**1. XÁC ĐỊNH SỐ HẠNG TỔNG QUÁT**

## 1.1. DỰ ĐOÁN SỐ HẠNG TỔNG QUÁT VÀ CHỨNG MINH BẰNG QUY NẠP

## 1.2. DÃY SỐ CHO BỞI CÔNG THỨC TRUY HỒI

**Bài 1.** Cho dãy số  xác định bởi:



Tìm công thức của số hạng tổng quát ?

**Hướng dẫn giải.**

Đặt 

Thay vào giả thiết:



Ta có 

Đặt 



Ta có 

Suy ra



## 1.3. PHƯƠNG TRÌNH ĐẶC TRƯNG

## 1.4. PHƯƠNG PHÁP DÃY SỐ PHỤ

## 1.5. DÃY SỐ SINH BỞI PHƯƠNG TRÌNH

## 1.6. SỬ DỤNG PHÉP THẾ LƯỢNG GIÁC

**Bài 1.** Cho dãy số xác định như sau: 

Tính 

**Hướng dẫn giải**.

Ta có: 

Nên từ giả thiết ta có: 

Đặt , suy ra 

Theo quy nạp ta dễ dàng suy ra: 

Suy ra: 



## 1.7. CÁC DẠNG KHÁC

# **2. MỘT SỐ DẠNG TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN TÍNH CHẤT CỦA DÃY SỐ**

**Bài 1.** Cho dãy số  được xác định như sau:



Chứng minh rằng với mọi số nguyên tố  thì  chia hết cho .

**Hướng dẫn giải.**

Với mọi  ta có: .

Từ đó có: .

Vậy , lại có  nên .

+ Nếu : có ngay đpcm.

+ Nếu  là số nguyên tố lẻ: 



Theo Định lí Fermat nhỏ, suy ra  chia hết cho . Mặt khác cũng chia hết cho  nên:  chia hết cho . Từ đó

chia hết cho .

Vậy bài toán được chứng minh cho mọi trường hợp.

**Bài 2.** Cho dãy số  xác định bởi 

Tìm  để  là số chính phương.

Hướng dẫn giải.

Từ công thức truy hồi của xn ta có



Vậy  là số chính phương

Giả sử n là số thỏa mãn  là số chính phương

Đặt 

Ta có 

Khi đó ta tìm được  thì 

Với  thì 

Vậy *n* = 2 thì  là số chính phương.

**Bài 3.** Cho phương trình  với  là số nguyên dương. Gọi  là nghiệm dương của phương trình. Dãy số  được xác định như sau



Chứng minh rằng tồn tại vô hạn số tự nhiên *n* sao cho  chia hết cho .

**Hướng dẫn giải.**

Đầu tiên ta chứng minh  là số vô tỉ. Thật vậy, nếu  là số hữu tỉ thì  là số nguyên (do hệ số cao nhất của  là 1) và  là ước của 1. Do đó  suy ra , trái giả thiết.

Do đó 





 (1). Lại có , suy ra 

  (do (1)).

Vậy . Từ đó bằng quy nạp ta có với mọi ,  thì  (2)

Chọn , , từ (2) ta có

.

Vậy  chia hết cho , 

**Bài 4.** Cho dãy số  xác định bởi 

Chứng minh rằng  là số chính phương.

**Hướng dẫn giải.**

Ta có



Đặt . Ta được dãy số  xác định bởi 

Ta phải chứng minh  là số chính phương.

Thật vậy, xét dãy số  ) xác định bởi 

Hiển nhiên dãy số  là dãy số nguyên.

Ta có 

Ta sẽ chứng minh  (1) bằng quy nạp.

Thật vậy, rõ ràng với , (1) đúng.

Giả sử (1) đúng đến , tức là 

ta chứng minh (1) đúng với *n* = *k*+2, nghĩa là chứng minh .

Thật vậy, theo công thức truy hồi của dãy số , giả thiết quy nạp, tính chất (2) của dãy số , công thức truy hồi của dãy số , ta có



Do đó  là số chính phương. Vậy ta có điều phải chứng minh.

**Bài 5.** Cho dãy sốđược xác định bởi

 a là số thực

a. Tìm a sao cho dãy số có giới hạn hữu hạn

b. Tìm a sao cho dãy sốlà dãy số tăng (kể từ số hạng nào đó).

