi phân tích A ra thừa số nguyên tố có bao nhiêu thừa số 2 và bao nhiêu thừa số 5. Ta thấy thừa số 5 ít hơn thừa số 2 nên ta chỉ cần tìm số thừa số 5.

Kể từ số 1, cứ 5 số lại có một số là bội của 5; cứ $25 = 5^2$ số lại có một số là bội của 25; cứ $125 = 5^3$ số lại có một số là bội của 125.

Do đó số thừa số 5 khi phân tích A ra thừa số nguyên tố là:

$$[(400-5):5+1] + [(400-25):25+1] + [(375-125):125+1] = 80 + 16 + 3 = 99$$

Vậy tích A có tận cùng 99 chữ số 0.

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

<https://www.vnteach.com>