

PHƯƠNG PHÁP CASIO - VINACAL

BÀI 21. TÍNH NHANH THỂ TÍCH TRÒN XOAY.

1) KIẾN THỨC NỀN TẢNG

1. Dạng 1 : Thể tích vật thể có diện tích thiết diện $S(x)$ tạo bởi mặt phẳng vuông góc với Ox tại điểm có hoành độ x ($a \leq x \leq b$). Giả sử $S(x)$ là hàm liên tục thì thể tích vật thể tích theo công thức :

$$V = \int_a^b S(x) dx$$

2. Dạng 2 : Cho hình phẳng (H) tạo bởi các đường $y = f(x)$, $y = g(x)$ và các đường thẳng $x = a$, $x = b$. Khi quay hình phẳng (H) quanh trục Ox thì được vật thể tròn xoay có thể tích tính theo công thức :

$$V = \pi \int_a^b |f^2(x) - g^2(x)| dx$$

3. Dạng 3 : Cho hình phẳng (H) tạo bởi các đường $x = f(y)$, $x = g(y)$ và các đường thẳng $y = a$, $y = b$. Khi quay hình phẳng (H) quanh trục Oy thì được vật thể tròn xoay có thể tích tính theo công thức :

$$V = \pi \int_a^b |f^2(y) - g^2(y)| dy$$

2) VÍ DỤ MINH HỌA

VD1-[Đề minh họa môn Toán Bộ GD-ĐT lần 1 năm 2017]

Kí hiệu (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 2(x-1)e^x$, trục tung và trục hoành. Tính thể tích V của khối tròn xoay thu được khi hình (H) quay xung quanh trục Ox

A. $V = 4 - 2e$

B. $V = (4 - 2e)\pi$

C. $V = e^2 - 5$

D. $V = (e^2 - 5)\pi$

GIẢI

- Hình phẳng được giới hạn bởi trục tung $\Rightarrow$ cận thứ nhất là : $x = 0$
 Trục hoành có phương trình $y = 0$. Xét phương trình hoành độ giao điểm của đường cong $y = 2(x-1)e^x$ và trục hoành $\Rightarrow 2(x-1)e^x = 0 \Leftrightarrow x = 1$ Vậy cận thứ 2 là : $x = 1$

➤ Thể tích $V = \pi \int_0^1 \left| (2(x-1)e^x)^2 - 0^2 \right| dx$

Sử dụng máy tính Casio với lệnh tính tích phân

SHIFT $\times 10^x$ $\int \square$ SHIFT hyp (2 (ALPHA) - 1) ALPHA $\times 10^x$ x^y ALPHA) $\rightarrow$)
 x^2 ∇ 0 $\blacktriangle$ 1 $\equiv$

Math $\blacktriangle$
 $\pi \int_0^1 \left| (2(X-1)e^X)^2 \right| dx$
 7.505441089

$\Rightarrow V = 7.5054... = \pi(e^2 - 5)$

- Vậy ta chọn đáp án D

❖ Cách tham khảo : Tự luận

▪ Thể tích $V = \pi \int_0^1 \left| (2(x-1)e^x)^2 - 0^2 \right| dx = 4\pi \int_0^1 (x-1)^2 e^x dx$

TÓM TẮT KỸ THUẬT SỬ DỤNG CASIO – VINACAL HỖ TRỢ GIẢI ĐỀ THI MÔN TOÁN 2017.

- Vì biểu thức dưới dấu tích phân có dạng $u(x).v'(x)$ nên ta sử dụng tích phân từng phần. Tuy nhiên làm dạng này rất mất thời gian. Tác giả khuyến khích bạn đọc làm theo casio, dành thời gian cho việc tư duy xây dựng công thức để bấm máy.

❖ Bình luận :

- Qua ví dụ đầu tiên ta cũng đã thấy ngay sức mạnh của Casio khi xử lý các bài tích phân, các bài ứng dụng tích phân so với cách làm tự luận truyền thống.

VD2-[Thi thử Group Nhóm toán lần 3 năm 2017]

Tính thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay hình phẳng được giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y = \sqrt{1-x^2}; y = 0$ quanh trục Ox

A. $\frac{3}{4}$

B. $\frac{4}{3}$

C. $\frac{3}{4}\pi$

D. $\frac{4}{3}\pi$

GIẢI

- Hàm thứ nhất : $y = \sqrt{1-x^2}$, hàm thứ hai : $y = 0$

$$\text{Giải phương trình hoành độ giao điểm } \sqrt{1-x^2} = 0 \Leftrightarrow 1-x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{Cận thứ nhất : } x = -1, \text{ cận thứ hai : } x = 1$$

- Thể tích $V = \pi \int_{-1}^1 \left| \left(\sqrt{1-x^2} \right)^2 - 0^2 \right| dx$

Sử dụng máy tính Casio với lệnh tính tích phân



$$\pi \int_{-1}^1 |1-x^2| dx = \frac{4}{3}\pi$$

$$\Rightarrow V = \frac{4}{3}\pi$$

- Vậy ta chọn đáp án D

VD3-[Thi thử chuyên Lam Sơn – Thanh Hóa lần 2 năm 2017]

Cho D là miền hình phẳng giới hạn bởi $y = \sqrt{\sin x}; y = 0; x = 0; x = \frac{\pi}{2}$. Khi D quay quanh Ox tạo thành một khối tròn xoay. Thể tích của khối tròn xoay thu được là :

A. 1

B. π

C. 2π

D. 2

GIẢI

- Hàm thứ nhất : $y = \sqrt{\sin x}$, hàm thứ hai : $y = 0$

$$\text{Cận thứ nhất : } x = 0, \text{ cận thứ hai : } x = \frac{\pi}{2}$$

- Thể tích $V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left| \left(\sqrt{\sin x} \right)^2 - 0^2 \right| dx$

Sử dụng máy tính Casio với lệnh tính tích phân





Math ▲

$$\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin(X)| dx = \pi$$

$$\Rightarrow V = \pi$$

- Vậy ta chọn đáp án **B**

VD4-[Sách bài tập giải tích nâng cao lớp 12 T.154]

Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay quanh trục tung hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm

số $x = \frac{\sqrt{2y}}{y^2 + 1}$ và các đường thẳng $y = 0; y = 1$

- A. 2π B. 3π C. $\frac{1}{2}\pi$ D. $\frac{3}{2}\pi$

GIẢI

- Hàm thứ nhất $x = \frac{\sqrt{2y}}{y^2 + 1}$, hàm thứ hai : $x = 0$

Cận thứ nhất $y = 0$, cận thứ hai $y = 1$

- Thể tích $V = \pi \int_0^1 \left(\left(\frac{\sqrt{2y}}{y^2 + 1} \right)^2 - (0)^2 \right) dy$

Sử dụng máy tính Casio với lệnh tính tích phân

$$\pi \int_0^1 \left(\frac{2y}{x^2 + 1} \right) dx = \frac{1}{2}\pi$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{2}\pi$$

- Vậy ta chọn đáp án **C**

VD5-[Sách bài tập giải tích nâng cao lớp 12 T.154]

Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay quanh trục tung hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm

số $y = 2x - x^2$ và các đường thẳng $y = 0, y = 2$:

- A. $\frac{5}{3}\pi$ B. $\frac{8}{3}\pi$ C. $\frac{7}{5}\pi$ D. $\frac{3}{5}\pi$

GIẢI

- Xét $y = 2x - x^2 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 1 - y$

Vì $(x-1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow 1 - y \geq 0 \Leftrightarrow y \leq 1$ Khi đó $x - 1 = \pm \sqrt{1 - y} \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{1 - y}$ hàm thứ nhất có dạng $x = 1 + \sqrt{1 - y}$, hàm thứ hai : $x = 1 - \sqrt{1 - y}$

- Phương trình hoành độ giao điểm $1 + \sqrt{1 - y} = 1 - \sqrt{1 - y} \Leftrightarrow \sqrt{1 - y} = 0 \Leftrightarrow y = 1$
 Vì $y \leq 1 \Rightarrow$ cận thứ nhất $x = 0$ và cận thứ hai $y = 1$

- Thể tích $V = \pi \int_0^1 \left((1 + \sqrt{1 - y})^2 - (1 - \sqrt{1 - y})^2 \right) dy$

Sử dụng máy tính Casio với lệnh tính tích phân

$$\pi \int_0^1 \left| (1 + \sqrt{1-x})^2 - 1 \right| dx$$

8.37758041

$$\Rightarrow V = 8,3775... = \frac{8}{3}\pi^2$$

➤ Vậy ta chọn đáp án **B**

VD6-[Sách bài tập giải tích nâng cao lớp 12 T.154]

Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay quanh trục tung hình phẳng giới hạn bởi hình tròn tâm $I(2;0)$ bán kính $R=1$:

A. 4π

B. $4\pi^2$

C. 5π

D. $5\pi^2$

GIẢI

➤ Hàm thứ nhất là đường tròn tâm $I(2;0)$ bán kính $R=1$ có phương trình

$$(x-2)^2 + (y-0)^2 = 1 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 1 - y^2$$

Vì $(x-1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow 1 - y^2 \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq y \leq 1$ Khi đó $x-2 = \pm\sqrt{1-y^2} \Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt{1-y^2}$ hàm thứ nhất có dạng $x = 2 + \sqrt{1-y^2}$, hàm thứ hai : $x = 2 - \sqrt{1-y^2}$

➤ Phương trình hoành độ giao điểm $2 + \sqrt{1-y^2} = 2 - \sqrt{1-y^2} \Leftrightarrow \sqrt{1-y^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ y = 1 \end{cases}$

$\Rightarrow$ Cận thứ nhất $y = -1$ cận thứ hai $y = 1$

➤ Thể tích $V = \pi \int_{-1}^1 \left| \left(2 + \sqrt{1-y^2} \right)^2 - \left(2 - \sqrt{1-y^2} \right)^2 \right| dy$

Sử dụng máy tính Casio với lệnh tính tích phân

$\boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\times 10^x} \boxed{\int \frac{\square}{\square}} \boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\text{hyp}} \boxed{(} \boxed{2} \boxed{+} \boxed{\sqrt{\square}} \boxed{1} \boxed{-} \boxed{\text{ALPHA}} \boxed{)} \boxed{x^2} \boxed{\blacktriangleright} \boxed{)} \boxed{x^2} \boxed{-} \boxed{(} \boxed{2} \boxed{-}$
 $\boxed{\sqrt{\square}} \boxed{1} \boxed{-} \boxed{\text{ALPHA}} \boxed{)} \boxed{x^2} \boxed{\blacktriangleright} \boxed{)} \boxed{x^2} \boxed{\blacktriangledown} \boxed{-} \boxed{1} \boxed{\blacktriangle} \boxed{1} \boxed{=}$

$$\pi \int_{-1}^1 \left| (2 + \sqrt{1-x^2})^2 - (2 - \sqrt{1-x^2})^2 \right| dx$$

39.4784176

$$\Rightarrow V = 39.4784... = 4\pi^2$$

➤ Vậy ta chọn đáp án **A**

VD7-[Thi thử báo Toán học tuổi trẻ lần 3 năm 2017]

Tính thể tích V của vật thể nằm giữa hai mặt phẳng $x=0$, $x=1$, biết rằng thiết diện của vật thể cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($0 \leq x \leq 1$) là một tam giác đều có cạnh là $4\sqrt{\ln(1+x)}$

A. $4\sqrt{3}(2\ln 2 - 1)$

B. $4\sqrt{3}(2\ln 2 + 1)$

C. $8\sqrt{3}(2\ln 2 - 1)$

D. $16\pi(2\ln 2 - 1)$

GIẢI

➤ Thiết diện của vật thể và mặt phẳng vuông góc với trục Ox là tam giác đều có diện tích

$$S = S(x) = \frac{\sqrt{3} \left(4\sqrt{\ln(1+x)} \right)^2}{4} = 4\sqrt{3} \ln(1+x)$$

➤ Diện tích $S = S(x)$ là một hàm liên tục trên $[0;1]$ nên thể tích vật thể cần tìm được tính theo

$$\text{công thức } V = \int_0^1 4\sqrt{3} \ln(1+x) dx = 2.7673... = 4\sqrt{3}(2\ln 2 - 1)$$

$\boxed{\int \frac{\square}{\square}} \boxed{4} \boxed{\sqrt{\square}} \boxed{3} \boxed{\blacktriangleright} \boxed{\ln} \boxed{1} \boxed{+} \boxed{\text{ALPHA}} \boxed{)} \boxed{)} \boxed{\blacktriangledown} \boxed{0} \boxed{\blacktriangle} \boxed{1} \boxed{=}$

$$\int_0^1 4\sqrt{3} \ln(1+x) dx$$

$$2.676325841$$

$\Rightarrow$ Ta chọn đáp án A

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1-[Đề cương chuyên KHTN Hà Nội năm 2017]

Gọi (S) là miền giới hạn bởi đường cong $y = x^2$, trục Ox và hai đường thẳng $x = 1; x = 2$. Tính thể tích vật thể tròn xoay khi (S) quay quanh trục Ox :

- A. $\frac{31\pi}{5} - \frac{1}{3}$ B. $\frac{31\pi}{5} + \frac{1}{3}$ C. $\frac{31\pi}{5}$ D. $\frac{31\pi}{5} + 1$

Bài 2-[Thi thử THPT Nguyễn Đình Chiểu – Bình Định lần 1 năm 2017]

Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay quanh trục Ox được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = (2-x)e^{\frac{x}{2}}$ và hai trục tọa độ

- A. $2e^2 - 10$ B. $2e^2 + 10$ C. $\pi(2e^2 - 10)$ D. $\pi(2e^2 + 10)$

Bài 3-[Thi thử chuyên Vị Thanh – Hậu Giang năm 2017]

Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = \sin x; x = 0; x = \pi$. Thể tích vật thể tròn xoay sinh bởi mặt phẳng (H) quay quanh trục Ox bằng:

- A. 2π B. $\frac{\pi^2}{2}$ C. $\frac{\pi^2}{4}$ D. $\frac{\pi}{2}$

Bài 4-[Thi thử Trung tâm Diệu hiền – Cần Thơ lần 1 năm 2017]

Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi $y = 2x - x^2, y = 0$. Tính thể tích của khối tròn xoay thu được khi quay (H) xung quanh trục Ox ta được $V = \pi \left(\frac{a}{b} + 1 \right)$. Khi đó

- A. $a = 1; b = 15$ B. $a = -7; b = 15$ C. $a = 241; b = 15$ D. $a = 16; b = 15$

Bài 5-[Câu 54b Sách bài tập giải tích nâng cao 12]

Tính thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = x^3$, trục tung và hai đường thẳng $y = 1, y = 2$ quanh trục Oy . Khẳng định nào đúng?

- A. $V > 5$ B. $V < 2$ C. $V > 4$ D. $V < 3$

Bài 6-Cho hình phẳng (S) giới hạn bởi các đường $y = 2x - x^2$ (C), trục tung. Khi quay hình (S) quanh trục Oy sẽ tạo thành vật thể tròn xoay có thể tích là bao nhiêu?

- A. $V = \frac{5\pi}{2}$ B. $V = \frac{9\pi}{4}$ C. $V = \frac{11\pi}{4}$ D. $V = \frac{8\pi}{3}$

Bài 7-Tính thể tích khối tròn xoay tạo nên khi cho hình tròn tâm $I(2;1)$ bán kính $R = 1$ quay quanh trục Oy

- A. $V = 4\pi$ B. $V = \frac{11}{2}\pi$ C. $V = \frac{11\pi^2}{2}$ D. $V = 4\pi^2$

Bài 8-[Bài 29 trang 172 Sách giáo khoa giải tích nâng cao 12]

TÓM TẮT KỸ THUẬT SỬ DỤNG CASIO - VINACAL HỖ TRỢ GIẢI ĐỀ THI MÔN TOÁN 2017.

Tính thể tích của vật thể nằm giữa hai mặt phẳng $x = -1$, $x = 1$. Biết rằng thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($-1 \leq x \leq 1$) là một hình vuông có cạnh là $2\sqrt{1-x^2}$

- A. $\frac{17}{4}$ B. $\frac{9}{2}$ C. $\frac{16}{3}$ D. $\frac{5}{5}$

Bài 9-[Bài 30 trang 172 Sách giáo khoa giải tích nâng cao 12]

Tính thể tích của vật thể nằm giữa hai mặt phẳng $x = 0$, $x = \pi$. Biết rằng thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($0 \leq x \leq \pi$) là một tam giác đều có cạnh là $2\sqrt{\sin x}$

- A. $\pi\sqrt{3}$ B. $2\pi\sqrt{3}$ C. $\sqrt{3}$ D. $2\sqrt{3}$

LỜI GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1-[Đề cương chuyên KHTN Hà Nội năm 2017]

Gọi (S) là miền giới hạn bởi đường cong $y = x^2$, trục Ox và hai đường thẳng $x = 1$; $x = 2$. Tính thể tích vật thể tròn xoay khi (S) quay quanh trục Ox :

- A. $\frac{31\pi}{5} - \frac{1}{3}$ B. $\frac{31\pi}{5} + \frac{1}{3}$ C. $\frac{31\pi}{5}$ D. $\frac{31\pi}{5} + 1$

GIẢI

▪ Đường cong thứ nhất $y = f(x) = x^2$, đường thứ hai là trục hoành có phương trình $y = g(x) = 0$

▪ Hình phẳng giới hạn bởi đường cong thứ nhất $y = x^2$, trục hoành $y = 0$ và hai đường thẳng $x = 1$; $x = 2$ có thể tích là $V = \pi \int_1^2 |f^2(x) - g^2(x)| dx = \pi \int_1^2 |(x^2)^2 - 0^2| dx$

$$\pi \int_1^2 (x^2)^2 - 0^2 dx = \frac{31}{5} \pi$$

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là C

▪ Chú ý: Chú ý công thức tính thể tích có π và có bình phương của $f^2(x)$, $g^2(x)$. Rất nhiều học sinh thường quên những yếu tố này so với công thức tính diện tích.

