SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO NAM ĐỊNH

ĐỀ THI VÀO 10 CHUYÊN NĂM HỌC 2023-2024

Môn thi : Toán chung – Đề 1 – dành cho các lớp tự nhiên

Câu 1: (2,0 điểm)

1. Tính giá trị biểu thức *P* = $\sqrt{2024+2\sqrt{2023}}-\sqrt{2025+2\sqrt{2024}}$ .
2. Tìm tọa độ của điểm *M* là giao điểm của đường thẳng *y = x+1* với trục *Oy*.
3. Tính diện tích hình tròn ngoại tiếp tam giác vuông có cạnh huyền bằng $2\sqrt{2}$ *cm.*
4. Tính thể tích của hình nón có đường sinh bằng 10*cm* và bán kính đáy bằng 6*cm*.

Câu 2: (1,5 điểm)

Cho biểu thức *P =* $\left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1}+\frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}-\frac{1}{\sqrt{x}-1}\right).\frac{1}{\sqrt{x}-1}$ (với *x*$ \geq 0$ và *x*$ \ne 1)$.

1. Rút gọn biểu thức *P.*
2. Tìm *x* để *P* = $\frac{1}{3}$.

Câu 3: (2,5 điểm)

1. Cho phương trình $x^{2}-\left(2m+1\right)x+4m-2=0$ (1) (với *m* là tham số).
2. Tìm tất cả giá trị của $m$ để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt.
3. Gọi $x\_{1},x\_{2}$ là hai nghiệm phân biệt của phương trình (1). Tìm tất cả các giá trị của m để $x\_{1},x\_{2}$ là độ dài hai cạnh của một hình chữ nhật có độ dài đường chéo bằng $\sqrt{13}$.
4. Giải phương trình $6\sqrt{2x+5}+4\sqrt{x+2}=3x+20$.

Câu 4: (3,0 điểm)

Cho tam giác *ABC* nhọn (*AB* $<$ *AC*) nội tiếp đường tròn tâm *O, AD* là đường cao. Gọi *E, F* lần lượt là hình chiếu của *D* trên *AB, AC*.

1. Chứng minh tứ giác *AEDF* nội tiếp và *AE.AB = AF.AC* .
2. Gọi *AP* là đường kính của đường tròn (*O*). Chứng minh *AP* vuông góc với *EF*.
3. Gọi *H* là trực tâm của tam giác *ABC*. Đường tròn đường kính *AH* cắt đường tròn (*O*) tại điểm thứ hai *T*. Gọi *K* là trực tâm của tam giác *BTC*. Chứng minh tam giác *HKT* vuông tại *H*.

Câu 5: (1,0 điểm)

1. Giải hệ phương trình $\left\{\begin{array}{c}\sqrt{4x^{2}+3}-2\sqrt{y}=\sqrt{y^{2}+3}-2\sqrt{2x} \\\sqrt{x+1}+ \sqrt{3-x}=2+\sqrt{y+3-x^{2}}\end{array}\right.$ .
2. Xét hai số thực dương *x, y* thỏa mãn *6x + y = 2xy*. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức *P* = $3x+\frac{2}{x^{2}}+\frac{1}{x}+\frac{42}{y}+(\sqrt{x}+\sqrt{y})^{2}$.

LỜI GIẢI

ĐỀ 1

Câu 1: (2,0 điểm)

1. ***Tính giá trị biểu thức P =*** $\sqrt{2024+2\sqrt{2023}}-\sqrt{2025+2\sqrt{2024}}$

P = $\sqrt{2024+2\sqrt{2023}}-\sqrt{2025+2\sqrt{2024}}$

= $\sqrt{2023+2\sqrt{2023}+1}-\sqrt{2024+2\sqrt{2024}+1}$

= $\sqrt{(\sqrt{2023}+1)^{2}}-\sqrt{(\sqrt{2024}+1)^{2}}$

= $\left|\sqrt{2023}+1\right|-\left|\sqrt{2024}+1\right|$

= $\sqrt{2023}+1-\left(\sqrt{2024}+1\right) (Do \sqrt{2023}+1>0; \sqrt{2024}+1>0)$

= $\sqrt{2023}+1-\sqrt{2024}-1$

= $\sqrt{2023}-\sqrt{2024}$

Vậy P = $\sqrt{2023}-\sqrt{2024}$

1. ***Tìm tọa độ của điểm M là giao điểm của đường thẳng y = x + 1 với trục Oy***

Giao điểm của đường thẳng với trục *Oy* khi *x* = 0.

