

ĐÁP ÁN CHÍNH THỨC
MÔN : TOÁN – KHỐI : 11

Câu 1 (4,0 điểm). Cho hai đa thức $P(x) = x^4 - 2x - 1$ và $Q(x) = x^6 + x^4 - 4x^3 - x^2 - 1$.

- a) Chứng minh đa thức $P(x)$ có đúng hai nghiệm thực phân biệt.
b) Gọi hai nghiệm thực phân biệt của $P(x)$ là u và v . Chứng minh uv là một nghiệm của $Q(x)$.

Câu	Nội dung	Điểm
1a	$P'(x) = 4x^3 - 2; P'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}.$	1,0
	Mà $\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = +\infty; \lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = +\infty$ và $P\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right) < 0 \Rightarrow P(x)$ có đúng hai nghiệm thực.	1,0
1b	Dễ thấy $u \neq 0; v \neq 0$ và $u^4 = 2u + 1; v^4 = 2v + 1.$	0,5
	Đặt $\alpha = uv$, ta có $\alpha^3 = \left(\frac{1}{u} + 2\right)\left(\frac{1}{v} + 2\right) = \frac{1}{\alpha} + 2\frac{u+v}{\alpha} + 4 \Rightarrow \alpha(\alpha^3 - 4) = 1 + 2(u+v)$ (*)	0,5
	Lại có $2(u-v) = u^4 - v^4 = (u-v)(u^3 + v^3 + uv(u+v))$ $\Rightarrow 2 = \left(\frac{1}{u} + 2\right) + \left(\frac{1}{v} + 2\right) + uv(u+v) = 4 + \frac{u+v}{\alpha} + \alpha(u+v) = 4 + (u+v)\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)$ $\Rightarrow u+v = \frac{-2\alpha}{\alpha^2 + 1}$	0,5
	Thay vào (*) thu được $\alpha^4 - 4\alpha = 1 - \frac{4\alpha}{\alpha^2 + 1} \Rightarrow \alpha^6 + \alpha^4 - 4\alpha^3 - \alpha^2 - 1 = 0.$ Vậy $\alpha = uv$ là một nghiệm của đa thức $Q(x)$.	0,5

Câu 2 (3,0 điểm). Cho dãy số (x_n) biết rằng $x_1 = 1; x_{n+1} = \frac{1 + \sqrt{1 + x_n^2} - x_n}{1 + \sqrt{1 + x_n^2} + x_n}$ với mọi n nguyên dương. Chứng minh

dãy số (x_n) có giới hạn và tính giới hạn đó.

Cách 1.

Câu	Nội dung	Điểm
2	Từ giả thiết ta thấy $x_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow$ tồn tại $\varphi_n \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ sao cho $x_n = \tan \varphi_n.$	0,5
	Ta có $\tan \varphi_{n+1} = \frac{1 + \frac{1}{\cos \varphi_n} - \tan \varphi_n}{1 + \frac{1}{\cos \varphi_n} + \tan \varphi_n} = \frac{1 + \cos \varphi_n - \sin \varphi_n}{1 + \cos \varphi_n + \sin \varphi_n} = \frac{\cos \frac{\varphi_n}{2} - \sin \frac{\varphi_n}{2}}{\cos \frac{\varphi_n}{2} + \sin \frac{\varphi_n}{2}}$	0,5
	$\Rightarrow \tan \varphi_{n+1} = \cot \left(\frac{\varphi_n}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_n}{2}\right).$	0,5
	Mà $\varphi_n \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_n}{2} \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \varphi_{n+1} = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_n}{2} \forall n \in \mathbb{N}^*.$	0,5

	Khi đó : $\varphi_{n+1} - \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2} \left(\varphi_n - \frac{\pi}{6} \right) \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \varphi_n - \frac{\pi}{6} = \left(\varphi_1 - \frac{\pi}{6} \right) \left(-\frac{1}{2} \right)^{n-1} \forall n \in \mathbb{N}^*.$ Hay $\varphi_n = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{12} \left(-\frac{1}{2} \right)^{n-1} \forall n \in \mathbb{N}^*.$	0,5
	$\lim x_n = \lim \tan \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{12} \left(-\frac{1}{2} \right)^{n-1} \right) = \tan \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$	0,5

Cách 2.