Bài 2-[Thi thử THPT Nguyễn Đình Chiểu – Bình Định lần 1 năm 2017]

Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay quanh trục Ox được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = (2-x)e^{\frac{x}{2}}$ và hai trục tọa độ

- A. $2e^2 - 10$ B. $2e^2 + 10$ C. $\pi(2e^2 - 10)$ D. $\pi(2e^2 + 10)$

GIẢI

▪ Hình phẳng được giới hạn bởi đường thứ nhất có phương trình $y = f(x) = (2-x)e^{\frac{x}{2}}$ và đường thứ hai là trục hoành có phương trình $y = g(x) = 0$. Hình phẳng được giới hạn bởi trục tung nên có cận thứ nhất $x = 0$. Xét phương trình hoành độ giao điểm đường cong $y = f(x)$ và trục hoành:

$$(2-x)e^{\frac{x}{2}} = 0 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow \text{Cận thứ hai là } x = 2$$

- Thể tích cần tìm là $V = \pi \int_1^2 |f^2(x) - g^2(x)| dx = \pi \int_0^2 \left| \left((2-x)e^{\frac{x}{2}} \right)^2 - 0^2 \right| dx$
 $= 15.0108... = \pi(2e^2 - 10)$

$\text{[SHIFT] [x10^x] [∫] [SHIFT] [hyp] [(] [(] [2] [-] [ALPHA] [)] [)] [ALPHA] [x10^x] [x^y] [=] [ALPHA] [)] [▼] [2] [▶] [▶]$
 $\text{[)] [x^2] [▼] [0] [▲] [2] [=]}$
 $\pi \int_0^2 \left| (2-x)e^{\frac{x}{2}} \right|^2 dx$
 15.01088218

⇒ Đáp số chính xác là C

Bài 3-[Thi thử chuyên Vĩ Thanh – Hậu Giang năm 2017]

Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = \sin x$; $x = 0$; $x = \pi$. Thể tích vật thể tròn xoay sinh bởi mặt phẳng (H) quay quanh trục Ox bằng :

- A. 2π B. $\frac{\pi^2}{2}$ C. $\frac{\pi^2}{4}$ D. $\frac{\pi}{2}$

GIẢI

- Hàm thứ nhất $y = f(x) = \sin x$, hàm thứ hai (của trục Ox) là $y = 0$. Cận thứ nhất $x = 0$, cận thứ hai $x = \pi$.
- Thể tích cần tìm $V = \pi \int_0^\pi |f^2(x) - g^2(x)| dx = \pi \int_0^\pi |(\sin x)^2 - 0^2| dx = 4.9348... = \frac{\pi^2}{2}$

$\text{[SHIFT] [MODE] [4] [SHIFT] [x10^x] [∫] [SHIFT] [hyp] [\sin] [ALPHA] [)] [)] [x^2] [▼] [0] [▲] [SHIFT] [x10^x] [=]}$
 $\pi \int_0^\pi |\sin(x)^2| dx$
 4.934802201

⇒ Đáp số chính xác là B

- Chú ý:** Để tính tích phân hàm lượng giác ta cần chuyển máy tính về chế độ Radian $\text{[SHIFT] [MODE] [4]}$

Bài 4-[Thi thử Trung tâm Diệu hiền – Cần Thơ lần 1 năm 2017]

Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi $y = 2x - x^2$, $y = 0$. Tính thể tích của khối tròn xoay thu được khi quay (H) xung quanh trục Ox ta được $V = \pi \left(\frac{a}{b} + 1 \right)$. Khi đó

- A. $a = 1; b = 15$ B. $a = -7; b = 15$ C. $a = 241; b = 15$ D. $a = 16; b = 15$

GIẢI

- Phương trình hoành độ giao điểm $2x - x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow$ cận thứ nhất $x = 0$ cận thứ hai $x = 2$

Ta được cận thứ nhất $x = 0$ và cận thứ hai $x = a$. Khi đó diện tích hình phẳng là :

$$S = \int_0^a |2\sqrt{ax} - 0| dx$$

- Tính thể tích $V = \pi \int_0^\pi |f^2(x) - g^2(x)| dx = \pi \int_0^\pi |(2x - 2)^2 - 0^2| dx = \frac{16}{15}\pi$

$\text{[SHIFT] [x10^x] [∫] [SHIFT] [hyp] [(] [2] [ALPHA] [)] [-] [ALPHA] [)] [)] [DEL] [x^2] [)] [x^2] [▼] [0] [▲] [2] [=]}$
 $\pi \int_0^2 |(2x - x^2)^2| dx$
 $\frac{16}{15}\pi$

TÓM TẮT KỸ THUẬT SỬ DỤNG CASIO - VINACAL HỖ TRỢ GIẢI ĐỀ THI MÔN TOÁN 2017.

$$\text{Mà } V = \pi \left(\frac{a}{b} + 1 \right) \Rightarrow \frac{a}{b} + 1 = \frac{16}{15} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{1}{15} \Rightarrow a = 1; b = 15$$

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là A

Bài 5-[Câu 54b Sách bài tập giải tích nâng cao 12]

Tính thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = x^3$, trục tung và hai đường thẳng $y = 1, y = 2$ quanh trục Oy . Khẳng định nào đúng?

A. $V > 5$

B. $V < 2$

C. $V > 4$

D. $V < 3$

GIẢI

- Hình phẳng (H) giới hạn bởi đường thứ nhất $x = f(y) = \sqrt[3]{y}$ và đường thứ hai (trục tung): $x = 0$. Cận thứ nhất $y = 1$ và cận thứ hai $y = 2$.

- Theo công thức tính thể tích vật thể tròn xoay khi quay quanh trục Oy : $V = \pi \int_1^2 [f^2(y) - g^2(x)] dy$
 $= \pi \int_1^2 [(\sqrt[3]{y})^2 - 0^2] dy = 4.099... > 4$

SHIFT x10^x ∫_{dx} SHIFT hyp (SHIFT xⁿ 3 ► ALPHA) ►) x² = 0 ▼ 1 ▲ 2 =

$$\pi \int_1^2 (\sqrt[3]{x})^2 - 0 dx$$

4.099405388

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là C

- Chú ý: Để tính thể tích hình phẳng xoay quanh trục Oy thì phải chuyển phương trình đường cong về dạng $x = f(y)$ và $x = g(y)$

Bài 6-Cho hình phẳng (S) giới hạn bởi các đường $y = 2x - x^2$ (C), trục tung. Khi quay hình (S) quanh trục Oy sẽ tạo thành vật thể tròn xoay có thể tích là bao nhiêu?

A. $V = \frac{5\pi}{2}$

B. $V = \frac{9\pi}{4}$

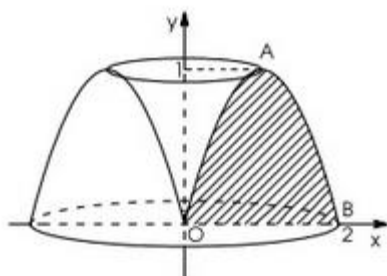
C. $V = \frac{11\pi}{4}$

D. $V = \frac{8\pi}{3}$

GIẢI

- Xét $y = 2x - x^2 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 1-y \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + \sqrt{1-y} \text{ (AO)} \\ x = 1 - \sqrt{1-y} \text{ (AB)} \end{cases}$ với $y \leq 1$. Đường cong (C) chia làm 2 nhánh.

- Phương trình tung độ giao điểm hai nhánh: $1 + \sqrt{1-y} = 1 - \sqrt{1-y} \Leftrightarrow \sqrt{1-y} = 0 \Leftrightarrow y = 1$



- Theo công thức tính thể tích vật thể tròn xoay khi quay quanh trục Oy :

$$V = \pi \int_0^1 [(1 + \sqrt{1-y})^2 - (1 - \sqrt{1-y})^2] dy = 8.3775... = \frac{8\pi}{3}$$

SHIFT x10^x ∫_{dx} SHIFT hyp (1 + √ 1 -) x² = (1 - √ 1 -) x² = ALPHA) ►) x² = 0 ▲ 1 =

$$\pi \int_0^1 \left| (1 + \sqrt{1-x})^2 - i \right| dx$$

8.37758041

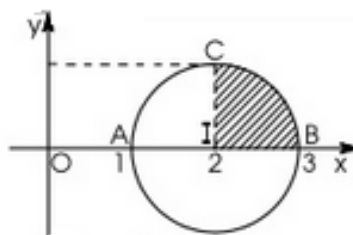
⇒ Đáp số chính xác là **D**

Bài 7-Tính thể tích khối tròn xoay tạo nên khi cho hình tròn tâm $I(2;1)$ bán kính $R=1$ quay quanh trục Oy

- A. $V = 4\pi$ B. $V = \frac{11}{2}\pi$ C. $V = \frac{11\pi^2}{2}$ D. $V = 4\pi^2$

GIẢI

- Phương trình đường tròn $(I;R): (x-2)^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 1 - y^2 \Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt{1-y^2}$. Đường tròn (C) chia làm 2 nhánh.
- $$\begin{cases} x = 2 + \sqrt{1-y^2} & (CB) \\ x = 2 - \sqrt{1-y^2} & (CA) \end{cases}$$



- Theo công thức tính thể tích vật thể tròn xoay khi quay quanh trục Oy :

$$V = 2\pi \int_0^1 \left[\left(2 + \sqrt{1-y^2} \right)^2 - \left(2 - \sqrt{1-y^2} \right)^2 \right] dy = 39.4784... = 4\pi^2$$

2 SHIFT x10^x ∫ dx SHIFT hyp (2 + √ 1 -) 1 - ALPHA) x^2 ►) x^2 - (2 -

√ 1 - ALPHA) x^2 ►) x^2 ▼ 0 ▲ 1 =

$$2\pi \int_0^1 \left| (2 + \sqrt{1-x^2})^2 - \right| dx$$

39.4784176

⇒ Đáp số chính xác là **A**

Bài 8-[Bài 29 trang 172 Sách giáo khoa giải tích nâng cao 12]

Tính thể tích của vật thể nằm giữa hai mặt phẳng $x=-1$, $x=1$. Biết rằng thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($-1 \leq x \leq 1$) là một hình vuông có cạnh là $2\sqrt{1-x^2}$

- A. $\frac{17}{4}$ B. $\frac{9}{2}$ C. $\frac{16}{3}$ D. 5

GIẢI

- Thiết diện của vật thể tạo bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox là hình vuông. $\Rightarrow$ Diện tích thiết diện $S = S(x) = 4(1-x^2)$.
- Vì hàm $S = S(x)$ liên tục trên $[-1;1]$ nên vật thể có thể tích là: $V = \int_{-1}^1 4(1-x^2) dx = \frac{16}{3}$

∫ dx 4 (1 -) x^2) ▼ - 1 ▲ 1 =

Math ▲

$$\int_{-1}^1 4(1-x^2) dx$$

$\frac{16}{3}$

TÓM TẮT KỸ THUẬT SỬ DỤNG CASIO – VINACAL HỖ TRỢ GIẢI ĐỀ THI MÔN TOÁN 2017.

⇒ Đáp số chính xác là C

Bài 9-[Bài 30 trang 172 Sách giáo khoa giải tích nâng cao 12]

Tính thể tích của vật thể nằm giữa hai mặt phẳng $x=0$, $x=\pi$. Biết rằng thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($0 \leq x \leq \pi$) là một tam giác đều có cạnh là $2\sqrt{\sin x}$

A. $\pi\sqrt{3}$

B. $2\pi\sqrt{3}$

C. $\sqrt{3}$

D. $2\sqrt{3}$

GIẢI

- Thiết diện của vật thể tạo bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox là tam giác đều $\Rightarrow$ Diện tích thiết

$$\text{diện } S = S(x) = \frac{\sqrt{3} \left(2\sqrt{\sin x}\right)^2}{4} = \sqrt{3} \sin x.$$

- Vì hàm $S = S(x)$ liên tục trên $[0; \pi]$ nên vật thể có thể tích là : $V = \int_0^{\pi} \sqrt{3} \sin x dx = \frac{16}{3}$



$$\int_0^{\pi} \sqrt{3} \sin(X) dx$$

3.464101615

⇒ Đáp số chính xác là D

PHƯƠNG PHÁP CASIO – VINACAL

BÀI 22. TÍNH NHANH QUÃNG ĐƯỜNG VẬT CHUYỂN ĐỘNG.

1) KIẾN THỨC NỀN TẢNG

Quãng đường đi được của một vật : Một vật chuyển động có vận tốc thay đổi theo thời gian ,

$v = f(t)$ trong khoảng thời gian từ t_0 đến t_1 thì quãng đường vật đi được là : $S = \int_{t_0}^{t_1} f(t) dt$

2) CÁCH TÍNH NGUYÊN HÀM

VD1-[Câu 24 Đề minh họa BGD-ĐT lần 1 năm 2017]

Một ô tô đang chạy với vận tốc $10m/s$ thì người lái đạp phanh, từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -5t + 10(m/s)$ trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh tới khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển được bao nhiêu mét ?

A. $0,2m$ B. $2m$ C. $10m$ D. $20m$

GIẢI

❖ **Cách 1 : CASIO**

➤ Ta có quãng đường $S(t) = v(t) \cdot t$. Vì phân 2 vế theo t ta được

$$S'(t) \cdot dt = v(t) \cdot dt \Leftrightarrow S'(t) = v(t)$$

$$\Rightarrow S(t) \text{ là 1 nguyên hàm của } v(t) \Rightarrow S(t) = \int_{t_0}^{t_1} v(t) dt$$

➤ Khi xe dừng hẳn thì vận tốc tại điểm dừng $= 0 \Leftrightarrow 0 = -5t + 10 \Leftrightarrow t = 2$

Chọn gốc thời gian $t_0 = 0$ thì $t_1 = 2$

$$\text{Quãng đường là } S = \int_0^2 (-5t + 10) dt$$

Sử dụng máy tính Casio với chức năng tính tích phân

$$\int_0^2 (-5x + 10) dx$$

$$\int_0^2 (-5x + 10) dx$$

$$10$$

Quãng đường $S = 10m$. Vậy đáp án chính xác là C

❖ **Bình luận :**

• Nhắc lại kiến thức quan trọng nhất của Tích phân : Nếu hàm $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ thì $F'(x) = f(x)$

• Chính áp dụng kiến thức trên ta thấy $S' = v(t) \Rightarrow S$ là một nguyên hàm của $v(t)$

$$\Rightarrow S(t) = \int_{t_0}^{t_1} v(t) dt$$

VD2-[Đề cương chuyên KHTN Hà Nội năm 2017]

Lúc 9h sáng, một ô tô bắt đầu xuất phát từ Nhà hát Lớn thành phố Hà Nội đi thành phố Hồ Chí Minh. Trong 1 giờ đầu tiên, vì xe đi trong nội thành nên tốc độ di chuyển chưa nhanh, xe ô tô đi với vận tốc $v(t) = 0,5 + 0,2 \cdot \cos \pi t$ (km/phút), trong đó t là thời gian kể từ lúc xe ô tô xuất phát được tính bằng đơn vị phút. Hỏi lúc 9h10' x ô tô đi được quãng đường bao nhiêu km ?

A. 0,7

B. 5

C. 0,3

D. 5,2

GIẢI

❖ **Cách 1 : CASIO**

- Ta có quãng đường $S(t) = v(t).t$. Vì phân 2 về the t ta được

$$S'(t).dt = v(t).dt \Leftrightarrow S'(t) = v(t)$$

$$\Rightarrow S(t) \text{ là 1 nguyên hàm của } v(t) \Rightarrow S(t) = \int_{t_0}^t v(t) dt$$

- Chọn gốc thời gian lúc 9h là $t_0 = 0$ thì lúc 9h10' là $t_1 = 10$

$$\text{Quãng đường là } S = \int_0^{10} (0.5 + 0.2 \cos \pi t) dt$$

Sử dụng máy tính Casio với chức năng tính tích phân

$$\int_0^{10} (0.5 + 0.2 \cos(\pi \cdot 5)) dt$$

Quãng đường $S = 5m$. Vậy đáp án chính xác là **B**

❖ **Bình luận :**

- Bài toán rất chuẩn mực về phép tính toán, con số ra cũng phản ánh tình trạng tắc xe tòi tệ ở Hà Nội khi 10 s chỉ đi được có 5m

VD3-[Thi thử chuyên Hạ Long – Quảng Ninh lần 1 năm 2017]

Một vật chuyển động với vận tốc thay đổi theo thời gian được tính bởi công thức $v(t) = 3t + 2$, thời gian được tính theo đơn vị giây, quãng đường vật đó di chuyển được tính theo đơn vị m . Biết tại thời điểm $t = 2(s)$ thì vật di chuyển được quãng đường là $10(m)$. Hỏi tại thời điểm $t = 30(s)$ thì vật di chuyển được quãng đường dài là bao nhiêu ?