Thay *x* = 0 ta có *y* = 0 + 1 = 1.

Vậy tọa độ điểm của đường thẳng *y = x* + 1 với trục *Oy* là *M*(0;1).

1. ***Tính diện tích hình tròn ngoại tiếp tam giác vuông có cạnh huyền bằng*** $2\sqrt{2}$ ***cm****.*

Hình tròn ngoại tiếp tam giác vuông có cạnh huyền bằng $2\sqrt{2}$ *cm.*

Suy ra cạnh huyền bằng đường kính hình tròn $⇒R=\sqrt{2}cm$.

Diện tích hình tròn là : *S* = $πR^{2}=2π \left(m^{2}\right).$

1. ***Tính thể tích của hình nón có đường sinh bằng 10cm và bán kính đáy bằng 6cm.***

Theo giả thiết ta có đường sinh *l* = 10 (cm), bán kính đáy *R* = 6 (cm).

Áp dụng định lí Pytago ta có :

Chiều cao của hình nón là : *h* = $\sqrt{10^{2}-6^{2}}=\sqrt{64}=8\left(cm\right).$

Thể tích của hình nón là : *V* = $\frac{1}{3}πR^{2}.h=\frac{1}{3}π6^{2}.8=96π \left(cm^{3}\right).$

Câu 2: (1,5 điểm)

***Cho biểu thức P =*** $\left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1}+\frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}-\frac{1}{\sqrt{x}-1}\right).\frac{1}{\sqrt{x}-1}$ ***(với x***$ \geq 0$ ***và x***$ \ne 1)$***.***

1. ***Rút gọn biểu thức P***

Với *x*$ \geq 0$ và *x*$ \ne 1$ta có :

*P =* $\left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1}+\frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}-\frac{1}{\sqrt{x}-1}\right).\frac{1}{\sqrt{x}-1}$

*=* $\left(\frac{x+2}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}+\frac{\sqrt{x}.(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}-\frac{x+\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}\right).\frac{1}{\sqrt{x}-1}$

*=* $\left(\frac{x+2}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}+\frac{x-\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}-\frac{x+\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}\right).\frac{1}{\sqrt{x}-1}$

= $\frac{x+2+x-\sqrt{x}-(x+\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}.\frac{1}{\sqrt{x}-1}$

= $\frac{x-2\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}.\frac{1}{\sqrt{x}-1}$

= $\frac{(\sqrt{x}-1)^{2}}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}.\frac{1}{\sqrt{x}-1}$

= $\frac{1}{x+\sqrt{x}+1}$

Vậy với *x*$ \geq 0$ và *x*$ \ne 1$thì *P* = $\frac{1}{x+\sqrt{x}+1}$.

1. ***Tìm x để P =*** $\frac{1}{3}$

Với *x*$ \geq 0$ và *x*$ \ne 1,$để *P* = $\frac{1}{3}$ $⇔$ $\frac{1}{x+\sqrt{x}+1}=\frac{1}{3}$

$$⇔ x+\sqrt{x}+1=3$$

$$⇔ x+\sqrt{x}-2=0$$

$$⇔ x-\sqrt{x}+2\sqrt{x}-2=0$$

$$⇔\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)+2(\sqrt{x}-1)=0$$

$$⇔\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)=0$$

$$⇔\sqrt{x}-1=0 (do \sqrt{x}+2>0 ∀ x) $$

$$⇔\sqrt{x}=1$$

$$⇔x=1 (tm)$$

Vậy với *x* = 1 thì *P* = $\frac{1}{3}$.

Câu 3: (2,5 điểm)

1. ***Cho phương trình*** $x^{2}-\left(2m+1\right)x+4m-2=0$ ***(1) (với m là tham số)***
2. ***Tìm tất cả giá trị của*** $m$ ***để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt***

Ta có:

$$∆ = \left(-\left(2m+1\right)\right)^{2}-4\left(4m-2\right)$$

$$=4m^{2}+4m+1-16m+8$$

$$= 4m^{2}-12m+9$$

$$= (2m-3)^{2}$$

Để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thì $∆ >0$

$$⇔(2m-3)^{2}>0⇔2m-3\ne 0⇔m\ne \frac{3}{2}$$

Vậy $m\ne \frac{3}{2}$ thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt.