Câu	Nội dung	Điểm
2	Để thấy $x_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}^*.$ Ta có $x_{n+1} = \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{1+x_n^2} + x_n}}{1 + \sqrt{1+x_n^2} + x_n} = \frac{1}{\sqrt{1+x_n^2} + x_n} = \sqrt{1+x_n^2} - x_n \forall n \in \mathbb{N}^*.$	1,0
	$\Rightarrow \left x_{n+1} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right = \left \sqrt{1+x_n^2} - x_n - \frac{1}{\sqrt{3}} \right = \left \frac{(1+x_n^2) - \left(x_n + \frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2}{\sqrt{1+x_n^2} + x_n + \frac{1}{\sqrt{3}}} \right = \frac{2}{\sqrt{3} \left(\sqrt{1+x_n^2} + x_n + \frac{1}{\sqrt{3}} \right)} \cdot \left x_n - \frac{1}{\sqrt{3}} \right $ Mà $\sqrt{3} \left(\sqrt{1+x_n^2} + x_n + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) > \sqrt{3} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = \sqrt{3} + 1 \forall n \in \mathbb{N}^*.$ Nên $\left x_{n+1} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right \leq \frac{2}{1+\sqrt{3}} \left x_n - \frac{1}{\sqrt{3}} \right \forall n \in \mathbb{N}^*.$	1,0
	Do đó $\left x_n - \frac{1}{\sqrt{3}} \right \leq \left(\frac{2}{1+\sqrt{3}} \right)^{n-1} \cdot \left x_1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right \forall n \in \mathbb{N}^*.$ Do $\lim \left(\frac{2}{1+\sqrt{3}} \right)^{n-1} = 0 \Rightarrow \lim \left x_n - \frac{1}{\sqrt{3}} \right = 0 \Rightarrow \lim x_n = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$	1,0

Câu 3 (4,0 điểm). Cho số nguyên dương m ($m \geq 2$). Gọi p là ước nguyên tố của $2^{2^m} + 1$. Giả sử $p = k \cdot 2^n + 1$ với k là số nguyên dương lẻ và n là số nguyên dương.