A. 1410m

B. 1140m

C. 300m

D. 240m

GIẢI

❖ **Cách 1 : CASIO**

- Ta có quãng đường $S(t) = v(t).t$. Vì phân 2 về the t ta được

$$S'(t).dt = v(t).dt \Leftrightarrow S'(t) = v(t)$$

$$\Rightarrow S(t) \text{ là 1 nguyên hàm của } v(t) \Rightarrow S(t) = \int_{t_0}^t v(t) dt$$

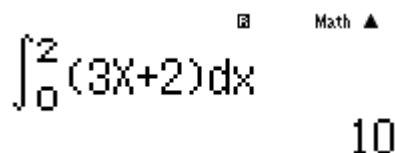
- Chọn thời gian lúc đầu là t_0 sau 2 giây thì $t_1 = t_0 + 2$

$$\text{Quãng đường là } S = \int_{t_0}^{t_0+2} (3t + 2) dt$$

Để tìm t_0 ta thiết lập quan hệ $\int_{t_0}^{t_0+2} (3t + 2) dt = 10(m)$. Ta dự đoán t_0 có thể là 0 ; 1 ; 2... và ta

tiến hành thử với $t_0 = 0$

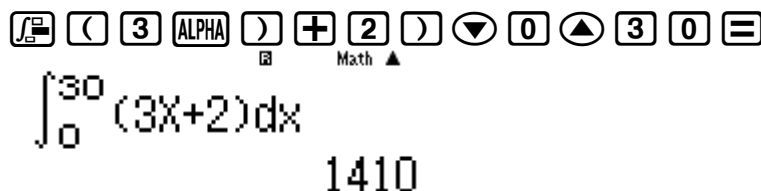
Sử dụng máy tính Casio với chức năng tính tích phân



$$\int_0^{10} (3x+2)dx = 10$$

Ta thấy kết quả ra $10(m)$ vậy dự đoán của ta đúng và $t_0 = 0$

➤ Quãng đường vật đi được sau 30 giây là : $S_1 = \int_{t_0}^{t_0+30} (3t+2)dt = \int_0^{30} (3t+2)dt$



$$\int_0^{30} (3x+2)dx = 1410$$

Ta thấy $S_1 = 1410(m)$ và **A** là đáp án chính xác

❖ **Bình luận :**

- Một thời gian ban đầu không nhất thiết phải bằng 0 tuy nhiên khi sử dụng phép thử để tìm t_0 thì ta luôn ưu tiên $t_0 = 0$

VD4-[Thi thử chuyên Hạ Long – Quảng Ninh lần 1 năm 2017]

Một vận động viên đua F_1 đang chạy với vận tốc $10(m/s)$ thì anh ta tăng tốc với gia tốc $a(t) = 6(m/s^2)$ trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây từ lúc tăng tốc. Hỏi quãng đường xe của anh ta đi được trong thời gian $10(s)$ kể từ lúc bắt đầu tăng tốc là bao nhiêu ?

A. $1100m$

B. $400m$

C. $1010m$

D. $1110m$

GIẢI

❖ **Cách 1 : CASIO**

➤ Ta có quãng đường $S(t) = v(t).t$. Vì phân 2 vế theo t ta được $S'(t).dt = v(t).dt \Leftrightarrow S'(t) = v(t)$

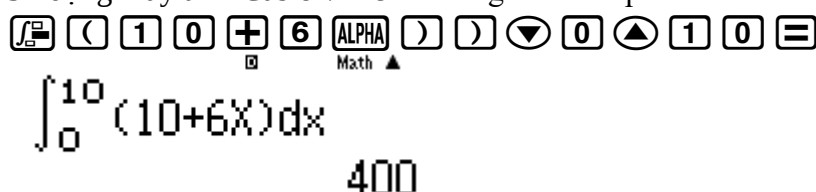
$$\Rightarrow S(t) \text{ là 1 nguyên hàm của } v(t) \Rightarrow S(t) = \int_{t_0}^{t_1} v(t)dt$$

➤ Vận tốc của xe $v(t) = v_0 + a(t) \Rightarrow v(t) = 10 + 6t$

Chọn gốc thời gian lúc xe bắt đầu tăng tốc là $t_0 = 0$ vậy $t_1 = t_0 + 10 = 10$

Quãng đường là $S = \int_0^{10} (10 + 6t)dt$

Sử dụng máy tính Casio với chức năng tích phân



$$\int_0^{10} (10+6x)dx = 400$$

Ta thấy kết quả ra $400(m)$ vậy **B** là đáp án chính xác

❖ **Bình luận :**

- Ta có thể giải theo công thức vật lý : $S = v_0 t + \frac{at^2}{2} = 10.10 + \frac{6.10^2}{2} = 400(m)$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1-[Thi thử THPT Lương Thế Vinh – HN lần 2 năm 2017]

TÓM TẮT KỸ THUẬT SỬ DỤNG CASIO - VINACAL HỖ TRỢ GIẢI ĐỀ THI MÔN TOÁN 2017.

Giả sử một vật từ trạng thái nghỉ khi $t=0$ chuyển động với vận tốc $v(t)=t(5-t)$ (m/s). Tính quãng đường vật đi được cho đến khi nó dừng hẳn

- A. $\frac{125}{12}(m)$ B. $\frac{125}{9}(m)$ C. $\frac{125}{3}(m)$ D. $\frac{125}{6}(m)$

Bài 2-[Thi thử Group nhóm toán Facebook năm 2017]

Học sinh lần đầu thử nghiệm tên lửa tự chế phóng từ mặt đất theo phương thẳng đứng với vận tốc $15m/s$. Hỏi sau $2.5s$ tên lửa lên đến độ cao bao nhiêu? Giả sử bỏ qua sức cản của gió, tên lửa chỉ chịu tác động của trọng lực $g=9.8(m/s^2)$

- A. $62.25m$ B. $6.875m$ C. $68.125m$ D. $30.625m$

Bài 3-[Bài 15 trang 153 Sách giáo khoa giải tích nâng cao 12]

Một vật đang chuyển động với vận tốc $v=10(m/s)$ thì tăng tốc với gia tốc $a(t)=3t+t^2(m/s^2)$.

Tính quãng đường vật đi được trong thời gian $10(s)$ kể từ lúc bắt đầu tăng tốc

- A. $996m$ B. 1200 C. $1680m$ D. $3600m$

Bài 4-[Đề cương chuyên KHTN Hà Nội năm 2017]

Một vật chuyển động với vận tốc $v(t)=\frac{1}{2\pi}+\frac{\sin(\pi t)}{\pi}$ (m/s). Quãng đường di chuyển của vật đó trong khoảng thời gian $1,5$ giây chính xác đến $0,01(m)$ là:

- A. $0,32m$ B. $0,33m$ C. $0,34m$ D. $0,35m$

Bài 5-[Thi thử nhà sách Lovebook lần 1 năm 2017]

Một bác thợ xây bơm nước vào bể chứa nước. Gọi $h(t)$ là thể tích nước bơm được sau t giây. Cho $h'(t)=3at^2+bt$ với a, b là các tham số. Ban đầu bể không có nước. Sau 5 giây thì thể tích nước trong bể là $150m^3$, sau 10 giây thì thể tích nước trong bể là $1100m^3$. Tính thể tích nước trong bể sau khi bơm được 20 giây.

- A. $8400m^3$ B. $2200m^3$ C. $600m^3$ D. $4200m^3$

LỜI GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN**Bài 1-[Thi thử THPT Lương Thế Vinh – HN lần 2 năm 2017]**

Giả sử một vật từ trạng thái nghỉ khi $t=0$ chuyển động với vận tốc $v(t)=t(5-t)$ (m/s). Tính quãng đường vật đi được cho đến khi nó dừng hẳn

- A. $\frac{125}{12}(m)$ B. $\frac{125}{9}(m)$ C. $\frac{125}{3}(m)$ D. $\frac{125}{6}(m)$

GIẢI

- Thời điểm $t_0=0$ vật ở trạng thái nghỉ. Tại thời điểm t_1 ($t_1 > t_0$) vật dừng lại hẳn khi đó $v(t)=0$
 $\Leftrightarrow t_1(5-t_1)=0 \Leftrightarrow t_1=5$
- Vận tốc là một hàm biến thiên theo thời gian, đồng thời $v(t)$ liên tục trên miền $[0;5] \Rightarrow$ Quãng

đường vật di chuyển từ trạng thái nghỉ đến khi dừng hẳn là: $\int_{t_0}^{t_1} v(t) dt = \int_0^5 t(5-t) dt = \frac{125}{6}$



$\int_0^5 x(5-x)dx = \frac{125}{6}$

$\Rightarrow$ D là đáp án chính xác

TÓM TẮT KỸ THUẬT SỬ DỤNG CASIO - VINACAL HỖ TRỢ GIẢI ĐỀ THI MÔN TOÁN 2017.

Chú ý : Vận tốc của vật theo thời điểm nếu biểu diễn trên trục tọa độ Oxy sẽ là một Parabol . Dựa vào đó nếu đề bài yêu cầu tìm thời điểm để vật có vận tốc lớn nhất thì ta dựa vào tọa độ đỉnh của

Parabol suy ra $t = \frac{5}{2}$ và vận tốc lớn nhất vật có thể đạt được là $v\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{25}{4} (m/s)$

Bài 2-[Thi thử Group nhóm toán Facebook năm 2017]

Học sinh lần đầu thử nghiệm tên lửa tự chế phóng từ mặt đất theo phương thẳng đứng với vận tốc $15m/s$. Hỏi sau $2.5s$ tên lửa lên đến độ cao bao nhiêu ? Giả sử bỏ qua sức cản của gió, tên lửa chỉ chịu tác động của trọng lực $g = 9.8(m/s^2)$

A. 62.25m

B. 6.875m

C. 68.125m

D. 30.625m

GIẢI

- Phương trình vận tốc theo thời gian $v(t) = v_0 + gt = 15 - 9.8t$
- Vì hàm $v(t)$ liên tục trên miền $[0; 2.5]$ nên quãng đường vật di chuyển từ thời điểm $t_0 = 0$ đến thời

điểm $t_1 = 2.5(s)$ được tính theo công thức : $S = \int_{t_0}^{t_1} v(t) dt = \int_0^{2.5} (15 - 9.8t) dt = 6.875(m)$



$$\int_0^{2.5} (15 - 9.8x) dx = 6.875$$

⇒ Nếu chọn thì chọn đáp án B

Chú ý : Nếu xét theo phân loại dạng vật lý thì đây là dạng bài chuyển động thẳng đứng

Bài 3-[Bài 15 trang 153 Sách giáo khoa giải tích nâng cao 12]

Một vật đang chuyển động với vận tốc $v = 10(m/s)$ thì tăng tốc với gia tốc $a(t) = 3t + t^2 (m/s^2)$.

Tính quãng đường vật đi được trong thời gian $10(s)$ kể từ lúc bắt đầu tăng tốc

A. 996m

B. 1200

C. 1680m

D. 3600m

GIẢI

- Ta có vận tốc $v(t) = v_0 + at = 10 + (3t + t^2)t$ và $v(t)$ là một hàm biến thiên theo thời gian và liên tục trên $R \Rightarrow$ Quãng đường vật di chuyển từ thời điểm $t_0 = 0$ đến thời điểm $t_1 = 10$ được tính

theo công thức $S = S(t) = \int_{t_0}^{t_1} v(t) dt = \int_0^{10} (10 + (3t + t^2)t) dt = 966(m)$



$$\int_0^{10} (10 + (3x + x^2)x) dx = 966$$

⇒ Đáp số chính xác là D

Chú ý : Ta phải nhớ rõ công thức $v(t) = v_0 + at$ với $a = 3t + t^2$ tránh nhầm lẫn $at = 3t + t^2$

⇒ $v(t) = 10 + 3t + t^2$ là sai

Bài 4-[Đề cương chuyên KHTN Hà Nội năm 2017]

Một vật chuyển động với vận tốc $v(t) = \frac{1}{2\pi} + \frac{\sin(\pi t)}{\pi} (m/s)$. Quãng đường di chuyển của vật đó trong khoảng thời gian $1,5$ giây chính xác đến $0,01(m)$ là :

A. 0,32m

B. 0,33m

C. 0,34m

D. 0,35m

GIẢI

TÓM TẮT KỸ THUẬT SỬ DỤNG CASIO - VINACAL HỖ TRỢ GIẢI ĐỀ THI MÔN TOÁN 2017.

- Vận tốc $v(t)$ là một hàm biến thiên theo thời gian $\Rightarrow$ Quãng đường vật di chuyển từ lúc bắt đầu

tới thời điểm 1,5 giây là : $\int_{t_0}^{t_1} v(t) dt = \int_0^{1.5} \left(\frac{1}{2\pi} + \frac{\sin(\pi t)}{\pi} \right) dt = 0.34 \text{ (s)}$ (sau khi làm tròn)

$\text{[SHIFT] [MODE] [4] [1/x] [()] [=] [1] [\text{v}] [2] [\text{SHIFT}] [\times 10^x] [\text{v}] [+] [=] [\sin] [\text{SHIFT}] [\times 10^x] [\text{ALPHA}] [()] [()] [\text{v}]$
 $\text{[SHIFT]} [\times 10^x] [\text{v}] [()] [\text{v}] [0] [\text{v}] [1] [\cdot] [5] [=]$

$\int_0^{1.5} \left(\frac{1}{2\pi} + \frac{\sin(\pi x)}{\pi} \right) dx$
 0.3400535983

$\Rightarrow$ C là đáp án chính xác

Bài 5-[Thi thử nhà sách Lovebook lần 1 năm 2017]

Một bác thợ xây bơm nước vào bể chứa nước. Gọi $h(t)$ là thể tích nước bơm được sau t giây. Cho $h'(t) = 3at^2 + bt$ với a, b là các tham số. Ban đầu bể không có nước. Sau 5 giây thì thể tích nước trong bể là $150m^3$, sau 10 giây thì thể tích nước trong bể là $1100m^3$. Tính thể tích nước trong bể sau khi bơm được 20 giây.

- A. $8400m^3$ B. $2200m^3$ C. $600m^3$ D. $4200m^3$

GIẢI

- $h'(t)$ là một hàm biến thiên theo thời gian và liên tục trên $R \Rightarrow$ Thể tích nước bơm được tính

theo công thức $V = h(t) = \int_{t_0}^{t_1} (3at^2 + bt) dt$

- Tại thời điểm $t_1 = 5$ giây thì $V = \int_0^5 (3at^2 + bt) dt = 150(m^3) \Leftrightarrow \left(at^3 + \frac{bt^2}{2} \right) \Big|_0^5 = 150$

$\Leftrightarrow 125a + 12.5b = 150$

- Tại thời điểm $t_1 = 10$ giây thì $V = \int_0^{10} (3at^2 + bt) dt = 1100(m^3) \Leftrightarrow \left(at^3 + \frac{bt^2}{2} \right) \Big|_0^{10} = 1100$

$\Leftrightarrow 1000a + 50b = 1100$

- Giải hệ phương trình $\begin{cases} 125a + 12.5b = 150 \\ 1000a + 50b = 1100 \end{cases}$

$\text{[MODE] [5] [1] [1] [2] [5] [=] [1] [2] [\cdot] [5] [=] [1] [5] [0] [=] [1] [0] [0] [0] [=] [5] [0]$
 $\text{[v]} [1] [1] [0] [0] [=] [=] [=]$

$X =$

$Y =$

1

2

Vậy tại thời điểm $t_1 = 20$ thì thể tích $V = \int_0^{20} (3t^2 + 2t) dt = 8400 \Rightarrow$ A là đáp án chính xác

$\text{[v]} [()] [3] [\text{ALPHA}] [()] [x^2] [+] [2] [\text{ALPHA}] [()] [()] [\text{v}] [0] [\text{v}] [2] [0] [=]$

$\int_0^{20} (3x^2 + 2x) dx$
 8400

PHƯƠNG PHÁP CASIO - VINACAL

BÀI 23. GIẢI NHANH BÀI TOÁN TÍCH PHÂN CHỐNG LẠI CASIO.

1) KIẾN THỨC NỀN TẢNG

1. Kỹ thuật ép hệ phương trình : Cho hệ thức $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = f(a, b, c)$, muốn tìm a, b, c thỏa mãn

hệ thức $h(a, b, c) = m$. Ta sẽ tính giá trị tích phân $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$ rồi lưu vào A .