1. ***Gọi*** $x\_{1},x\_{2}$ ***là hai nghiệm phân biệt của phương trình (1). Tìm tất cả các giá trị của m để*** $x\_{1},x\_{2}$ ***là độ dài hai cạnh của một hình chữ nhật có độ dài đường chéo bằng*** $\sqrt{13}$***.***

Với $m\ne \frac{3}{2}$ thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x\_{1},x\_{2}.$

Khi đó theo hệ thức Vi-ét ta có$\left\{\begin{array}{c}x\_{1}+x\_{2}=2m+1 \\x\_{1}x\_{2}=4m-2 \end{array}\right.$

Để $x\_{1},x\_{2 }$là độ dài hai cạnh của một hình chữ nhật có độ dài đường chéo bằng $\sqrt{13}$.

$⇒x\_{1}^{2}+x\_{2}^{2}=(\sqrt{13})^{2}$ (áp dụng định lí Pytago)

$⇔x\_{1}^{2}+x\_{2}^{2}=$13

$$⇔\left(x\_{1}+x\_{2}\right)^{2}-2x\_{1}x\_{2}=13$$

$$⇔\left(2m+1 \right)^{2}-2(4m-2)=13$$

$$⇔4m^{2}+4m+1-8m+4=13$$

$$⇔4m^{2}-4m-8=0$$

$$⇔m^{2}-m-2=0$$

$$⇔m^{2}+m-2m-2=0$$

$$⇔m\left(m+1\right)-2\left(m+1\right)=0$$

$$⇔\left(m-2\right)\left(m+1\right)=0$$

$$⇔\left[\genfrac{}{}{0pt}{}{m=2}{m=-1}(thỏa mãn m\ne \frac{3}{2}) \right.$$

Vậy $\left[\genfrac{}{}{0pt}{}{m=2}{m=-1}\right.$

1. ***Giải phương trình*** $6\sqrt{2x+5}+4\sqrt{x+2}=3x+20$

ĐKXĐ: $\left\{\begin{array}{c}2x+5\geq 0\\x+2\geq 0\end{array}\right.⇔\left\{\begin{array}{c}x\geq -\frac{5}{2}\\x\geq -2\end{array}\right.⇔x\geq -2$

Ta có:

$$6\sqrt{2x+5}+4\sqrt{x+2}=3x+20$$

$$⇔3x+20-6\sqrt{2x+5}-4\sqrt{x+2}=0$$

$$⇔\left(2x+5-6\sqrt{2x+5}+9\right)+\left(x+2-4\sqrt{x+2}+4\right)=0$$

$$⇔\left(\sqrt{2x+5}-3\right)^{2}+\left(\sqrt{x+2}-2\right)^{2}=0$$

Do $\left\{\begin{array}{c}\left(\sqrt{2x+5}-3\right)^{2}\geq 0 ∀ x\\\left(\sqrt{x+2}-2\right)^{2}\geq 0 ∀x\end{array}⇒\right.\left(\sqrt{2x+5}-3\right)^{2}+\left(\sqrt{x+2}-2\right)^{2}\geq 0 ∀ x$

Dấu “=” xảy ra $⇔\left\{\begin{array}{c}\sqrt{2x+5}-3=0\\\sqrt{x+2}-2=0\end{array}\right.⇔\left\{\begin{array}{c}\sqrt{2x+5}=3\\\sqrt{x+2}=2\end{array}\right.⇔\left\{\begin{array}{c}2x+5=9\\x+2=4\end{array}\right.⇔x=2 \left(tm\right)$

Vậy tập nghiệm của phương trình là S = $\left\{2\right\}$.

Câu 4: (3,0 điểm)

***Cho tam giác ABC nhọn (AB*** $<$ ***AC) nội tiếp đường tròn tâm O, AD là đường cao. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của D trên AB, AC.***

******

1. ***Chứng minh tứ giác AEDF nội tiếp và AE.AB = AF.AC .***

+) Ta có:

$$DE⊥AB⇒ ∠AED=90°$$

$$DF⊥AC⇒∠AFD=90°$$

Xét tứ giác *AEDF* có: $∠AED+∠AFD=90°+90°=180°$.

* *AEDF* là tứ giác nội tiếp (Tứ giác có tổng hai góc đối diện bằng $180°$).

+) Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông *ADB*, đường cao *DE* ta có: $AD^{2}=AE.AB $

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông *ADC*, đường cao *DF* ta có: $AD^{2}=AF.AC $

* *AE.AB = AF.AC* (=$AD^{2}$) (đpcm).
1. ***Gọi AP là đường kính của đường tròn (O). Chứng minh AP vuông góc với EF***

Gọi *EF* $∩AP$ = $\left\{I\right\}.$

Ta có $∠ACP=90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn => Tam giác *ACP* vuông tại *C*.