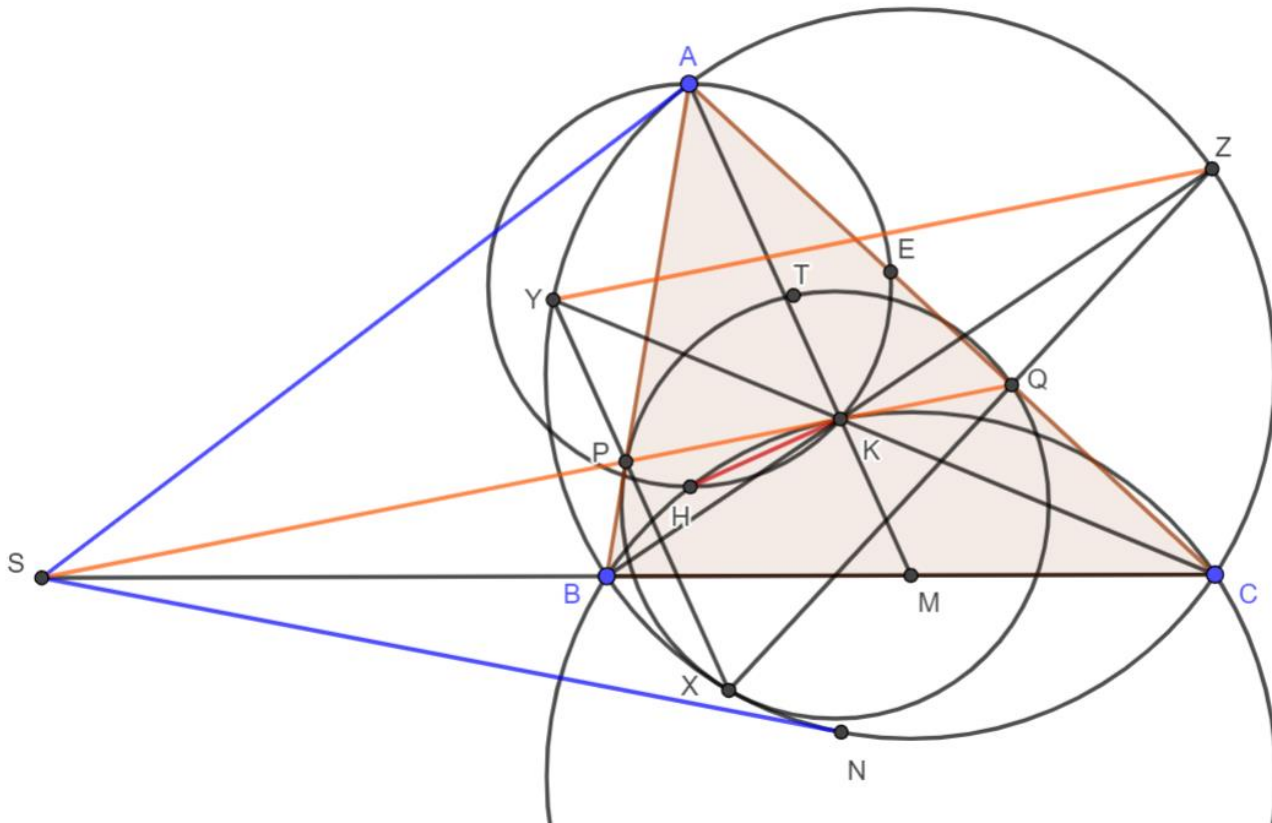
- Chứng minh $n \geq m+1$.
- Chứng minh $k^{2^{n-1}} - 1$ chia hết cho p .

Câu	Nội dung	Điểm
3a	Để thấy p lẻ nên theo định lý Fermat $\Rightarrow p \mid 2^{p-1} - 1 = 2^{k \cdot 2^n} - 1.$	0,5
	Từ giả thiết $p \mid 2^{2^m} + 1 \mid 2^{2^{m+1}} - 1 \Rightarrow p \mid \gcd(2^{2^{m+1}} - 1; 2^{k \cdot 2^n} - 1)$	0,5
	Ta có $\gcd(2^{2^{m+1}} - 1; 2^{k \cdot 2^n} - 1) = 2^{\gcd(2^{m+1}; k \cdot 2^n)} - 1$. Nếu $n \leq m \Rightarrow \gcd(2^{m+1}; k \cdot 2^n) = 2^n \mid 2^m.$	0,5
	Khi đó $p \mid 2^{2^n} - 1 \mid 2^{2^m} - 1$ điều này vô lý do $p \mid 2^{2^m} + 1$. Do đó phải có $n \geq m+1$.	0,5
	Ta có $m \geq 2 \Rightarrow 8 \mid 2^{m+1} \mid 2^n \mid p-1 \Rightarrow p \equiv 1 \pmod{8}$	0,5
	$\Rightarrow \left(\frac{2}{p} \right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}} = 1 \Rightarrow 2^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}.$	0,5

3b	Đặt $d = \text{ord}_p 2 \Rightarrow d \mid \frac{p-1}{2} \Rightarrow 2d \mid p-1$. Tuy nhiên do $2^{2^m} \equiv -1 \pmod{p}$ và $2^{2^{m+1}} \equiv 1 \pmod{p} \Rightarrow d \mid 2^{m+1}$ và $d \nmid 2^m \Rightarrow d = 2^{m+1}$. Đến đây ta thấy $n = v_2(p-1) \geq v_2(2d) = m+2$.	0,5
	$\Rightarrow p \mid 2^{2^{m+1}} - 1 \mid 2^{2^{n-1}} - 1 \Rightarrow 2^{2^{n-1}} \equiv 1 \pmod{p}$. Do đó $1 = (-1)^{2^{n-1}} \equiv (k \cdot 2^n)^{2^{n-1}} = (2^{2^{n-1}})^n \cdot k^{2^{n-1}} \equiv k^{2^{n-1}} \pmod{p}$.	0,5