Vậy ta sẽ ép được hệ phương trình $\begin{cases} f(a, b, c) = A \\ h(a, b, c) = m \end{cases}$. Để giải hệ phương trình này ta sẽ sử dụng chức

năng dò nghiệm SHIFT SOLVE hoặc chức năng lập bảng giá trị MODE 7 của máy tính Casio (Xem ví dụ minh họa 1, 2, 3, 4, 5, 6)

2. Kỹ thuật ép cận nguyên hàm : Cho nguyên hàm gốc $\int f(x) dx$ và nguyên hàm hệ quả $\int f(u(t)) dt$ qua phép đổi biến $x = u(t)$. Để sử dụng được máy tính Casio ta ép hệ số cho nguyên hàm gốc để trở thành tích phân xác định $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$. Vì nguyên hàm gốc và nguyên hàm hệ quả là

tương đương nên $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\alpha'}^{\beta'} f(u(t)) dx$ (α', β' là 2 cận mới)

(Xem ví dụ minh họa 7, 8, 9)

2) VÍ DỤ MINH HỌA

VD1-[Câu 26 Đề minh họa Bộ GD-ĐT lần 2 năm 2017]

Biết $\int_3^4 \frac{dx}{x^2 + x} = a \ln 2 + b \ln 3 + c \ln 5$ với a, b, c là các số nguyên. Tính $S = a + b + c$

A. $S = 6$

B. $S = 2$

C. $S = -2$

D. $S = 0$

GIẢI

➤ Tính tích phân $\int_3^4 \frac{dx}{x^2 + x}$ và lưu vào biến A

$\int_3^4 \frac{1}{x^2 + x} dx$ Ans→A
0.06453852114 0.06453852114

➤ Khi đó $A = a \ln 2 + b \ln 3 + c \ln 5 \Leftrightarrow A = \ln(2^a \cdot 3^b \cdot 5^c) \Leftrightarrow 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c = e^A = \frac{16}{15}$

e^A

$\frac{16}{15}$

Để thấy $\frac{16}{15} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{3 \cdot 5} = 2^4 \cdot 3^{-1} \cdot 5^{-1} = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \Rightarrow a = 4; b = -1; c = -1 \Rightarrow S = 2$

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là B

VD2-[Tổng hợp tích phân chống Casio – Internet 2017]

Cho $I = \int_1^2 \ln(x+1) dx = a \ln 3 + b \ln 2 + c$ ($a, b, c \in \mathbb{Z}$). Tính giá trị của biểu thức $A = a + b + c$

A. 0

B. 1

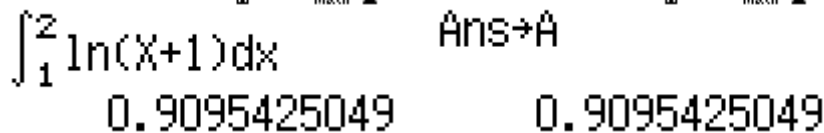
C. 2

D. 3

GIẢI

- Tính giá trị tích phân $I = \int_1^2 \ln(x+1) dx$ rồi lưu giá trị này vào biến A





- Khi đó $a \ln 3 + b \ln 2 + c = A \Leftrightarrow \ln(3^a \cdot 2^b \cdot e^c) = \ln e^A \Leftrightarrow 3^a \cdot 2^b \cdot e^c = e^A \Leftrightarrow 3^a \cdot 2^b = \frac{e^A}{e^c}$

Để tính được $3^a \cdot 2^b$ ta sử dụng chức năng MODE 7 với hàm $f(X) = 3^a \cdot 2^b = \frac{e^A}{e^c}$





Quan sát màn hình xem giá trị nào của $f(X)$ (cũng là của $3^a \cdot 2^b$) là số hữu tỉ thì nhận

Đễ thấy với $X = c = -1$ thì $3^a \cdot 2^b = 6.75 = \frac{27}{4} = 3^3 \cdot 2^{-2} \Rightarrow a = 3; b = -2$

Tóm lại $a + b + c = 3 - 2 - 1 = 0$

$\Rightarrow$ Đáp án A là đáp án chính xác

VD3-[Tổng hợp tích phân chống Casio – Internet 2017]

Cho $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} dx = (a + b) \ln 3 + c \ln 2$ ($a, b, c \in \mathbb{Q}$). Tính giá trị của biểu thức :

$A = a + b + c$

A. 0

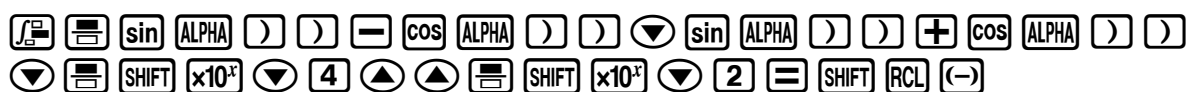
B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{1}{3}$

D. 2

GIẢI

- Tính giá trị tích phân $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} dx$ rồi lưu giá trị này vào biến A





TÓM TẮT KỸ THUẬT SỬ DỤNG CASIO - VINACAL HỖ TRỢ GIẢI ĐỀ THI MÔN TOÁN 2017.

- Khi đó $(a+b)\ln 3 + c\ln 2 = A \Leftrightarrow \ln(3^{a+b} \cdot 2^c) = \ln e^A$. Mà ta tính được $e^A = \sqrt{2}$

$\boxed{\text{ALPHA}} \boxed{\times 10^x} \boxed{x^\square} \boxed{\text{ALPHA}} \boxed{(-)} \boxed{=}$
 e^A

1.414213562

$\Rightarrow 3^{a+b} \cdot 2^c = \sqrt{2} = 3^0 \cdot 2^{\frac{1}{2}} \Rightarrow a+b=0; c=\frac{1}{2}$

Tóm lại $a+b+c=0+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ Đáp án **B** là đáp án chính xác

VD4-[Tổng hợp tích phân chống Casio – Internet 2017]

Cho $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^4 x dx = \pi a + b$ ($a, b \in \mathbb{Q}$). Tính giá trị của biểu thức $A = a + b$

A. $\frac{11}{32}$

B. $-\frac{5}{32}$

C. 4

D. 7

GIẢI

- Tính giá trị tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(x+1) dx$ rồi lưu giá trị này vào biến A

$\boxed{\int \square} \boxed{\sin} \boxed{\text{ALPHA}} \boxed{)} \boxed{)} \boxed{x^\square} \boxed{4} \boxed{\nabla} \boxed{0} \boxed{\blacktriangle} \boxed{=}$
 $\boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\times 10^x} \boxed{\nabla} \boxed{4} \boxed{=}$
 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(X)^4 dx$ Ans $\rightarrow$ A
 0.04452431127 0.04452431127

- Khi đó $\pi a + b = A$. Nếu đáp số A đúng thì hệ $\begin{cases} \pi a + b = A \\ a + b = \frac{11}{32} \end{cases}$ có nghiệm hữu tỉ (thuộc $\mathbb{Q}$)

$\boxed{=}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\blacktriangleright}$ $\boxed{\blacktriangleright}$ $\boxed{\nabla}$ $\boxed{-}$ $\boxed{5}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{3}$ $\boxed{2}$ $\boxed{=}$ $\boxed{=}$
 $X=$ $Y=$
 $\frac{3}{32}$ $-\frac{1}{4}$

Rõ ràng $a = \frac{3}{32}; b = -\frac{1}{4}$ là các số hữu tỉ

$\Rightarrow$ **B** là đáp án chính xác

VD5-[Tổng hợp tích phân chống Casio – Internet 2017]

Cho $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x(1 + \sin 2x) dx = \frac{\pi^2 + a}{b} \rightarrow (a, b, c \in \mathbb{Z})$ với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính biểu thức

$A = a + b$

A. 20

B. 40

C. 60

D. 10

GIẢI

- Tính giá trị tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x(1 + \sin 2x) dx$ rồi lưu giá trị này vào biến A

TÓM TẮT KỸ THUẬT SỬ DỤNG CASIO - VINACAL HỖ TRỢ GIẢI ĐỀ THI MÔN TOÁN 2017.

$\int_0^4 x(1+\sin(2x))dx$

0.5584251375 0.5584251375

- Khi đó $\frac{\pi^2 + a}{b} = A$. Nếu đáp số **A** đúng thì $a + b = 20 \Rightarrow b = 20 - a \Rightarrow A = \frac{\pi^2 + a}{20 - a}$

Sử dụng chức năng SHIFT SOLVE để tìm a (với a là số nguyên)

$A = \frac{\pi^2 + a}{20 - a}$
 $X = 0.8334685564$
 $L - R = 0$

Kết quả không ra một số nguyên $\Rightarrow$ Đáp số **A** sai

- Nếu đáp số **B** đúng thì $a + b = 40 \Rightarrow b = 40 - a \Rightarrow A = \frac{\pi^2 + a}{40 - a}$

$A = \frac{\pi^2 + a}{40 - a}$
 $X = 8$
 $L - R = 0$

Vậy $a = 8 \Rightarrow b = 32$

$\Rightarrow$ Đáp án **A** là đáp án chính xác

VD6-[Tổng hợp tích phân chống Casio – Internet 2017]

Cho $I = \int_1^2 x^3 \ln^2 x dx = \frac{ae^4 + b}{c}$ ($a, b, c \in \mathbb{Z}$) với $\frac{a}{c}; \frac{b}{c}$ là các phân số tối giản. Tính biểu thức

$A = a + b$

A. 15

B. -28

C. 36

D. 46

GIẢI

- Tính giá trị tích phân $I = \int_1^2 x^3 \ln^2 x dx$ rồi lưu giá trị này vào biến A

$\int_1^2 x^3 \ln^2(x) dx$

1.004267695 1.004267695

- Khi đó $\frac{ae^4 + b}{c} = A$. Nếu đáp số **A** đúng thì $c = 15 - a - b \Rightarrow 15A - a.A - b.A = a.e^4 + b$

$\Rightarrow b = \frac{15A - a.A - a.e^4}{A + 1}$

Sử dụng chức năng MODE 7 để tìm a (với a là số nguyên)

$a = 1$

Kết quả không tìm ra một số nguyên $\Rightarrow$ Đáp số **A** sai

- Tương tự như vậy với đáp số **C** đúng thì $\Rightarrow b = \frac{36A - a.A - a.e^4}{A+1}$

Ta tìm được nghiệm $a = 129$ là một số hữu tỉ

$\Rightarrow$ Đáp án **C** là đáp án chính xác

VD7-[Trích đề thi ĐH khối B năm 2005]

Cho tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x} \sin 2x dx$. Nếu đổi biến số $t = \sin x$ thì :

A. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^t . t . dt$

B. $I = \int_0^1 e^t . t . dt$

C. $I = 2 \int_0^1 e^t . t . dt$

D. $I = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^t . t . dt$

GIẢI

- Tính giá trị tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x} \sin 2x dx$

- Nếu đáp án **A** đúng thì giá trị tích phân ở câu **A** phải giống giá trị tích phân ở đề bài và cùng

bằng 2. Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^t . t . dt$

Kết quả ra một số khác 2 $\Rightarrow$ Đáp số **A** sai

- Tương tự như vậy với đáp số **C** thì $I = 2 \int_0^1 e^t . t . dt = 2$

$\Rightarrow$ Đáp án **C** là đáp án chính xác

Chú ý : Đổi cận thì phải đổi biến $\Rightarrow$ Dễ dàng loại được đáp án **A** và **D**

VD8-[Trích đề thi ĐH khối D năm 2011]

Sử dụng phương pháp đổi biến đưa tích phân $I = \int_0^4 \frac{4x-1}{\sqrt{2x+1}+2} dx$ thành tích phân $\int_3^5 f(t) dt$. Khi đó $f(t)$ là hàm nào trong các hàm số sau ?

- A. $f(t) = \frac{2t^2-3}{t+2}$ B. $f(t) = \frac{(2t^2-8t+3)(t+2)}{t}$
 C. $f(t) = \frac{2t^2-3}{2(t+2)}$ D. $f(t) = \frac{(2t^2-8t+3)(t+2)}{2t}$

GIẢI

- Tính giá trị tích phân $I = \int_0^4 \frac{4x-1}{\sqrt{2x+1}+2} dx$



- Nếu đáp án A đúng thì $f(t) = \frac{2t^2-3}{t+2}$ và giá trị tích phân $I = \int_3^5 \frac{2t^2-3}{t+2} dt = 6.2250...$ điều này

là sai vì $I = \int_3^5 \frac{2t^2-3}{t+2} dt = 9.6923...$



Kết quả ra một số khác 2 $\Rightarrow$ Đáp số A sai

- Tương tự như vậy với đáp số B chính xác



$$\int_3^5 \frac{(2x^2-8x+3)(x+2)}{x} dx = 6.225077096$$

VD9-Nếu sử dụng phương pháp đổi biến tìm nguyên hàm, ta đặt $t = \sqrt[3]{1+\ln x}$ thì nguyên hàm của

$\int \frac{\ln x \cdot \sqrt[3]{1+\ln x}}{x} dx$ có dạng :

- A. $\int 3t^3(t^3-1)dt$ B. $\int t^3(t^3-1)dt$ C. $\int 3t^3(t^3+1)dt$ D. $\int t^3(t^3+1)dt$

GIẢI

- Để có thể sử dụng máy tính Casio ta phải tiến hành chọn cận để đưa nguyên hàm (tích phân bất định) trở thành tích phân (tích phân xác định) Ta chọn hai cận là 1 và e^7 . Tính giá trị tích phân

$$\int_1^{e^7} \frac{\ln x \cdot \sqrt[3]{1+\ln x}}{x} dx = 43.1785...$$



$$\int_1^{e^7} \frac{\ln(x) \times \sqrt[3]{1+\ln x}}{x} dx$$

43.17857143

- Khi tiến hành đổi biến thì ta phải đổi cận : $\begin{cases} x=1 \Rightarrow t = \sqrt[3]{1+\ln 1} = 1 \\ x=e^7 \Rightarrow t = \sqrt[3]{1+\ln 3^7} = 2 \end{cases}$ Nếu đáp án A đúng

thì giá trị tích phân ở câu A phải giống giá trị tích phân ở đề bài . Tính $I = \int_1^2 3t^3 (t^3 - 1) dt$



$$\int_0^2 e^x x dx$$

3.745802819

Kết quả ra một số khác 2 $\Rightarrow$ Đáp số A sai

- Tương tự như vậy với đáp số C thì $I = 2 \int_0^1 e^t . t . dt = 2$



$$\int_1^2 3x^3 (x^3 - 1) dx$$

43.17857142

$\Rightarrow$ Đáp án A là đáp án chính xác

Chú ý : Ta có thể chọn cận nào cũng được không nhất thiết phải là 1 và e^7 (chỉ cần thỏa mãn tập xác định của hàm số là được)

Ví dụ 3: Nếu $f(x) = (ax^2 + bx + c)\sqrt{2x-1}$ là một nguyên hàm của hàm số $g(x) = \frac{10x^2 - 7x + 2}{\sqrt{2x-1}}$ trên khoảng $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$ thì $a + b + c$ có giá trị là

A. 3

B. 0

C. 4

D. 2

Hướng dẫn by bikiptheluc.com

Trâu bò tự luận

$$\left((ax^2 + bx + c)\sqrt{2x-1}\right)' = \frac{5ax^2 + (-2a + 3b)x - b + c}{\sqrt{2x-1}} = \frac{10x^2 - 7x + 2}{\sqrt{2x-1}} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \Rightarrow a + b + c = 2 \\ c = 1 \end{cases}$$

Casio: Tư duy mình nghĩ như sau:

$$\int_a^b \frac{10x^2 - 7x + 2}{\sqrt{2x-1}} dx = F(b) - F(a)$$

Nếu Giờ ta sẽ chọn x sao cho $F(a) = 0 \rightarrow x = 0.5$ nhưng các em nhìn giá trị đạo hàm không xác định tại $x = 0.5$ nên ta sẽ lấy giá trị lân cận 0.5

Chú ý là $f(1) = (a + b + c) \rightarrow$ Chọn $b = 1$

$$\text{Thì } \int_{0.5+\Delta x}^1 \frac{10x^2 - 7x + 2}{\sqrt{2x-1}} dx \approx a + b + c$$

$$\int_{0.50000000001}^1 \frac{10x^2 - 7x + 2}{\sqrt{2x-1}} dx \approx 1.999995529$$

Chọn đáp án D.

Nếu mà đề hỏi $4a + 2b + c$ thì các em tính tích phân từ $0.5 + \Delta x \rightarrow 2$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1-[Tổng hợp tích phân chống Casio – Nguồn Internet 2017]

Cho tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x dx = a + b\pi$ ($a, b \in \mathbb{Q}$). Tính giá trị của biểu thức $P = a + b$

A. $P = \frac{5}{4}$

B. $P = \frac{3}{4}$

C. $P = \frac{1}{4}$

D. $P = \frac{11}{4}$

Bài 2-[Tổng hợp tích phân chống Casio – Nguồn Internet 2017]

Cho tích phân $\int_1^{2-\frac{1}{x}} \frac{1-x}{x^2} e^x dx = a.e^2 + b.e$ ($a, b \in \mathbb{Q}$). Tính giá trị của biểu thức $P = a + b$

A. $P = -1$

B. $P = 0.5$

C. $P = 1$

D. $P = 2$

Bài 3-[Tổng hợp tích phân chống Casio – Nguồn Internet 2017]

Cho tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 3x + 2 \cos x}{2 + 3 \sin x - \cos 2x} dx = a \ln 2 + b \ln 3 + c$ ($a, b, c \in \mathbb{Z}$). Tính $P = a + b + c$

A. $P = -3$

B. $P = -2$

C. $P = 2$

D. $P = 1$

Bài 4-[Tổng hợp tích phân chống Casio – Nguồn Internet 2017]

Cho tích phân $\int_1^4 \frac{dx}{2x^2 + 5x + 3} = a \ln 2 + b \ln 5 + c \ln 11$ ($a, b, c \in \mathbb{Z}$). Tính giá trị của biểu thức

$P = a + b + c$

A. $P = 1$

B. $P = -3$

C. 2

D. 0

Bài 5-[Tổng hợp tích phân chống Casio – Nguồn Internet 2017]

Cho tích phân $\int_1^2 \frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 + x} dx = a \ln 2 + b \ln 3 + c$ ($a, b, c \in \mathbb{Z}$). Tính giá trị của biểu thức

$$P = a + b + c$$

A. $P = 3$

B. $P = -2$

C. 4

D. -1

Bài 6-[Tổng hợp tích phân chống Casio – Nguồn Internet 2017]

Nếu sử dụng phương pháp đổi biến với ẩn phụ $t = \sqrt{x^2 - 1}$ đưa tích phân $I = \int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}}$ thành tích

phân nào sau đây ?