$⇒∠A\_{1}+∠P=90°$ (trong tam giác vuông, hai góc nhọn phụ nhau).

Ta có: $∠A\_{2}+∠ABC=90°$ (hai góc nhọn phụ nhau trong tam giác vuông *ABD*).

Lại có $∠P=∠ABC$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung *AC*)

$$⇒ ∠A\_{1}=∠A\_{2}$$

Mà $∠A\_{2}=∠F\_{1}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung DE)

$$⇒ ∠A\_{1}=∠F\_{1}$$

Ta có: $∠F\_{1}+∠F\_{2}=∠AFD=90°$

$$⇒∠A\_{1}+∠F\_{2}=90°$$

$$⇒ ∆AIF vuông tại I$$

Vậy *AI* $⊥IF$ hay *AP* $⊥EF \left(đpcm\right).$

1. ***Gọi H là trực tâm của tam giác ABC. Đường tròn đường kính AH cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai T. Gọi K là trực tâm của tam giác BTC. Chứng minh tam giác HKT vuông tại H.***

Ta có *CP* $⊥AC \left(cmt\right), $mà *BH* $⊥AC (gt)$ $⇒CP∥BH$ (từ vuông góc đến song song).

Tương tự ta chứng minh được $BP ∥CH$ (cùng vuông góc với *AB*).

=> $HBPC$ là hình bình hành (dhnb) => Hai đường chéo *BC* và *HP* cắt nhau tại trung điểm mỗi đường.

Gọi *M* là trung điểm *BC* => *M* là trung điểm *HP*.

=> *OM* là đường trung bình của $∆AHP$ (định nghĩa)

=> *OM* $∥AH$, *OM* = $\frac{1}{2}$*AH* (3) (tính chất đường trung bình của tam giác).

Kẻ đường kính *OT* cắt đường tròn tại điểm thứ hai *N (N*$\ne T)$ => $∠TCN$ là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn => *CN* $⊥TC.$

Do *K* là trực tâm $∆BTC$ (gt) nên *BK* $⊥TC$

=> *CN* $∥BK$ (từ vuông góc đến song song)

Chứng minh tương tự *CK* $∥NB$ (do cùng vuông góc với *TB*)

=> *CNBK* là hình bình hành (dhnb) => Hai đường chéo *BC* và *KN* cắt nhau tại trung điểm mỗi đường

Mà *M* là trung điểm của *BC* nên *M* là trung điểm của *KN*.

=> *OM* là đường trung bình của $∆NKT$ (định nghĩa)

=> *OM* $∥TK, OM= \frac{1}{2}$*TK* (4) (tính chất đường trung bình của tam giác).

Từ (3) và (4) => *AH* $∥TK, AH=TK$

=> *AHKT* là hình bình hành (dhnb) (đpcm).

=> *AT* $∥HK $(tính chất hình bình hành).

Mà $∠ATH=90° $(góc nội tiếp chắn nửa đường tròn đường kính *AH*)

=> $∠THK=∠ATH=90°$ (2 góc so le trong bằng nhau)

Vậy $∆HKT$ vuông tại *H* (đpcm).

Câu 5: (1,0 điểm)

1. ***Giải hệ phương trình*** $\left\{\begin{array}{c}\sqrt{4x^{2}+3}-2\sqrt{y}=\sqrt{y^{2}+3}-2\sqrt{2x} \\\sqrt{x+1}+ \sqrt{3-x}=2+\sqrt{y+3-x^{2}}\end{array}\right.$

$$\left\{\begin{array}{c}\sqrt{4x^{2}+3}-2\sqrt{y}=\sqrt{y^{2}+3}-2\sqrt{2x} \\\sqrt{x+1}+ \sqrt{3-x}=2+\sqrt{y+3-x^{2}}\end{array}\right. \genfrac{}{}{0pt}{}{(1)}{\left(2\right)} (ĐKXĐ:0\leq x\leq 3, y\geq 0)$$

$$\left(1\right)⇔ \sqrt{4x^{2}+3}-2\sqrt{y}=\sqrt{y^{2}+3}-2\sqrt{2x} $$

$$⇔\sqrt{4x^{2}+3}-\sqrt{y^{2}+3}=2\sqrt{y}-2\sqrt{2x}$$

$$⇔ \frac{4x^{2}+3-y^{2}-3}{\sqrt{4x^{2}+3}+\sqrt{y^{2}+3}}=\frac{4y-8x}{2\sqrt{y}+2\sqrt{2x}}$$

$$⇔\frac{\left(2x-y\right)\left(2x+y\right)}{\sqrt{4x^{2}+3}+\sqrt{y^{2}+3}}=\frac{4(y-2x)}{2\sqrt{y}+2\sqrt{2x}}$$