**Hướng dẫn giải.**

a. Ta có, trong đó

Khi 

Do đó tồn tại giới hạn hữu hạn khi và chỉ khi 

b. Từ lý luận phần a) ta suy ra



Bởi vậy điều kiện cần để tồn tại sao cho là 

Ta đi chứng minh là điều kiện đủ để có kết luận trên.

Thật vậy: Với 



Vì



Suy ra 

Vậy dãy sốlà dãy số tăng kể từ số hạng nào đó với  và trong trường hợp đó là dãy số tăng từ .

# **3. GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ**

## 3.1. TÍNH GIỚI HẠN BẰNG ĐỊNH NGHĨA

## 3.2. TÍNH GIỚI HẠN BẰNG CÁC CÔNG THỨC CƠ BẢN

**Bài 1.** Cho  và , Tìm .

**Hướng dẫn giải.**

Ta có  và 

Dãy này rõ ràng hội tụ và có giới hạn là

Từ đó suy ra .

## 3.3. TÍNH GIỚI HẠN BẰNG ĐỊNH LÍ KẸP

**Bài 1.** Cho dãy số thực  xác định bởi 

Chứng minh rằng dãy  có giới hạn hữu hạn. Hãy tìm giới hạn đó.

**Hướng dẫn giải.**

+ Ta Có , giả sử . Từ công thức truy hồi ta có:

 vì .

Vậy bằng phương pháp quy nạp ta chứng minh được .

+ Xét hai dãy số mới 

và 

- Có , giả sử ta có , khi đó



Vậy bằng phương pháp quy nạp ta chứng minh được  là dãy số tăng và bị chặn trên bởi 1, nên nó có giới hạn hữu hạn . Chuyển công thức truy hồi qua giới hạn tìm được . Do  nên suy ra .

- Chứng minh tương tự đối với dãy số , ta cũng có .

- Cuối cùng ta chứng minh  **(1)** bằng phương pháp quy nạp:

Ta có  và , với n = 1, 2 bất đẳng thức (1) đúng. Giả sử (1) đúng tới , tức là . Khi đó



+ Từ  và áp dụng định lý kẹp ta suy ra được .

**Bài 2.** Tìm giới hạn: 

**Hướng dẫn giải.**

Trước hết ta chứng minh bất đẳng thức: (\*)  ).

Bằng phương pháp qui nạp. Thật vậy: với , ta có  (đúng).

Giả sử (\*) đúng với  tức là: . Ta đi chứng minh (\*) đúng với

.

Ta có  . 

Bất đẳng thức cuối này đúng vì:



Vậy (\*) đúng với . Do đó , từ đây ta suy ra >

=> . Vì .

Do đó theo định lý về giới hạn kẹp giữa ta suy ra:  = 0.

Vậy =2014

## 3.3. CÁC DẠNG KHÁC

**Bài 1.** Cho dãy số  xác định bởi



Chứng minh rằng dãy số có giới hạn hữu hạn. Tính giới hạn đó.

Hướng dẫn giải.

Theo Côsy thì

 

dãy giảm, bị chặn bởi 1, vậy dãy có giới hạn.

Từ 

**Bài 2.** Cho dãy số , xác định bởi:



Chứng minh rằng dãy số có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

**Hướng dẫn giải.**

Xét hàm số  trên . Ta thấy liên tục và nghịch biến trên  (Vì ). Do đó 

Ta có  với mọi n  dãy  bị chặn

Mặt khác, ta có   .Suy ra dãy  là dãy đơn điệu tăng và bị chặn, còn dãy là dãy đơn điệu giảm và bị chặn, nên các dãy ,  có giới hạn hữu hạn.

Giả sử  và , ().

Từ 



Vậy ta có hệ 

Vậy lim  = 

**Bài 3.** Cho dãy số  được xác định bởi 

với mỗi số nguyên dương n, đặt . Tìm 

**Hướng dẫn giải.**

Ta có kết quả sau: với số thực  bất kì, ta có



Do đó  Suy ra dãy là dãy tăng, giả sử bị chặn trên tức là có giới hạn 

Chuyển qua giới hạn điều kiện (\*) ta có phương trình



phương trình này không có nghiệm hữu hạn lớn hơn 2

Suy ra dãy  tăng và không bị chặn trên nên 

Ta có 







Suy ra 

Vậy 

**Bài 4.** Dãy số thực  được xác định bởi: 

Tìm tất cả các giá trị của a để  với mọi số tự nhiên n.

**Hướng dẫn giải.**

Giả sử  với .