A. $\int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dt}{t^2 + 1}$

B. $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 \frac{dt}{t^2 + 1}$

C. $\int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dt}{t(t^2 + 1)}$

D. $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 \frac{dt}{t(t^2 + 1)}$

Bài 7-[Tổng hợp tích phân chống Casio – Nguồn Internet 2017]

Nếu sử dụng phương pháp đổi biến với ẩn phụ $t = 1 + 3\cos x$ đưa nguyên hàm

$I = \int \frac{\sin 2x + \sin x}{\sqrt{1 + 3\cos x}} dx$ thành nguyên hàm nào sau đây ?

A. $\int \frac{-2t^2 - 1}{\sqrt{t}} dt$

B. $\frac{1}{9} \int \frac{-2t^2 - 1}{\sqrt{t}} dt$

C. $\int \frac{-2t - 1}{\sqrt{t}} dt$

D. $\frac{1}{9} \int \frac{-2t - 1}{\sqrt{t}} dt$

Bài 8-[Tổng hợp tích phân chống Casio – Nguồn Internet 2017]

Nếu sử dụng phương pháp đổi biến với ẩn phụ $t = 1 + 3\cos x$ đưa nguyên hàm

$I = \int \frac{\sin 2x + \sin x}{\sqrt{1 + 3\cos x}} dx$ thành nguyên hàm nào sau đây ?

A. $\int \frac{-2t^2 - 1}{\sqrt{t}} dt$

B. $\frac{1}{9} \int \frac{-2t^2 - 1}{\sqrt{t}} dt$

C. $\int \frac{-2t - 1}{\sqrt{t}} dt$

D. $\frac{1}{9} \int \frac{-2t - 1}{\sqrt{t}} dt$

LỜI GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1-[Tổng hợp tích phân chống Casio – Nguồn Internet 2017]

Cho tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x dx = a + b\pi$ ($a, b \in \mathbb{Q}$). Tính giá trị của biểu thức $P = a + b$

A. $P = \frac{5}{4}$

B. $P = \frac{3}{4}$

C. $P = \frac{1}{4}$

D. $P = \frac{11}{4}$

GIẢI

- Tính giá trị tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x dx$ rồi lưu vào biến A

SHIFT MODE 4 $\int$ tan ALPHA)) x^2 ∇ 0 $\blacktriangle$ $\frac{\square}{\square}$ SHIFT $\times 10^x$ ∇ 4 = SHIFT RCL (←)

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(X)^2 dx$ Ans→A

0.2146018366

0.2146018366

- Nếu đáp số A đúng ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} a + b\pi = A \\ a + b = \frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow a = 1.7334... \text{ không phải là số hữu tỉ} \Rightarrow$$

Đáp số A sai

MODE 5 1 1 = SHIFT $\times 10^x$ = ALPHA (←) = 1 = 1 = 5 $\div$ 4 = =

X=

1.733471103

- Tương tự như vậy với đáp án **B** ta có hệ phương trình $\begin{cases} a+b\pi = A \\ a+b = \frac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{B}$ là đáp số chính xác

xác

$\frac{1}{x} = \frac{1}{1.733471103}$

X=

Y=

1

$-\frac{1}{4}$

Bài 2-[Tổng hợp tích phân chống Casio – Nguồn Internet 2017]

Cho tích phân $(a, b \in \mathbb{Q}) \int_1^2 \frac{1-x}{x^2} e^x dx = a.e^2 + b.e \ (a, b \in \mathbb{Q})$. Tính giá trị của biểu thức $P = a + b$

A. $P = -1$

B. $P = 0.5$

C. $P = 1$

D. $P = 2$

GIẢI

- Tính giá trị tích phân $\int_1^2 \frac{1-x}{x^2} e^x dx$ rồi lưu vào biến A

$\int_1^2 \frac{1-x}{x^2} e^x dx$

Ans→A

$\int_1^2 \frac{1-x}{x^2} e^x dx$

-0.976246221

-0.976246221

- Với đáp số A ta có hệ phương trình $\begin{cases} ae^2 + be = A \\ a + b = 0.5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -0.5 \\ b = 1 \end{cases}$

$\text{MODE } 5 \ 1 \ \text{ALPHA } \times 10^x \ x^2 = \text{ALPHA } \times 10^{-1} = \text{ALPHA } (-) = 1 = 1 = 0.5 =$

=

X=

Y=

$-\frac{1}{2}$

1

$\Rightarrow$ Đáp số **A** chính xác

Bài 3-[Tổng hợp tích phân chống Casio – Nguồn Internet 2017]

Cho tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 3x + 2 \cos x}{2 + 3 \sin x - \cos 2x} dx = a \ln 2 + b \ln 3 + c \ (a, b, c \in \mathbb{Z})$. Tính $P = a + b + c$

A. $P = -3$

B. $P = -2$

C. $P = 2$

D. $P = 1$

GIẢI

- Tính giá trị tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 3x + 2 \cos x}{2 + 3 \sin x - \cos 2x} dx$ rồi lưu vào biến A

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 3x + 2 \cos x}{2 + 3 \sin x - \cos 2x} dx$

Math ▲

$$\int_0^2 \frac{\cos(3x) + 2\cos x}{2 + 3\sin(x) - \cos x} dx$$

Ans→A

0.8903717579 0.8903717579

- Vậy $a \ln 2 + b \ln 3 + c = A \Leftrightarrow \ln(2^a \cdot 3^b \cdot e^c) = \ln(e^A) \Leftrightarrow 2^a \cdot 3^b = \frac{e^A}{e^c}$. Tìm $2^a \cdot 3^b$ bằng chức năng lập

bảng giá trị MODE 7 với biến $X = c$

MODE 7 $\frac{1}{x}$ ALPHA $\times 10^x$ x^2 ALPHA $(-)$ ∇ ALPHA $\times 10^x$ x^2 ALPHA $)$ $\equiv \equiv - 9 \equiv 1 0 \equiv 1 \equiv$

Math

7 8 9 $\times$ -3 -2 -1 F(X) 48.929 18 6.6218

Ta được $2^a \cdot 3^b = 18$ với $X = c = -2$. Vậy $18 = 2 \cdot 3^2 = 2^a \cdot 3^b \Rightarrow a = 1; b = 2$

$\Rightarrow P = a + b + c = 1 + 2 - 2 = 1 \Rightarrow$ Đáp số chính xác là D

Bài 4-[Tổng hợp tích phân chống Casio – Nguồn Internet 2017]

Cho tích phân $\int_1^4 \frac{dx}{2x^2 + 5x + 3} = a \ln 2 + b \ln 5 + c \ln 11$ ($a, b, c \in \mathbb{Z}$). Tính giá trị của biểu thức

$$P = a + b + c$$

A. $P = 1$

B. $P = -3$

C. 2

D. 0

GIẢI

- Tính giá trị tích phân $\int_1^4 \frac{dx}{2x^2 + 5x + 3} =$ rồi lưu vào biến A

$\frac{1}{x^2}$ $\frac{1}{x}$ 1 ∇ 2 ALPHA $)$ x^2 $+$ 5 ALPHA $)$ $+$ 3 ∇ 1 $\blacktriangle$ 4 $\equiv$ SHIFT RCL $(-)$

Math ▲

$\int_1^4 \frac{1}{2x^2 + 5x + 3} dx$ Ans→A

0.1278333715 0.1278333715

- Vậy $a \ln 2 + b \ln 5 + c \ln 11 = A \Leftrightarrow \ln(2^a \cdot 5^b \cdot 11^c) = \ln(e^A) \Leftrightarrow 2^a \cdot 5^b \cdot 11^c = e^A = \frac{25}{22} = \frac{5 \cdot 5}{2 \cdot 11} = 5^2 \cdot 2^{-1} \cdot 11^{-1}$.

Rõ ràng $a = -1; b = 2; c = -1 \Rightarrow P = a + b + c = 1 + 2 - 2 = 1$

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là D

Bài 5-[Tổng hợp tích phân chống Casio – Nguồn Internet 2017]

Cho tích phân $\int_1^2 \frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 + x} dx = a \ln 2 + b \ln 3 + c$ ($a, b, c \in \mathbb{Z}$). Tính giá trị của biểu thức

$$P = a + b + c$$

A. $P = 3$

B. $P = -2$

C. 4

D. -1

GIẢI

- Tính giá trị tích phân $\int_1^2 \frac{dx}{2x^2 + 5x + 3} =$ rồi lưu vào biến A

$\frac{1}{x^2}$ $\frac{1}{x}$ ALPHA $)$ x^2 $+$ 2 ALPHA $)$ $+$ 2 ∇ ALPHA $)$ x^2 $+$ ALPHA $)$ ∇ 1 $\blacktriangle$ 2 $\equiv$ SHIFT RCL $(-)$

Math ▲

$\int_1^2 \frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 + x} dx$ Ans→A

1.980829253 1.980829253

- Vậy $a \ln 2 + b \ln 3 + c = A \Leftrightarrow \ln(2^a \cdot 3^b \cdot e^c) = \ln(e^A) \Leftrightarrow 2^a \cdot 3^b \cdot e^c = e^A \Leftrightarrow 2^a \cdot 3^b = \frac{e^A}{e^c}$. Tìm $2^a \cdot 3^b$ bằng chức năng lập bảng giá trị MODE 7 với biến $X = c$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2x) + \sin(x)}{\sqrt{1+3\cos(x)}} dx = 1.259259259$$

- Tiến hành đổi biến thì phải đổi cận $\begin{cases} x=0 \Rightarrow t=1+\cos 3x=4 \\ x=\frac{\pi}{2} \Rightarrow t=1 \end{cases}$

- Với đáp số **D** ta có $-\frac{1}{9} \int_4^1 \frac{2t+1}{\sqrt{t}} dt$

Calculator keypad sequence: $\frac{1}{9}$, $\int$, $\frac{1}{4}$, $\frac{-2x-1}{\sqrt{x}}$, dx , $=$, 1.259259259

$$\frac{1}{9} \int_{\frac{1}{4}}^1 \frac{-2x-1}{\sqrt{x}} dx = 1.259259259$$

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **D**

Chú ý : Chọn cận thế nào cũng được tuy nhiên nên chọn cận x sao cho t đẹp.

PHƯƠNG PHÁP CASIO – VINACAL

BÀI 24. TÍNH NHANH VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI GIỮA ĐƯỜNG – MẶT.

I) KIẾN THỨC NỀN TẢNG

1. Vị trí tương đối của 2 đường thẳng

- Cho hai đường thẳng d và d' có hai vectơ chỉ phương $\vec{u}_d$ và $\vec{u}_{d'}$ và có hai điểm M, M' thuộc hai đường thẳng trên.
- $d \parallel d'$ nếu $\vec{u}_d = k \cdot \vec{u}_{d'}$ và có không có điểm chung
- $d \equiv d'$ nếu $\vec{u}_d = k \cdot \vec{u}_{d'}$ và có một điểm chung
- d cắt d' nếu $\vec{u}_d$ không song song $\vec{u}_{d'}$ và $\overrightarrow{MM'}[\vec{u}_d, \vec{u}_{d'}] = 0$
- d chéo d' nếu $\vec{u}_d$ không song song $\vec{u}_{d'}$ và $\overrightarrow{MM'}[\vec{u}_d, \vec{u}_{d'}] \neq 0$

2. Vị trí tương đối của đường thẳng và mặt phẳng

- Cho đường thẳng d và mặt phẳng (P) có vectơ chỉ phương $\vec{u}_d$ và vectơ pháp tuyến $\vec{n}_p$
- $d \parallel (P)$ nếu $\vec{u}_d \perp \vec{n}_p$ và không có điểm chung
- $d \equiv (P)$ nếu $\vec{u}_d \perp \vec{n}_p$ và có điểm chung
- $d \perp (P)$ nếu $\vec{u}_d = k \cdot \vec{n}_p$

3. Lệnh Caso

- Lệnh đăng nhập môi trường vecto MODE 8
- Nhập thông số vecto MODE 8 1 1
- Tính tích vô hướng của 2 vecto : vectoA SHIFT 5 7 vectoB
- Tính tích có hướng của hai vecto : vectoA x vectoB
- Lệnh giá trị tuyệt đối SHIFT HYP
- Lệnh tính độ lớn một vecto SHIFT HYP
- Lệnh dò nghiệm của bất phương trình MODE 7
- Lệnh dò nghiệm của phương trình SHIFT SOLVE

II) VÍ DỤ MINH HỌA

VD1-[Thi thử chuyên Khoa học tự nhiên lần 3 năm 2017]

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz đường thẳng $d_1: \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{-3}$ và đường thẳng

$d_2: \frac{x+3}{2} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+2}{-1}$. Vị trí tương đối của d_1, d_2 là :

A.Cắt nhau B.Song song C.Chéo nhau D. Vuông góc

GIẢI

- Ta thấy $\vec{u}_{d_1}(2;1;-3)$ không tỉ lệ $\vec{u}_{d_2}(2;2;-1) \Rightarrow (d_1), (d_2)$ không song song hoặc trùng nhau
- Lấy $M_1(-1;1;-1)$ thuộc d_1 , lấy $M_2(-3;-2;-2)$ thuộc d_2 ta được $\overrightarrow{M_1M_2}(-2;-3;-1)$

Xét tích hỗn tạp $\overrightarrow{M_1M_2}[\vec{u}_{d_1}; \vec{u}_{d_2}]$ bằng máy tính Casio theo các bước :

Nhập thông số các vecto $\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{u}_{d_1}, \vec{u}_{d_2}$ vào các vecto A, vecto B, vecto C

MODE 8 1 1 = 2 = = 3 = = 1 = MODE 8 2 1 2 = 1 =
= 3 = MODE 8 3 1 2 = 2 = = 1 =

$$\vec{A} = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}, \vec{B} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \vec{C} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Tính $\overrightarrow{M_1M_2}[\vec{u}_{d_1}; \vec{u}_{d_2}]$

ON SHIFT 5 3 SHIFT 5 7 (SHIFT 5 4 X SHIFT 5 5) =

VctA . (VctB x VctC)

0

Ta thấy $\overrightarrow{M_1M_2}[\vec{u}_{d_1}; \vec{u}_{d_2}] = 0 \Rightarrow$ hai đường thẳng $(d_1), (d_2)$ đồng phẳng nên chúng cắt nhau
 $\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **A**

VD2-[Thi thử báo Toán học tuổi trẻ lần 4 năm 2017]

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, vị trí tương đối của hai đường thẳng

$$d: \begin{cases} x = 1 + 2r \\ y = -2 - 3t \\ z = 5 + 4t \end{cases} \text{ và } d': \begin{cases} x = 7 + 3m \\ y = -2 + 2m \\ z = 1 - 2m \end{cases}$$

A. Chéo nhau

B. Cắt nhau

C. Song song

D. Trùng nhau

GIẢI

- Ta có hai vecto chỉ phương $\vec{u}_d(2; -3; 4)$ và $\vec{u}_{d'}(3; 2; -2)$ không tỉ lệ với nhau $\Rightarrow$ Không song song hoặc trùng nhau $\Rightarrow$ Đáp án **C** và **D** là sai
- Chọn hai điểm $M(1; -2; 5)$ thuộc d và $M'(7; -2; 1)$ thuộc d' .