Câu 4 (5,0 điểm). Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) và có H là trực tâm. Gọi M là trung điểm cạnh BC . Đường tròn ngoại tiếp tam giác HBC cắt đoạn thẳng AM tại K ; tiếp tuyến của (O) tại A cắt đường thẳng BC ở điểm S .

- Chứng minh $MK \cdot MA = MB^2$ và $SA = SK$.
- Đường thẳng SK cắt hai cạnh AB, AC lần lượt tại P, Q . Gọi T là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác APQ . Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác TPQ tiếp xúc với đường tròn (O) .



Câu	Nội dung	Điểm
4a	Về đường cao BE của tam giác ABC . Dễ thấy ME là tiếp tuyến của (AHE) tại E . Gọi K' là giao điểm thứ hai của MA và (AHE) . Ta có $MK' \cdot MA = ME^2$. $\Rightarrow MK' \cdot MA = MB^2 = MC^2$.	0,5
	Hai tam giác MBK', MAB đồng dạng $\Rightarrow MK' \cdot B = MBA$. Hai tam giác MCK', MAC đồng dạng $\Rightarrow MK' \cdot C = MCA$.	1,0
	Khi đó $BK' \cdot C = MBA + MCA = BHC \Rightarrow K' \in (BHC) \Rightarrow K' \equiv K$. Vậy $MK \cdot MA = MB^2$.	

	Hai tam giác MBK', MAB đồng dạng $\Rightarrow \frac{KB}{AB} = \frac{MK}{MB}$. Tương tự $\frac{KC}{AC} = \frac{MK}{MC} \Rightarrow \frac{KB}{AB} = \frac{KC}{AC}$.	0,5
	Gọi N là điểm đối xứng của K qua $BC \Rightarrow N \in (O)$ (do $(HBC); (O)$ đối xứng nhau qua BC). Lại có $\frac{NB}{AB} = \frac{KB}{AB} = \frac{KC}{AC} = \frac{NC}{AC} \Rightarrow (AN, BC) = -1 \Rightarrow SN$ là tiếp tuyến của (O) . Do đó $SA = SN = SK$.	0,5
4b	Đường thẳng CK, BK cắt lại (O) tại Y, Z khác C, B . Do ba điểm P, K, Q thẳng hàng nên hai đường thẳng YP, ZQ cắt nhau tại X thuộc đường tròn (O) .	0,5
	Dễ thấy $SK^2 = SA^2 = SB \cdot SC \Rightarrow SK$ tiếp xúc $(BKC) \Rightarrow SKB = KCB = PXB \Rightarrow KPBX$ nội tiếp. Tương tự $KQCX$ nội tiếp.	0,5
	Lúc này $PXQ = PBK + QCK = ABC + ACB - (KBC + KCB) = 180^\circ - 2BAC$. (Do $KBC + KCB = 180^\circ - BKC = 180^\circ - BHC = BAC$). Mà $PTQ = 2BAC \Rightarrow PTQ + PXQ = 180^\circ \Rightarrow X \in (TPQ)$.	1,0
	Ta có $XPQ = XBK = XYZ \Rightarrow PQ \parallel YZ$. Từ đây suy ra hai đường tròn $(XPQ), (O)$ tiếp xúc nhau tại X . Vậy (TPQ) và (O) tiếp xúc nhau.	0,5

Câu 5 (4,0 điểm). Ban chấp hành Đoàn trường THPT X gồm có n thành viên. Trong năm học, Đoàn trường tổ chức m chương trình, mỗi chương trình có đúng k thành viên trong ban chấp hành tham gia. Mỗi thành viên trong ban chấp hành tham gia ít nhất một chương trình.