$⇔(2x-y)\left[\frac{2x+y}{\sqrt{4x^{2}+3}+\sqrt{y^{2}+3}}+\frac{4}{2\sqrt{y}+2\sqrt{2x}}\right]$ = 0

$$⇔\left[\genfrac{}{}{0pt}{}{2x=y}{\frac{2x+y}{\sqrt{4x^{2}+3}+\sqrt{y^{2}+3}}=-\frac{4}{2\sqrt{y}+2\sqrt{2x}} (\*)} \right.$$

Với x $\geq 0, y\geq 0$ thì *VT*\* $\geq 0,$ *VP*\* < 0 nên phương trình (\*) vô nghiệm.

Vậy (1) $⇔y=2x.$ Thay vào (2) ta có: (2) $⇔\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}=2+\sqrt{2x+3-x^{2}}$

Đặt $\left\{\begin{array}{c}a=\sqrt{x+1} \\b=\sqrt{3-x} \end{array} (a\right.\geq 0, b\geq 0)$ => *ab* = $\sqrt{x+1}.\sqrt{3-x}=\sqrt{-x^{2}+2x+3.}$

Khi đó ta có : $\left\{\begin{array}{c}a+b=2+\sqrt{ab} (3)\\a^{2}+b^{2}=4\end{array}\right.$

(3) $⇔ a^{2}+b^{2}+2ab=4+ab+4\sqrt{ab}$

$$⇔4+2ab=4+ab+ 4\sqrt{ab}$$

$$⇔ab-4\sqrt{ab}=0$$

$$⇔\sqrt{ab}\left(\sqrt{ab}-4\right)=0$$

$⇔$ $\left[\genfrac{}{}{0pt}{}{\sqrt{ab}=0 ⇒ab=0 ⇒ \left[\genfrac{}{}{0pt}{}{x=1}{x=3} (TM)\right.}{\sqrt{ab}=4 ⇒ab=16 ⇔\sqrt{2x+3-x^{2}}=16 ⇔2x+3-x^{2}=16^{2} \left(VN\right)}\right.$

$$Với x=1 thì y=2$$

Với x = 3 thì y = 6

Vậy hệ phương trình có 2 nghiệm (1 ; 2) hoặc (3 ; 6).

1. ***Xét hai số thực dương x, y thỏa mãn 6x + y = 2xy. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức P =*** $3x+\frac{2}{x^{2}}+\frac{1}{x}+\frac{42}{y}+(\sqrt{x}+\sqrt{y})^{2}$

Ta có: 6x + y = 2xy $⇒ \frac{1}{x}+\frac{6}{y}=2$

Lại có: 2xy = 6x + y $\geq 2\sqrt{6xy}$

$⇔xy \geq $ $\sqrt{6xy} ⇔ \sqrt{xy}\left(\sqrt{xy}-\sqrt{6}\right)\geq 0 $

$$⇔ \left(\sqrt{xy}-\sqrt{6}\right)\geq 0⇔xy \geq 6$$

Khi đó ta có:

*P* = 3x + $\frac{2}{x^{2}}+\frac{1}{x}+\frac{42}{y}+(\sqrt{x}+\sqrt{y})^{2}$

= 3x + $\frac{2}{x^{2}}+\frac{1}{x}+\frac{42}{y}+x+y+2\sqrt{xy}$

= (2x + 2x + $\frac{2}{x^{2}})+\left(y+ \frac{36}{y}\right)+\left(\frac{1}{x}+\frac{6}{y}\right)+2\sqrt{xy} $

$$\geq 3\sqrt[3]{2x.2x.\frac{2}{x^{2}}}+2\sqrt{y.\frac{36}{y}}+2+2\sqrt{6}$$

$$=3.2+2.6+2+2\sqrt{6}=20+2\sqrt{6}$$

Dấu ‘=’ xảy ra khi và chỉ khi $\left\{\begin{array}{c}2x=\frac{2}{x^{2}}\\y=\frac{36}{y}\\y=6x\end{array}⇔\left\{\begin{array}{c}x^{3}=1\\y^{2}=36 \\y=6x\end{array}\right.\right.⇔\left\{\begin{array}{c}x=1\\y=6\end{array}\right.$

Vậy giá trị nhỏ nhất của *P* là 20 + $2\sqrt{6}$ khi x = 1 và y = 6. Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

https://www.vnteach.com