Xét tích hỗn tạp $\overrightarrow{M_1M_2}[\vec{u}_{d_1}; \vec{u}_{d_2}]$ bằng máy tính Casio theo các bước:

Nhập thông số các vecto $\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{u}_{d_1}, \vec{u}_{d_2}$ vào các vecto A, vecto B, vecto C

MODE 8 1 1 7 - 1 = - 2 - (- 2) = 1 - 5 = MODE

8 2 1 2 = - 3 = 4 = MODE 8 3 1 3 = 2 = - 2 =

VCT

$$\vec{A} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}, \vec{B} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}, \vec{C} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

- Tính $\overrightarrow{M_1M_2}[\vec{u}_{d_1}; \vec{u}_{d_2}]$

ON SHIFT 5 3 SHIFT 5 7 (SHIFT 5 4 X SHIFT 5 5) =

VctA . (VctB x VctC)

-64

Ta thấy $\overrightarrow{M_1M_2}[\vec{u}_{d_1}; \vec{u}_{d_2}] = -64 \neq 0 \Rightarrow$ hai đường thẳng $(d), (d')$ không đồng phẳng nên chúng chéo nhau
 $\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **A**

VD3-[Đề minh họa bộ GD-ĐT lần 2 năm 2017]

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho đường thẳng $(d): \frac{x+1}{1} = \frac{y}{-3} = \frac{z-5}{-1}$ và mặt phẳng

$(P): 3x - 3y + 2z + 6 = 0$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. d cắt và không vuông góc với (P)

B. $d \perp (P)$

C. d song song với (P)

D. d nằm trong (P)

GIẢI

- Ta có $u_d(1; -3; -1)$ và $n_p(3; -3; 2)$. Nhập hai vecto này vào máy tính Casio

MODE **8** **1** **1** **1** **=** **-** **3** **=** **-** **1** **=** **MODE** **8** **2** **1** **3** **=** **-** **3** **=**
2 **=**

$\vec{u}_d$ [1 -3 -1] $\vec{n}_p$ [3 -3 2]

$\vec{u}_d \cdot \vec{n}_p = 10 \Rightarrow \vec{u}_d$ không vuông góc với $\vec{n}_p \Rightarrow d, (P)$ không thể song song hoặc

- trùng nhau $\Rightarrow$ Đáp số đúng chỉ có thể là A hoặc B

ON **SHIFT** **5** **3** **SHIFT** **5** **7** **SHIFT** **5** **4** **=**

$\vec{u}_d \cdot \vec{n}_p$

10

- Lại thấy $\vec{u}_d, \vec{n}_p$ không song song với nhau $\Rightarrow d$ không thể vuông góc với $(P) \Rightarrow$ Đáp số B sai
Vậy đáp án chính xác là A

VD4-[Câu 63 Sách bài tập hình học nâng cao trang 132]

Xét vị trí tương đối của đường thẳng $d: \frac{x-9}{8} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+3}{3}$ và đường thẳng

$(\alpha): x + 2y - 4z + 1 = 0$

A. d cắt và không vuông góc với (P)

B. $d \perp (P)$

C. d song song với (P)

D. d nằm trong (P)

GIẢI

- Ta có $u_d(8; 2; 3)$ và $n_\alpha(1; 2; -4)$. Nhập hai vecto này vào máy tính Casio

MODE **8** **1** **1** **8** **=** **2** **=** **3** **=** **MODE** **8** **2** **1** **1** **=** **2** **=** **-** **4** **=**

$\vec{u}_d$ [8 2 3] $\vec{n}_\alpha$ [1 2 -4]

$\vec{u}_d \cdot \vec{n}_\alpha = 0 \Rightarrow \vec{u}_d$ vuông góc với $\vec{n}_\alpha \Rightarrow d, (P)$ chỉ có thể song song hoặc trùng

- nhau $\Rightarrow$ Đáp số đúng chỉ có thể là C hoặc D

ON **SHIFT** **5** **3** **SHIFT** **5** **7** **SHIFT** **5** **4** **=**

$\vec{u}_d \cdot \vec{n}_\alpha$

0

- Lấy một điểm M bất kì thuộc d ví dụ như $M(9; 1; 3)$ ta thấy M cũng thuộc $(\alpha) \Rightarrow d$ và (α) có điểm chung $\Rightarrow d$ thuộc (α)

Vậy đáp án chính xác là D

VD5-[Thi Học sinh giỏi tỉnh Phú Thọ năm 2017]

Tìm m để mặt phẳng $(P): 2x - my + 3z - 6 + m = 0$ song song với mặt phẳng

$$(Q): (m+3)x - 2y + (5m+1)z - 10 = 0$$

- A. $m=1$ B. $m \neq 1$ C. $m = -\frac{9}{10}$ D. Không tồn tại m

GIẢI

- Ta có hai vectơ pháp tuyến $\vec{n}_P(2; -m, 3)$ và $\vec{n}_Q(m+3; -2; 5m+1)$

$$\text{Để } (P) \parallel (Q) \Leftrightarrow \vec{n}_P = k \cdot \vec{n}_Q \Leftrightarrow \frac{2}{m+3} = \frac{-m}{-2} = \frac{3}{5m+1} = k \quad (1)$$

- Với $m=1$ ta có $k=2$ thỏa (1)

$$\text{Thử lại ta thấy hai mặt phẳng có dạng } \begin{cases} (P): 2x - y + 3z - 5 = 0 \\ (Q): 2x - 2y + 6z - 10 = 0 \end{cases}$$

Nhận thấy $(P) \equiv (Q) \Rightarrow$ Đáp án **A** sai

- Với $m = -\frac{9}{10}$ ta có $k = \frac{20}{21}$ không thỏa mãn (1) $\Rightarrow m = -\frac{9}{10}$ không nhận $\Rightarrow$ **C** và **B** đều sai
 $\Rightarrow$ Đáp án **D** là chính xác

VD6-[Thi thử báo Toán học tuổi trẻ lần 3 năm 2017]

Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 \\ z = -2 - 3t \end{cases}$ và mặt phẳng

$$(P): 2x + y + z - 2 = 0. \text{ Giao điểm } M \text{ của } d \text{ và } P \text{ có tọa độ:}$$

- A. $M(3; 1; -5)$ B. $M(2; 1; -7)$ C. $M(4; 3; 5)$ D. $M(1; 0; 0)$

GIẢI

- Điểm M thuộc d nên có tọa độ $M(1+2t; 1; -2-3t)$. Điểm M cũng thuộc mặt phẳng (P) nên tọa độ điểm M phải thỏa mãn phương trình mặt phẳng (P)

$$\Leftrightarrow 2(1+2t) + 1 + (-2-3t) - 2 = 0$$

- Công việc trên là ta sẽ nhẩm ở trong đầu, để giải bài toán ta dùng máy tính Casio luôn:

2 (1 + 2 ALPHA) + 1 + (- 2 - 3) - 2 = 0
SHIFT CALC 1 =
Math
2(1+2X)+1+(-2-3)
X= 1
L-R= 0

Ta tìm được luôn $t=1$ vậy $x=1+2t=3$

$\Rightarrow$ Đáp án chính xác là **A**

VD7-[Đề minh họa bộ GD-ĐT lần 1 năm 2017]

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1; 0; 2)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{2}$.

Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A vuông góc và cắt d

- A. $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{1}$ B. $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{-1}$
C. $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{1}$ D. $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{-3} = \frac{z-2}{1}$

GIẢI

- Đường thẳng Δ cắt d tại điểm B . Vì B thuộc d nên có tọa độ $B(1+t; t; -1+2t)$

A. $d \parallel (\alpha)$ B. d cắt nhưng không vuông góc với (α)

C. $d \perp (\alpha)$ D. d nằm trên (α)

Bài 2-[Thi thử THPT Nguyễn Đình Chiểu – Bình Định lần 1 năm 2017]

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho $d: \begin{cases} x=1+t \\ y=2-t \\ z=-2-2t \end{cases}$ và $d': \begin{cases} x=2+t' \\ y=1-t' \\ z=1 \end{cases}$. Vị trí tương đối của

hai đường thẳng là :

A. Chéo nhau

B. Cắt nhau

C. Song song

D. Trùng nhau

Bài 3-[Đề minh họa Bộ GD-ĐT lần 1 năm 2017]

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho đường thẳng Δ có phương trình : $\frac{x-10}{5} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+2}{1}$

Xét mặt phẳng $(P): 10x + 2y + mz + 11 = 0$ với m là tham số thực . Tìm tất cả các giá trị của m để mặt phẳng (P) vuông góc với đường thẳng Δ

A. $m = -2$

B. $m = 2$

C. $m = -52$

D. $m = 52$

Bài 4-[Thi thử THPT Phan Chu Trinh – Phú Yên lần 1 năm 2017]

Cho mặt phẳng $(P): x - 3y + z = 0$ và đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x=1+2t \\ y=2-t \\ z=-1+t \end{cases}$. (P) và Δ cắt nhau tại điểm có

tọa độ

A. $(1; 2; -1)$

B. $(0; -1; 3)$

C. $(-1; 3; -2)$

D. $(3; 1; 0)$

Bài 5-[Thi thử THPT Nguyễn Đình Chiểu – Bình Định lần 1 năm 2017]

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $A(1; 0; 0)$, $B(0; 2; 0)$, $C(0; 0; 3)$ và đường

thẳng $d: \begin{cases} x=-t \\ y=2+t \\ z=3+t \end{cases}$. Cao độ giao điểm của d và mặt phẳng (ABC) là :

A. 3

B. 6

C. 9

D. -6

Bài 6-[Thi thử THPT Vĩnh Chân – Phú Thọ lần 1 năm 2017]

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai mặt phẳng $(P): nx + 7y - 6z + 4 = 0$,

$(Q): 3x + my - 2z - 7 = 0$ song song với nhau. Khi đó giá trị m, n thỏa mãn là :

A. $m = \frac{7}{3}, n = 1$

B. $m = 9, n = \frac{7}{3}$

C. $m = \frac{3}{7}, n = 9$

D. $m = \frac{7}{3}, n = 9$

LỜI GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1-[Thi thử báo Toán học tuổi trẻ lần 3 năm 2017]

Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho đường thẳng $d: x-1 = \frac{y-2}{2} = \frac{z-4}{3}$ và mặt phẳng

$(\alpha): 2x + 4y + 6z + 2017 = 0$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?

A. $d \parallel (\alpha)$ B. d cắt nhưng không vuông góc với (α)

C. $d \perp (\alpha)$ D. d nằm trên (α)

GIẢI

- Nhập vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_d}(1; 2; 3)$ và vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_\alpha}(2; 4; 6)$ vào máy tính Casio

MODE **8** **1** **1** **1** **=** **2** **=** **3** **=** **MODE** **8** **2** **1** **2** **=** **4** **=** **6** **=**

TÓM TẮT KỸ THUẬT SỬ DỤNG CASIO - VINACAL HỖ TRỢ GIẢI ĐỀ THI MÔN TOÁN 2017.

$$\vec{A} \left[\begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \right] \quad \vec{B} \left[\begin{array}{c} 2 \\ 4 \end{array} \right]$$

- Tính tích vô hướng $\vec{u}_d \cdot \vec{n}_\alpha = 28 \neq 0 \Rightarrow \vec{u}_d$ không vuông góc $\vec{n}_\alpha \Rightarrow d$ và (α) không thể song song và không thể trùng nhau

$$\text{ON} \text{ [SHIFT] [5] [3] [SHIFT] [5] [7] [SHIFT] [5] [4] [=]}$$

$$\text{VctA} \cdot \text{VctB}$$

$$28$$

- Lại thấy tỉ lệ $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} \Rightarrow \vec{u}_d \parallel \vec{n}_\alpha \Rightarrow d \perp (\alpha)$

Vậy đáp số chính xác là **C**

Bài 2-[Thi thử THPT Nguyễn Đình Chiểu – Bình Định lần 1 năm 2017]

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho $d: \begin{cases} x=1+t \\ y=2-t \\ z=-2-2t \end{cases}$ và $d': \begin{cases} x=2+t' \\ y=1-t' \\ z=1 \end{cases}$. Vị trí tương đối của

hai đường thẳng là :

A.Chéo nhau B.Cắt nhau C.Song song D.Trùng nhau

GIẢI

- Vì Xét hai vecto chỉ phương $\vec{u}_d(1;-1;-2)$ và $\vec{u}_{d'}(1;-1;0)$ không tỉ lệ với nhau $\Rightarrow$ Hai đường thẳng d và d' không thể song song hoặc trùng nhau $\Rightarrow$ Đáp án **C** và **D** loại
- Lấy hai điểm thuộc hai đường thẳng là $M(1;2;-2)$ và $M'(2;1;1)$. Nhập ba vecto vào casio

$$\text{MODE} \text{ [8] [1] [1] [2] [-] [1] [=] [1] [-] [2] [=] [1] [-] [(] [-] [2] [)] [=] \text{MODE} \text{ [8] [5] [2] [1] [1] [=] [-] [1] [=] [-] [2] [=] \text{MODE} \text{ [8] [3] [1] [1] [=] [-] [1] [=] [0] [=]}$$

$$\vec{A} \left[\begin{array}{c} 1 \\ -1 \end{array} \right] \quad \vec{B} \left[\begin{array}{c} 1 \\ -1 \end{array} \right] \quad \vec{C} \left[\begin{array}{c} 1 \\ -1 \end{array} \right]$$

$$3$$

$$-2$$

$$0$$

- Xét tích hỗn tạp $\overrightarrow{MM'}[\vec{u}_d; \vec{u}_{d'}] = 0$

$$\text{ON} \text{ [SHIFT] [5] [3] [SHIFT] [\cdot] [DEL] [SHIFT] [5] [7] [(] [SHIFT] [5] [4] [\times] [SHIFT] [5] [5] [)] [=]}$$

$$\text{VctA} \cdot (\text{VctB} \times \text{VctC})$$

$$0$$

$\Rightarrow d, d'$ đồng phẳng (nằm trên cùng một mặt phẳng) $\Rightarrow d$ cắt d'

$\Rightarrow$ Đáp án chính xác là **B**

Bài 3-[Đề minh họa Bộ GD-ĐT lần 1 năm 2017]

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho đường thẳng Δ có phương trình : $\frac{x-10}{5} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+2}{1}$

Xét mặt phẳng $(P): 10x + 2y + mz + 11 = 0$ với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của m để mặt phẳng (P) vuông góc với đường thẳng Δ

A. $m = -2$ B. $m = 2$ C. $m = -52$ D. $m = 52$

GIẢI

- Ta có vecto chỉ phương $\vec{u}_\Delta(5;1;1)$ và vecto pháp tuyến $\vec{n}_P(10;2;m)$
- Để mặt phẳng $(P) \perp \Delta$ thì $\vec{n}_P$ tỉ lệ với $\vec{u}_\Delta$ (song song hoặc trùng nhau)

TÓM TẮT KỸ THUẬT SỬ DỤNG CASIO - VINACAL HỖ TRỢ GIẢI ĐỀ THI MÔN TOÁN 2017.

$$\Rightarrow \frac{10}{5} = \frac{2}{1} = \frac{m}{1} \Rightarrow m = 2$$

Vậy đáp số chính xác là **B**

Bài 4-[Thi thử THPT Phan Chu Trinh – Phú Yên lần 1 năm 2017]

Cho mặt phẳng $(P): x - 3y + z = 0$ và đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = -1 + t \end{cases}$. (P) và Δ cắt nhau tại điểm có

tọa độ

- A. $(1; 2; -1)$ B. $(0; -1; 3)$ C. $(-1; 3; -2)$ D. $(3; 1; 0)$

GIẢI

- Gọi giao điểm là M , vì M thuộc Δ nên $M(1+2t; 2-t; -1+t)$
- Tọa độ M thỏa mãn phương trình mặt phẳng (P) nên ta có thể sử dụng máy tính Casio tìm luôn ra t

MODE 1 1 (1 + 2 ALPHA)) - 3 (2 -)) + (- 1 +

ALPHA)) SHIFT CALC 1 =

1(1+2X)-3(2-X)+

X= 1

L-R= 0

$$\Rightarrow t = 1 \Rightarrow M(3; 1; 0)$$

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **D**

Bài 5-[Thi thử THPT Nguyễn Đình Chiểu – Bình Định lần 1 năm 2017]

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $A(1; 0; 0)$, $B(0; 2; 0)$, $C(0; 0; 3)$ và đường

thẳng $d: \begin{cases} x = -t \\ y = 2 + t \\ z = 3 + t \end{cases}$. Cao độ giao điểm của d và mặt phẳng (ABC) là :

- A. 3 B. 6 C. 9 D. -6

GIẢI

- Mặt phẳng (ABC) đi qua 3 điểm thuộc 3 trục tọa độ vậy sẽ có phương trình là :

$$\frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1 \Leftrightarrow 6x + 3y + 2z - 6 = 0.$$

- Gọi giao điểm là $M(-t; 2+t; 3+t)$. Sử dụng máy tính Casio tìm t

6 X (- ALPHA)) + 3 X (2 + ALPHA)) + 2 (3 + ALPHA)

) - 6 SHIFT CALC 1 =

6X(-X)+3X(2+X)+2

X= 6

L-R= 0

$$\text{Vậy } z = 3 + t = 9$$

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **C**

Bài 6-[Thi thử THPT Vĩnh Chân – Phú Thọ lần 1 năm 2017]

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai mặt phẳng $(P): nx + 7y - 6z + 4 = 0$,

$(Q): 3x + my - 2z - 7 = 0$ song song với nhau. Khi đó giá trị m, n thỏa mãn là :

- A. $m = \frac{7}{3}, n = 1$ B. $m = 9, n = \frac{7}{3}$ C. $m = \frac{3}{7}, n = 9$ D. $m = \frac{7}{3}, n = 9$

GIẢI

TÓM TẮT KỸ THUẬT SỬ DỤNG CASIO – VINACAL HỖ TRỢ GIẢI ĐỀ THI MÔN TOÁN 2017.

- Để 2 mặt phẳng song song với nhau thì 2 vectơ chỉ phương của chúng song song hoặc trùng nhau

$$\Leftrightarrow \vec{n}_P(n; 7; -6) \text{ tỉ lệ với } \vec{n}_Q(3; m; -2) \Leftrightarrow \frac{n}{3} = \frac{7}{m} = \frac{-6}{-2} = k$$

- Ta thu được tỉ lệ $k = 3$ từ đó suy ra $n = 9; m = \frac{7}{3}$

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **D**

PHƯƠNG PHÁP CASIO – VINACAL

BÀI 25. TÍNH NHANH KHOẢNG CÁCH TRONG KHÔNG GIAN.