Từ  có 

Lại từ  có 

Suy ra  và 

Từ đó 

Áp dụng liên tiếp bất đẳng thức này, ta có:



Mà  nên phải có 

Thử lại với  thì 

Vậy  là giá trị duy nhất cần tìm.

**Bài 5.** Cho dãy số thực (xn) xác định bởi: 

**Hướng dẫn giải.**

Sử dụng bất đẳng thức 

Xét hàm số .

Ta có:  ⇒ f(x) luôn đồng biến với mọi x > 0

Do đó: . mà  vì 

Vậy ta có  .

Mặt khác: 

Vì  ⇔ .

⇒   do 

⇒  là dãy giảm và bị chặn dưới bởi 0 nên tồn tại giới hạn hữu hạn.

Giả sử  , ta có phương trình:



Xét hàm số 



 .

 . Do đó  luôn đồng biến và liên tục với mọi 

⇒ phương trình  có nghiệm duy nhất  .

Vậy  .

**Bài 6.** Cho hai dãy số dương  xác định bởi:  và



Với mọi . Chứng minh rằng hai dãy trên hội tụ và tìm giới hạn của chúng.

**Hướng dẫn giải.**

Ta chứng minh bằng quy nạp . Thật vậy

Với , ta có , vậy  đúng

Với , ta có , vậy  đúng

Giả sử khẳng định đúng đến , tức là 

Ta chứng minh . Thật vậy. Từ  ta có

Khi đó từ , suy ra 

Như vậy theo nguyên lý quy nạp thì 

Do đó 

Kết luận: .■

**Bài 7.** Cho dãy số xác định như sau:



Tìm điều kiện của  để dãy số  có giới hạn hữu hạn khi  và tính giới hạn đó.

**Hướng dẫn giải.**

Ta có: 

\* Suy ra dãy số  tăng knn; từ đó dãy số  có giới hạn hữu hạn khi và chỉ khi dãy bị chặn trên.

Giả sử , thì chuyển qua giới hạn hệ thức  ta có: 

- Nếu có chỉ số  mà  thì  trái với kết quả 

Do đó:  với mọi  hay 



\* Đảo lại: Nếu 



và 

Bằng quy nạp ta chứng minh được 

Như vậy dãy  tăng knn, bị chặn trên bới , do đó dãy số  có giới hạn hữu hạn.

*Kết luận:* Với điều kiện  thì dãy số  có giới hạn hữu hạn khi  và 

**Bài 8.** Cho dãy số  xác định bởi công thức truy hồi



Chứng minh rằng dãy  có giới hạn hữu hạn và tính giới hạn đó.

**Hướng dẫn giải.**

Đặt . Khi đó



Mặt khác  nên



Từ (\*) và (\*\*) suy ra: 

Vậy:  Do đó  là đơn điệu giảm và bị chặn dưới nên tồn tại 

Vì  liên tục trên  nên 

Vậy dãy  được phân tích thành hai dãy con hội tụ tới cùng một giới hạn. Do đó dãy  có giới hạn bằng 

**Bài 9.** Cho dãy số  xác định 

Tính 

**Hướng dẫn giải.**

Theo giả thiết ta có:  mà  suy ra

 do đó dãy là dãy tăng

Giả sử dãy  bị chặn trên suy ra  với  khi đó



Vô lý do . Suy ra dãy không bị chặn trên do đó



Ta có





**Bài 10.** Cho dãy số thực  xác định bởi: 

Tính 

**Hướng dẫn giải.**

Sử dụng bất đẳng thức 

Xét hàm số .

Ta có:  ⇒ f(x) luôn đồng biến với mọi x > 0

Do đó: . mà  vì 

Vậy ta có 

Mặt khác: 

Vì  . 

⇒    do 

⇒  là dãy giảm và bị chặn dưới bởi  nên tồn tại giới hạn hữu hạn.

Giả sử , ta có phương trình:



Xét hàm số 



.

⇒ . Do đó  luôn đồng biến và liên tục với mọi  ⇒ phương trình  có nghiệm duy nhất .

Vậy .

# **4. GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ**

## 4.1. TÍNH GIỚI HẠN BẰNG ĐỊNH NGHĨA

## 4.2. TÍNH GIỚI HẠN BẰNG CÁC CÔNG THỨC CƠ BẢN

## 4.3. TÍNH GIỚI HẠN BẰNG ĐỊNH LÍ KẸP

## 4.3. TÍNH GIỚI HẠN BẰNG ĐẠO HÀM

## 4.4. CÁC DẠNG KHÁC