- a) Cho $m=8; k=3$. Biết rằng với hai chương trình bất kỳ luôn có đúng một thành viên trong ban chấp hành tham gia cả hai chương trình đó. Chứng minh $n=17$.
- b) Cho $n=25; k=10$. Biết rằng với hai chương trình bất kỳ luôn có không quá 3 thành viên trong ban chấp hành cùng tham gia. Chứng minh $m \leq 6$.

Câu	Nội dung	Điểm
5a	Ta đánh số thứ tự các chương trình là $1, 2, 3, \dots, 8$. Giả sử chương trình 1 có ba thành viên tham gia là A, B, C . Khi đó mỗi chương trình $2, 3, \dots, 8$ có đúng một trong ba thành viên A, B, C tham dự. Theo nguyên lý Dirichlet thì có một trong ba thành viên A, B, C tham gia ít nhất ba trong bảy chương trình $2, 3, \dots, 8$.	0,5
	Không giảm tổng quát giả sử A là thành viên tham gia ba chương trình $2, 3, 4$. Khi đó giả sử các thành viên tham dự chương trình $1, 2, 3, 4$ lần lượt là $(A, B, C), (A, D, E), (A, F, G), (A, H, I)$. Ta chứng minh A có tham dự tất cả chương trình $5, 6, 7, 8$. Thật vậy : giả sử A không tham dự chương trình 5. Khi đó trong các cặp $(B, C), (D, E), (F, G), (H, I)$ mỗi cặp có đúng một thành viên tham dự chương trình 5. Điều này vô lý do chương trình này chỉ có đúng 3 thành viên tham dự.	1,0
	Như vậy A có tham dự đủ tám chương trình và ngoài A thì mỗi chương trình còn có thêm hai thành viên khác $\Rightarrow n = 1 + 2 \cdot 8 = 17$.	0,5
	Gọi S là số bộ $(\{x; y\}; t)$ trong đó $\{x; y\}$ là hai chương trình (không có thứ tự) và t là thành viên tham gia cả hai chương trình. Số cách chọn cặp $\{x; y\}$ là C_m^2 . Do hai chương trình có chung không quá ba thành viên nên với mỗi cặp $\{x; y\}$ có không quá 3 cách chọn thành viên $t \Rightarrow S \leq 3C_m^2 = \frac{3(m^2 - m)}{2}.$	0,5

5b	Ta đếm S bằng cách khác. Với mỗi thành viên $t \in \{1; 2; \dots; 25\}$, ta ký hiệu x_t là số chương trình mà thành viên này tham gia. Do mỗi chương trình có 10 thành viên nên $x_1 + x_2 + \dots + x_{25} = 10m$. Với mỗi thành viên t, số cách chọn cặp $\{x; y\}$ là $C_{x_t}^2 \Rightarrow S = C_{x_1}^2 + C_{x_2}^2 + \dots + C_{x_{25}}^2$	0,5
	$\Rightarrow S = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{25}^2}{2} - \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{25}}{2} \geq \frac{(x_1 + x_2 + \dots + x_{25})^2}{2 \cdot 25} - \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{25}}{2}$ $\Rightarrow S \geq \frac{(10m)^2}{50} - \frac{10m}{2} = 2m^2 - 5m. \text{ Do đó } 2m^2 - 5m \leq \frac{3(m^2 - m)}{2} \Rightarrow m \leq 7.$	0,5
	Giả sử $m = 7 \Rightarrow$ các đẳng thức ở trên phải xảy ra. Khi đó $x_1 = x_2 = \dots = x_{25}$ và do $x_1 + x_2 + \dots + x_{25} = 10m = 70 \Rightarrow x_1 = \frac{70}{25}$ (vô lý). Vậy ta phải có $m \leq 6$.	0,5

-----**HẾT**-----