I) KIẾN THỨC NỀN TẢNG

1. Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

- Cho điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ và mặt phẳng $(P): Ax + By + Cz + D = 0$ thì khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (P) được tính theo công thức $d(M; (P)) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

2. Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng

- Cho điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ và đường thẳng $d: \frac{x-x_N}{a} = \frac{y-y_N}{b} = \frac{z-z_N}{c}$ thì khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng d được tính theo công thức $d(M; d) = \frac{2 \left| [\overrightarrow{MN}; \vec{u}] \right|}{\left| \vec{u} \right|}$

Trong đó $\vec{u}(a; b; c)$ là vectơ chỉ phương của d và $N(x_N; y_N; z_N)$ là một điểm thuộc d

3. Khoảng cách giữa 2 đường thẳng chéo nhau

- Cho hai đường thẳng chéo nhau $d: \frac{x-x_M}{a} = \frac{y-y_M}{b} = \frac{z-z_M}{c}$ và $d': \frac{x-x_{M'}}{a'} = \frac{y-y_{M'}}{b'} = \frac{z-z_{M'}}{c'}$ thì khoảng cách giữa 2 đường chéo nhau này được tính theo công thức $d(d; d') = \frac{\left| \overrightarrow{MM'} \cdot [\vec{u}_d; \vec{u}_{d'}] \right|}{\left| [\vec{u}_d; \vec{u}_{d'}] \right|}$

Trong đó $\vec{u}(a; b; c)$ là vectơ chỉ phương của d và $M(x_M; y_M; z_M)$ là một điểm thuộc d
 $\vec{u}(a'; b'; c')$ là vectơ chỉ phương của d' và $M'(x_{M'}; y_{M'}; z_{M'})$ là một điểm thuộc d'

4. Lệnh Caso

- Lệnh đăng nhập môi trường vectơ MODE 8
- Nhập thông số vectơ MODE 8 1 1
- Tính tích vô hướng của 2 vectơ : vectoA SHIFT 5 7 vectoB
- Tính tích có hướng của hai vectơ : vectoA x vectoB
- Lệnh giá trị tuyệt đối SHIFT HYP
- Lệnh tính độ lớn một vectơ SHIFT HYP
- Lệnh dò nghiệm của bất phương trình MODE 7
- Lệnh dò nghiệm của phương trình SHIFT SOLVE

II) VÍ DỤ MINH HỌA

VD1-[Đề minh họa Bộ GD-ĐT lần 1 năm 2017]

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho mặt phẳng $(P): 3x + 4y + 2z + 4 = 0$ và điểm $A(1; -2; 3)$.
 Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (P)

A. $d = \frac{5}{9}$ B. $d = \frac{5}{29}$ C. $d = \frac{5}{\sqrt{29}}$ D. $d = \frac{\sqrt{5}}{3}$

GIẢI

- Ta nhớ công thức tính khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (P) :

$$d(M; (P)) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

- Áp dụng cho điểm $A(1; -2; 3)$ và $(P): 3x + 4y + 2z + 4 = 0$ ta sử dụng máy tính để bấm luôn :

$$d(M; (P)) = \frac{5\sqrt{29}}{\sqrt{29}} = \frac{5}{\sqrt{29}}$$

$\boxed{\frac{5}{\sqrt{29}}}$
 $\boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\text{hyp}} \boxed{3} \boxed{\times} \boxed{1} \boxed{+} \boxed{4} \boxed{\times} \boxed{(} \boxed{-} \boxed{2} \boxed{)} \boxed{+} \boxed{2} \boxed{\times} \boxed{3} \boxed{+} \boxed{4} \boxed{\text{D}} \boxed{\sqrt{\square}}$
 $\boxed{3} \boxed{x^2} \boxed{+} \boxed{4} \boxed{x^2} \boxed{+} \boxed{2} \boxed{x^2} \boxed{=}$
 $\sqrt{3^2 + 4^2 + 2^2}$
 $\frac{5\sqrt{29}}{29}$

⇒ Đáp số chính xác là **C**

VD2-[Thi Học sinh giỏi tỉnh Phú Thọ năm 2017]

Tìm m để khoảng cách từ $A(1; 2; 3)$ đến mặt phẳng $(P): x + 3y + 4z + m = 0$ bằng $\sqrt{26}$

A. $m = 7$ B. $m = 18$ C. $m = 20$ D. $m = -45$

GIẢI

- Thiết lập phương trình khoảng cách : $d(A; (P)) = \frac{|1.1 + 3.2 + 4.4 + m|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2}} = \sqrt{26}$

$$\Leftrightarrow \frac{|1.1 + 3.2 + 4.4 + m|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2}} - \sqrt{26} = 0$$

(việc này ta chỉ làm ở trong đầu)

- Để tính khoảng cách trên bằng Casio đầu tiên ta nhập vế trái của phương trình vào rồi sử dụng chức năng SHIFT SOLVE.

$\boxed{\text{MODE}} \boxed{1} \boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\text{hyp}} \boxed{1} \boxed{\times} \boxed{1} \boxed{+} \boxed{3} \boxed{\times} \boxed{2} \boxed{+} \boxed{4} \boxed{\times} \boxed{3} \boxed{+} \boxed{\text{ALPHA}} \boxed{)} \boxed{\text{D}} \boxed{\sqrt{\square}}$
 $\boxed{1} \boxed{x^2} \boxed{+} \boxed{3} \boxed{x^2} \boxed{+} \boxed{4} \boxed{x^2} \boxed{\text{D}} \boxed{\text{D}} \boxed{-} \boxed{\sqrt{\square}} \boxed{2} \boxed{6} \boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\text{CALC}} \boxed{1} \boxed{=}$
 $\sqrt{1^2 + 3^2 + 4^2}$
 $X = 7$
 $L-R = 0$

Ta thu được kết quả $m = 7$

⇒ Đáp số chính xác là **A**

VD3-[Thi thử Sở GD-ĐT tỉnh Hà Tĩnh năm 2017]

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+2}{3}$ và mặt phẳng

$(P): x + 2y - 2z + 3 = 0$. M là điểm có hoành độ âm thuộc d sao cho khoảng cách từ M đến (P) bằng 2. Tọa độ điểm M là :

A. $M(-2; 3; 1)$ B. $M(-1; 5; -7)$ C. $M(-2; -5; -8)$ D. $M(-1; -3; -5)$

GIẢI

- Ta biết điểm M thuộc (d) nên có tọa độ $M(1+t; -1+2t; -2+3t)$

(biết được điều này sau khi chuyển d về dạng tham số $d: \begin{cases} x = t \\ y = -1 + 2t \\ z = -2 + 3t \end{cases}$)

- Thiết lập phương trình khoảng cách : $d(M; (P)) = 2 \Leftrightarrow \frac{|t + 2(-1 + 2t) - 2(-2 + 3t) + 3|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = 2$

Nghĩ được tới đây thì ta có thể sử dụng Casio để tính rồi. Ta bấm ngắn gọn như sau

TÓM TẮT KỸ THUẬT SỬ DỤNG CASIO - VINACAL HỖ TRỢ GIẢI ĐỀ THI MÔN TOÁN 2017.

SHIFT hyp ALPHA) + 2 (- 1 + 2 ALPHA)) - 2 (- 2 + 3
ALPHA)) + 3 ▼ 3 ► - 2 SHIFT CALC - 5 =

Math
3
X= -1
L-R= 0

Khi đó $t = -1 \Rightarrow x = -1; y = -3$

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **D**

VD4-[Đề minh họa Bộ GD-ĐT năm 2017]

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(2;1;1)$ và mặt phẳng $(P): 2x + y + 2z + 2 = 0$. Biết mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn bán kính bằng 1. Viết phương trình mặt cầu (S) .

- A. $(x+2)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 8$
B. $(x+2)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 10$
C. $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 8$
D. $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 10$

GIẢI

- Mặt cầu $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$ sẽ có tâm $I(a;b;c)$. Vì mặt cầu (S) có tâm $I(2;1;1)$ nên nó chỉ có thể là đáp án **C** hoặc **D**
- Ta hiểu: Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo một giao tuyến là đường tròn bán kính $r = 1$ sẽ thỏa mãn tính chất $R^2 = h^2 + r^2$ với h là khoảng cách từ tâm I tới mặt phẳng.

Tính tâm R^2 bằng Casio.

((= SHIFT hyp 2 × 2 + 1 × 1 + 2 × 1 + 2)) √ 2 × 2
+ 1 × 2 + 2 × 2 ► ►) × 2 + 1 × 2 =
Math
((2 × 2 + 1 × 1 + 2 × 1 + 2))
√ 2 × 2 + 1 × 2 + 2 × 2
10

$\Rightarrow R^2 = 10$

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **D**

VD5-[Thi thử chuyên Khoa học tự nhiên lần 3 năm 2017]

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+2}{-2}$. Tính khoảng cách từ điểm $M(-2;1;-1)$ tới d

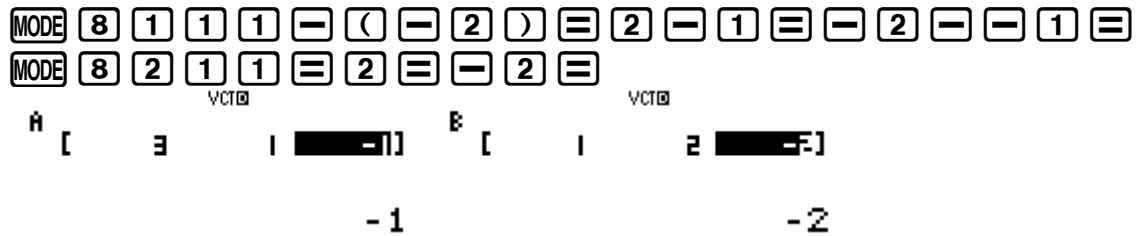
- A. $\frac{5}{3}$ B. $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{3}$ D. $\frac{5\sqrt{2}}{3}$

GIẢI

- Nhắc lại: Đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\vec{u_d}(1;2;-2)$ và đi qua điểm $N(1;2;-2)$ có khoảng cách từ M đến d tính theo công thức: $d(M;d) = \frac{|\overrightarrow{MN} \cdot \vec{u_d}|}{|\vec{u_d}|}$

- Để tính khoảng cách trên bằng Casio đầu tiên ta nhập hai vectơ $\overrightarrow{MN}, \vec{u_d}$ vào máy tính.

TÓM TẮT KỸ THUẬT SỬ DỤNG CASIO – VINACAL HỖ TRỢ GIẢI ĐỀ THI MÔN TOÁN 2017.



➤ Tính $d(M; d) = 2.357022604 = \frac{5\sqrt{2}}{3}$



⇒ Đáp số chính xác là **D**

VD6-[Thi thử báo Toán học tuổi trẻ lần 3 năm 2017]

Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + mt \\ z = -2t \end{cases}$ và mặt cầu

(S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y - 4z + 13 = 0$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để d cắt (S) tại hai điểm phân biệt?

A.5 B.3 C.2 D.1

GIẢI

➤ Mặt cầu (S): $(x-1)^2 + (y+3)^2 + (z-2)^2 = 1$ có tâm $I(1; -3; 2)$ bán kính $R=1$

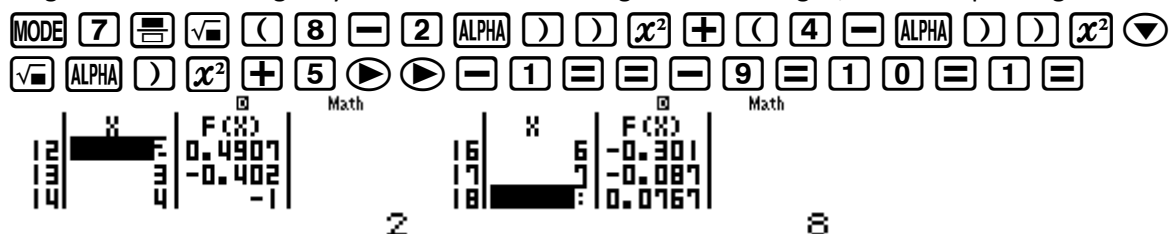
Đường thẳng d đi qua $M(2;1;0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}(1;m;-2)$

Ta hiểu : Đường thẳng d cắt mặt cầu (S) tại 2 điểm phân biệt nếu khoảng cách từ tâm I (của mặt cầu (S)) đến đường thẳng d nhỏ hơn bán kính R (của mặt cầu (S))

$$\Leftrightarrow \frac{\|[\vec{IM}; \vec{u}]\|}{\|\vec{u}\|} < 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{(8-2m)^2 + 0^2 + (4-2m)^2}}{\sqrt{1^2 + m^2 + (-2)^2}} < 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{(8-2m)^2 + 0^2 + (4-2m)^2}}{\sqrt{1^2 + m^2 + (-2)^2}} - 1 < 0$$

➤ Để giải bài toán ta dùng máy tính Casio với tính năng MODE 7 dò nghiệm của bất phương trình :



Ta dễ dàng tìm được tập nghiệm của m là $\{-3; -4; -5; -6; -7\}$

⇒ Đáp án chính xác là **A**

VD7-[Thi thử báo Toán học tuổi trẻ lần 3 năm 2017]

Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 3 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = 4 \end{cases}$. Gọi Δ' là giao tuyến của 2 mặt phẳng

$(P): x - 3y + z = 0$ và $(Q): x + y - z + 4 = 0$. Tính khoảng cách giữa Δ, Δ'

- A. $\frac{12}{\sqrt{15}}$ B. $\frac{25}{\sqrt{21}}$ C. $\frac{20}{\sqrt{21}}$ D. $\frac{16}{\sqrt{15}}$

GIẢI

- Đường thẳng Δ' có vectơ chỉ phương $\vec{u}' = [\vec{n}_P; \vec{n}_Q] = (2; 2; 4)$

MODE **8** **1** **1** **1** **=** **-** **3** **=** **1** **=** **MODE** **8** **2** **1** **1** **=** **1** **=** **-** **1**
= **ON** **SHIFT** **5** **3** **X** **SHIFT** **5** **4** **=**
Ans **[** **-** **3** **]** **2** **4**

2

Và Δ' đi qua điểm $M'(0; 2; 6)$

Đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương $\vec{u}(1; 2; 0)$ và đi qua điểm $M(3; -1; 4)$

- Ta hiểu : khoảng cách giữa hai đường thẳng chỉ tồn tại khi chúng song song hoặc chéo nhau
 Kiểm tra sự đồng phẳng của 2 đường thẳng trên bằng tích hỗn tạp $\overrightarrow{MM'}[\vec{u}; \vec{u}']$

Nhập ba vectơ $\overrightarrow{MM'}, \vec{u}, \vec{u}'$ vào máy tính Casio

MODE **8** **1** **1** **-** **3** **=** **3** **=** **2** **=** **MODE** **8** **2** **1** **1** **=** **2** **=** **0** **=**
MODE **8** **3** **1** **2** **=** **2** **=** **4** **=**
A **[** **-** **3** **]** **B** **[** **1** **2** **]**
C **[** **2** **2** **]**

4

Xét tích hỗn tạp $\overrightarrow{MM'}[\vec{u}; \vec{u}'] = -40 \neq 0 \Rightarrow \Delta, \Delta'$ chéo nhau

- Tính độ dài hai đường thẳng chéo nhau $\Rightarrow \Delta, \Delta'$ ta có công thức :

$$d = \frac{|\overrightarrow{MM'}[\vec{u}; \vec{u}']|}{|\vec{u} \times \vec{u}'|} = 4.3640.. = \frac{20}{\sqrt{21}}$$

ON **SHIFT** **hyp** **-** **4** **0** **)** **÷** **SHIFT** **hyp** **SHIFT** **5** **4** **X** **SHIFT** **5** **5** **)** **=**
Abs(-40)÷Abs(Vc

4.364357805

$\Rightarrow$ Đáp án chính xác là **C**

VD9-[Câu 25 Sách bài tập hình học nâng cao 12]

Cho hai đường thẳng $d: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+3}{2}$ và $d': \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{2}$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng d, d' là :

A. $4\sqrt{2}$

B. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$

C. $\frac{4}{3}$

D. $2\sqrt{3}$

GIẢI

- Đường thẳng d có vecto chỉ phương $\vec{u} = (1; 2; 2)$ và đi qua điểm $M(2; -1; -3)$

Đường thẳng d' đi qua điểm $M'(1; 1; -1)$

Dễ thấy hai đường thẳng d, d' song song với nhau nên khoảng cách từ d' đến d chính là khoảng cách từ điểm M' (thuộc d') đến d .

Gọi khoảng cách cần tìm là h ta có

$$h = \frac{|\overrightarrow{MM'} \cdot \vec{u}|}{|\vec{u}|} = 1.8856... = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

MODE 8 1 1 = - 1 = 2 = 2 = MODE 8

2 1 1 = 2 = 2 = ON SHIFT hyp SHIFT 5 3 X SHIFT 5 4) ÷ SHIFT

hyp SHIFT 5 4) =

Abs(VctA×VctB)÷

1.885618083

⇒ Đáp án chính xác là B

VD10-[Câu 26 Sách bài tập hình học nâng cao 12]

Cho hai đường thẳng $d: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - t \\ z = 2t \end{cases}$ và $d': \begin{cases} x = 2 - 2t' \\ y = 3 \\ z = t' \end{cases}$. Mặt phẳng cách đều hai đường thẳng d và d' có phương trình:

d' có phương trình:

A. $x + 5y + 2z + 12 = 0$

B. $x + 5y - 2z + 12 = 0$

C. $x - 5y + 2z - 12 = 0$

D. $x + 5y + 2z - 12 = 0$

GIẢI

- Đường thẳng d có vecto chỉ phương $\vec{u} = (1; -1; 2)$ và đi qua điểm $M(2; 1; 0)$

Đường thẳng d' có vecto chỉ phương $\vec{u}' = (-2; 0; 1)$ và đi qua điểm $M'(2; 3; 0)$

Dễ thấy hai đường thẳng d, d' chéo nhau nên mặt phẳng (P) cách đều hai đường thẳng trên khi mặt phẳng đó đi qua trung điểm MM' và song song với cả 2 đường thẳng đó.

- Mặt phẳng (P) song song với cả 2 đường thẳng nên nhận vecto chỉ phương của 2 đường thẳng là cặp vecto chỉ phương.

$$\Rightarrow \vec{n}_P = [\vec{u}; \vec{u}'] = (-1; -5; -2)$$

MODE 8 1 1 1 = - 1 = 2 = MODE 8 2 1 - 2 = 0 = 1

= ON SHIFT 5 3 X SHIFT 5 4 =

Ans

$\vec{n}_P = [-1; -5; -2]$

-1

(P) lại đi qua trung điểm $I(2; 2; 0)$ của MM' nên $(P): x + 5y + 2z - 12 = 0$

⇒ Đáp án chính xác là D

Bài 1-[Đề minh họa Bộ GD-ĐT lần 1 năm 2017]

Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình của mặt cầu có tâm $I(1; 2; -1)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(P): x - 2y - 2z - 8 = 0$?

A. $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 3$ B. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 3$

C. $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 9$ D. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 9$

Bài 2-[Thi thử báo Toán học tuổi trẻ lần 5 năm 2017]

Tìm điểm M trên đường thẳng $d: \begin{cases} x=1+t \\ y=1-t \\ z=2t \end{cases}$ sao cho $AM = \sqrt{6}$ với $A(0;2;-2)$:

A. $\begin{bmatrix} 1;1;0 \\ 2;1;-1 \end{bmatrix}$ B. $\begin{bmatrix} 1;1;0 \\ -1;3;-4 \end{bmatrix}$ C. $\begin{bmatrix} -1;3;-4 \\ 2;1;-1 \end{bmatrix}$ D. Không có M thỏa

Bài 3-[Thi thử THPT Phan Chu Trinh – Phú Yên lần 1 năm 2017]

Cho $(P): 2x - y + z - m = 0$ và $A(1;1;3)$. Tìm m để $d(A;(P)) = \sqrt{6}$

A. $\begin{bmatrix} m=-2 \\ m=4 \end{bmatrix}$ B. $\begin{bmatrix} m=3 \\ m=-9 \end{bmatrix}$ C. $\begin{bmatrix} m=-2 \\ m=10 \end{bmatrix}$ D. $\begin{bmatrix} m=-3 \\ m=12 \end{bmatrix}$

Bài 4-[Đề minh họa Bộ GD-ĐT lần 2 năm 2017]

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai điểm $A(-2;3;1)$ và $B(5;-6;-2)$. Đường thẳng AB cắt mặt phẳng (Oxz) tại điểm M . Tính tỉ số $\frac{MA}{MB}$

A. $\frac{MA}{MB} = \frac{1}{2}$ B. $\frac{MA}{MB} = 2$ C. $\frac{MA}{MB} = \frac{1}{3}$ D. $\frac{MA}{MB} = 3$

Bài 5-[Câu 67 Sách bài tập hình học nâng cao lớp 12]

Tính khoảng cách từ điểm $M(2;3;-1)$ đến đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng $(\alpha): x + y - 2z - 1 = 0$ và $(\alpha'): x + 3y + 2z + 2 = 0$.

A. $\sqrt{\frac{215}{24}}$ B. $\sqrt{\frac{205}{15}}$ C. $\frac{205}{\sqrt{15}}$ D. $\frac{215}{\sqrt{24}}$

Bài 6-[Câu 9 Sách bài tập hình học nâng cao lớp 12]

Cho $A(1;1;3)$, $B(-1;3;2)$, $C(-1;2;3)$. Khoảng cách từ gốc tọa độ O đến mặt phẳng (ABC) là:

A. $\sqrt{3}$ B. 3 C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{3}{2}$

Bài 7-[Câu 69b Sách bài tập hình học nâng cao lớp 12]

Tính khoảng cách giữa cặp đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-4}{-2}$ và $d': \frac{x+2}{-4} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+1}{4}$

A. $\sqrt{\frac{127}{4}}$ B. $\frac{\sqrt{127}}{4}$ C. $\sqrt{\frac{386}{3}}$ D. $\frac{\sqrt{386}}{3}$

Bài 8-[Câu 69c Sách bài tập hình học nâng cao lớp 12]

Tính khoảng cách giữa cặp đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3}$ và $d': \begin{cases} x=2-t \\ y=-1+t \\ z=t \end{cases}$

A. $\frac{2\sqrt{7}}{7}$ B. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ C. $\frac{\sqrt{26}}{13}$ D. $\frac{\sqrt{24}}{11}$

LỜI GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1-[Đề minh họa Bộ GD-ĐT lần 1 năm 2017]

Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình của mặt cầu có tâm $I(1;2;-1)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(P): x - 2y - 2z - 8 = 0$?

TÓM TẮT KỸ THUẬT SỬ DỤNG CASIO - VINACAL HỖ TRỢ GIẢI ĐỀ THI MÔN TOÁN 2017.

A. $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 3$ B. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 3$

C. $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 9$ D. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 9$

GIẢI

- Mặt cầu tiếp xúc với mặt phẳng (P) khi $d(I; (P)) = R$

$$\frac{|1-4+2-8|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}} = 3$$

$d(I; (P)) = 3 \Rightarrow R^2 = 9 \Rightarrow$ Đáp số chỉ có thể là C hoặc D

- Mà ta lại có tâm mặt cầu là $I(1; 2; -1) \Rightarrow (S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 9$

Vậy đáp số chính xác là **D**

Bài 2-[Thi thử báo Toán học tuổi trẻ lần 5 năm 2017]

Tìm điểm M trên đường thẳng $d: \begin{cases} x=1+t \\ y=1-t \\ z=2t \end{cases}$ sao cho $AM = \sqrt{6}$ với $A(0; 2; -2)$:

A. $\begin{bmatrix} 1; 1; 0 \\ 2; 1; -1 \end{bmatrix}$ B. $\begin{bmatrix} 1; 1; 0 \\ -1; 3; -4 \end{bmatrix}$ C. $\begin{bmatrix} -1; 3; -4 \\ 2; 1; -1 \end{bmatrix}$ D. Không có M thỏa

GIẢI

- Gọi điểm M thuộc d có tọa độ theo t là $M(1+t; 1-t; 2t)$

- Ta có $AM = \sqrt{6} \Leftrightarrow |AM| = \sqrt{6} \Leftrightarrow |AM|^2 - 6 = 0$

Sử dụng máy tính Casio tìm t

$$(1+x-0)^2 + (1-x-2)^2 + (2x-2)^2 - 6 = 0$$

- Ta tìm được hai giá trị của t

Với $t=0 \Rightarrow M(1; 1; 0)$, với $t=-2 \Rightarrow M(-1; 3; -4)$

$\Rightarrow$ Đáp án chính xác là **B**

Bài 3-[Thi thử THPT Phan Chu Trinh – Phú Yên lần 1 năm 2017]

Cho $(P): 2x - y + z - m = 0$ và $A(1; 1; 3)$. Tìm m để $d(A; (P)) = \sqrt{6}$

A. $\begin{bmatrix} m=-2 \\ m=4 \end{bmatrix}$ B. $\begin{bmatrix} m=3 \\ m=-9 \end{bmatrix}$ C. $\begin{bmatrix} m=-2 \\ m=10 \end{bmatrix}$ D. $\begin{bmatrix} m=-3 \\ m=12 \end{bmatrix}$

GIẢI

- Thiết lập phương trình khoảng cách $d(A; (P)) = \sqrt{6} \Leftrightarrow \frac{|2 \cdot 1 - 1 + 3 - m|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2}} = \sqrt{6}$

- Đó là khi ta nhầm, nếu vừa nhầm vừa điền luôn vào máy tính thì làm như sau (để tiết kiệm thời gian)

$$\frac{|2-1+3-x|}{\sqrt{2^2+1^2+1^2}} = \sqrt{6}$$

TÓM TẮT KỸ THUẬT SỬ DỤNG CASIO - VINACAL HỖ TRỢ GIẢI ĐỀ THI MÔN TOÁN 2017.

Tìm nghiệm ta sử dụng chức năng CALC xem giá trị nào của m làm vế trái $=\sqrt{6}$ thì là đúng

CALC **=** **2** **=**

Math ▲

$$\frac{|2-1+3-x|}{\sqrt{2^2+1^2+1^2}}$$

$\sqrt{6}$

⇒ Chỉ có A hoặc C là đúng

CALC **4** **=**

Math ▲

$$\frac{|2-1+3-x|}{\sqrt{2^2+1^2+1^2}}$$

0

Giá trị $m=4$ không thỏa mãn vậy đáp án A sai ⇒ Đáp án chính xác là C

Bài 4-[Đề minh họa Bộ GD-ĐT lần 2 năm 2017]

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho hai điểm $A(-2;3;1)$ và $B(5;-6;-2)$. Đường thẳng AB cắt mặt phẳng (Oxz) tại điểm M. Tính tỉ số $\frac{MA}{MB}$

A. $\frac{MA}{MB} = \frac{1}{2}$ B. $\frac{MA}{MB} = 2$ C. $\frac{MA}{MB} = \frac{1}{3}$ D. $\frac{MA}{MB} = 3$

GIẢI

- Mặt phẳng (Oxz) có phương trình $y = 0$
- Để tính tỉ số $\frac{MA}{MB}$ ta sử dụng công thức tỉ số khoảng cách (đã gặp ở chuyên đề hình học không gian)

Ta có: $\frac{MA}{MB} = \frac{d(A; (Oxz))}{d(B; (Oxz))}$ bất kể hai điểm A, B cùng phía hay khác phía so với (Oxz)

Ta có thể dùng máy tính Casio tính ngay tỉ số này

MODE **1** **=** **SHIFT** **hyp** **0** **+** **3** **+** **0** **▼** **SHIFT** **hyp** **0** **+** **-** **6** **+** **0** **=**

Math ▲

$$\frac{|0+3+0|}{|0+-6+0|}$$

$\frac{1}{2}$

Ta hiểu cả hai mẫu số của hai phép tính khoảng cách đều như nhau nên ta triệt tiêu luôn mà không cần cho vào phép tính của Casio

⇒ Đáp số chính xác là A

Bài 5-[Câu 67 Sách bài tập hình học nâng cao lớp 12]

Tính khoảng cách từ điểm $M(2;3;-1)$ đến đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng $(\alpha): x+y-2z-1=0$ và $(\alpha'): x+3y+2z+2=0$.

A. $\sqrt{\frac{215}{24}}$ B. $\sqrt{\frac{205}{15}}$ C. $\frac{205}{\sqrt{15}}$ D. $\frac{215}{\sqrt{24}}$

GIẢI

- d là giao tuyến của hai mặt phẳng (α) và (α') nên cùng thuộc 2 mặt phẳng này ⇒ vectơ chỉ phương $\vec{u}$ của đường thẳng d vuông góc với cả 2 vectơ pháp tuyến của 2 mặt phẳng trên.

⇒ $\vec{u} = [\vec{n}_\alpha; \vec{n}_{\alpha'}] = (8; -4; 2)$

MODE **8** **1** **1** **1** **=** **1** **=** **-** **2** **=** **MODE** **8** **2** **1** **0** **=** **3** **=** **2** **=** **ON** **SHIFT** **5** **3** **×** **SHIFT** **5** **4** **=**

$$\vec{AN} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

- Gọi điểm $N(x; y; 0)$ thuộc đường thẳng $d \Rightarrow N\left(\frac{5}{2}; -\frac{3}{2}; 0\right)$

- Khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng d là: $h = \frac{|\overrightarrow{MN} \cdot \vec{u}|}{|\vec{u}|} = 3.8265... = \sqrt{\frac{205}{14}}$

MODE 8 1 1 5 ÷ 2 = 2 = - 3 ÷ 2 = 3 = 0 = - 1 = MODE
8 2 1 8 = - 4 = 2 = ON SHIFT hyp SHIFT 5 3 X SHIFT 5 4) ÷ SHIFT
hyp SHIFT 5 4) =

Abs(VctA×VctB)÷
3.826598639

⇒ Đáp số chính xác là B

Bài 6-[Câu 9 Sách bài tập hình học nâng cao lớp 12]

Cho $A(1;1;3)$, $B(-1;3;2)$, $C(-1;2;3)$. Khoảng cách từ gốc tọa độ O đến mặt phẳng (ABC) là:

- A. $\sqrt{3}$ B. 3 C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{3}{2}$

GIẢI

- Vecto pháp tuyến của (ABC) là $\vec{n} = [\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}] = (1; 2; 2)$

MODE 8 1 1 - 2 = 2 = - 1 = MODE 8 2 1 - 2 = 1 = 0 =
ON SHIFT 5 3 X SHIFT 5 4 =
Ans [] 2 2]

1

⇒ $(ABC): 1(x-1) + 2(y-1) + 2(z-3) = 0 \Leftrightarrow x + 2y + 3z - 9 = 0$

- Khoảng cách từ O đến mặt phẳng (ABC) là $h = \frac{|0+0+0-9|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}} = 3$

⇒ Đáp số chính xác là B

Bài 7-[Câu 69b Sách bài tập hình học nâng cao lớp 12]

Tính khoảng cách giữa cặp đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-4}{-2}$ và $d': \frac{x+2}{-4} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+1}{4}$

- A. $\sqrt{\frac{127}{4}}$ B. $\frac{\sqrt{127}}{4}$ C. $\sqrt{\frac{386}{3}}$ D. $\frac{\sqrt{386}}{3}$

GIẢI

- Đường thẳng d đi qua điểm $M(1; -3; 4)$ và có vecto chỉ phương $(2; 1; -2)$

Đường thẳng d' đi qua điểm $M'(-2; 1; -1)$ và có vecto chỉ phương $(-4; -2; 4)$

Để thấy 2 đường thẳng trên song song với nhau ⇒ Khoảng cách cần tìm là khoảng cách từ M' đến d

$$= \frac{|\overrightarrow{M'M} \cdot \vec{u}|}{|\vec{u}|} = 6.5489... = \frac{\sqrt{386}}{3}$$

MODE 8 1 1 - 3 = 4 = - 5 = MODE 8 2 1 2 = 1 = - 2 =
ON SHIFT hyp SHIFT 5 3 X SHIFT 5 4) ÷ SHIFT hyp SHIFT 5 4) =

$$\text{Abs}(\text{VctA} \times \text{VctB}) \div \rightarrow$$

6.548960901

 $\Rightarrow$ Đáp số chính xác là D**Bài 7-[Câu 69b Sách bài tập hình học nâng cao lớp 12]**

Tính khoảng cách giữa cặp đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-4}{-2}$ và $d': \frac{x+2}{-4} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+1}{4}$

A. $\sqrt{\frac{127}{4}}$ B. $\frac{\sqrt{127}}{4}$ C. $\sqrt{\frac{386}{3}}$ D. $\frac{\sqrt{386}}{3}$

GIẢI

- Đường thẳng d đi qua điểm $M(1; -3; 4)$ và có vecto chỉ phương $(2; 1; -2)$

Đường thẳng d' đi qua điểm $M'(-2; 1; -1)$ và có vecto chỉ phương $(-4; -2; 4)$

Dễ thấy 2 đường thẳng trên song song với nhau $\Rightarrow$ Khoảng cách cần tìm là khoảng cách từ M' đến d

$$= \frac{|\overrightarrow{M'M} \cdot \vec{u}|}{|\vec{u}|} = 6.5489... = \frac{\sqrt{386}}{3}$$

MODE 8 1 1 - 3 = 4 = - 5 = MODE 8 2 1 2 = 1 = - 2 =
ON SHIFT hyp SHIFT 5 3 X SHIFT 5 4) ÷ SHIFT hyp SHIFT 5 4) =

$$\text{Abs}(\text{VctA} \times \text{VctB}) \div \rightarrow$$

6.548960901

 $\Rightarrow$ Đáp số chính xác là D**Bài 8-[Câu 69c Sách bài tập hình học nâng cao lớp 12]**

Tính khoảng cách giữa cặp đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3}$ và $d': \begin{cases} x = 2-t \\ y = -1+t \\ z = t \end{cases}$

A. $\frac{2\sqrt{7}}{7}$ B. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ C. $\frac{\sqrt{26}}{13}$ D. $\frac{\sqrt{24}}{11}$

GIẢI

- Đường thẳng d đi qua điểm $M(1; 2; 3)$ và có vecto chỉ phương $\vec{u}(1; 2; 3)$

Đường thẳng d' đi qua điểm $M'(2; -1; 0)$ và có vecto chỉ phương $\vec{u}'(-1; 1; 1)$

Dễ thấy 2 đường thẳng trên chéo nhau $\Rightarrow$ Khoảng cách cần tìm là $= \frac{|\overrightarrow{MM'} \cdot [\vec{u}; \vec{u'}]|}{|[\vec{u}; \vec{u'}]|} = 0.3922... = \frac{\sqrt{26}}{13}$

MODE 8 1 1 1 = - 3 = - 3 = MODE 8 2 1 1 = 2 = 3 = MODE
8 3 1 - 1 = 1 = 1 = ON SHIFT hyp SHIFT 5 3 SHIFT 5 7 (SHIFT 5 4
X SHIFT 5 5)) ÷ SHIFT hyp SHIFT 5 4 X SHIFT 5 5) =

$$\text{Abs}(\text{VctA} \cdot (\text{VctB} \times \rightarrow$$

0.3922322703

 $\Rightarrow$ Đáp số chính xác là C