



Chương

Bài 4.

TÍCH VÔ HƯỚNG HAI VECTƠ

A

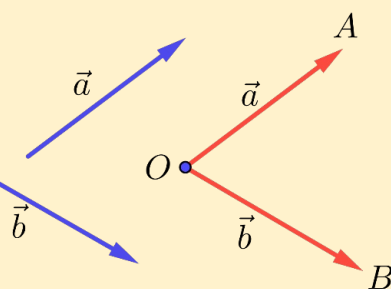
Lý thuyết

1. Góc giữa hai vectơ



Định nghĩa

- » Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác vectơ $\vec{0}$.
- » Từ một điểm O bất kì ta vẽ $\vec{OA} = \vec{a}$ và $\vec{OB} = \vec{b}$.
Góc $\angle AOB$ với số đo từ 0° đến 180° được gọi là góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.
- » Kí hiệu góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là $(\vec{a}, \vec{b})$.
- » Nếu $(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$ thì ta nói rằng $\vec{a}$ và $\vec{b}$ vuông góc với nhau, kí hiệu là $\vec{a} \perp \vec{b}$ hoặc $\vec{b} \perp \vec{a}$.



2. Tích vô hướng hai vectơ



Định nghĩa

- » Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác vectơ $\vec{0}$. Tích vô hướng của $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một số.
- » Kí hiệu là $\vec{a} \cdot \vec{b}$ được xác định bởi công thức $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$.
- » Trường hợp đặc biệt nhất một trong hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng $\vec{0}$ ta quy ước $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Chú ý

Với $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác vectơ $\vec{0}$ ta có $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Khi $\vec{a} = \vec{b}$ thì $\vec{a} \cdot \vec{a}$ được kí hiệu là $\vec{a}^2$ và gọi là bình phương vô hướng của vectơ $\vec{a}$.



3. Tính chất của tích vô hướng



Các tính chất:

Người ta chứng minh được các tính chất sau đây của tích vô hướng:

Với ba vector $\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}$ bất kì và mọi số thực k ta có:

(1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (tính chất giao hoán). (2) $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ (tính chất phân phối)

(3) $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (k\vec{b})$

(4) $\vec{a}^2 \geq 0, \vec{a}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$

(5) $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0 \Leftrightarrow (\vec{a}; \vec{b})$ là góc nhọn.

(6) $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0 \Leftrightarrow (\vec{a}; \vec{b})$ là góc tù.

► **Nhận xét:** Từ các tính chất của tích vô hướng của hai vector ta suy ra:



$$(\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2$$

$$(\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2$$

$$(\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2$$

► **Chú ý:**



$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{1}{2} AB^2 + AC^2 - BC^2$$

$$\vec{BA} \cdot \vec{BC} = \frac{1}{2} BA^2 + BC^2 - AC^2$$

$$\vec{CA} \cdot \vec{CB} = \frac{1}{2} CA^2 + CB^2 - AB^2$$



Các dạng bài tập

Dạng 1. Tính tích vô hướng hai vectơ



Phương

(1) Dựa vào định nghĩa:

Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác vectơ $\vec{0}$. Tích vô hướng của $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một số.

► **Kí hiệu** là $\vec{a} \cdot \vec{b}$ được xác định bởi công thức $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}; \vec{b})$.

» Trường hợp ít nhất một trong hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng $\vec{0}$ ta quy ước $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

(2) Tính chất:

Với ba vectơ $\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}$ bất kì và mọi số thực k ta có:

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (tính chất giao hoán).
2. $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ (tính chất phân phối).
3. $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (k\vec{b})$
4. $\vec{a}^2 \geq 0, \vec{a}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$.

(3) Chú ý:

Với $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác vectơ $\vec{0}$ ta có $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Khi $\vec{a} = \vec{b}$ thì $\vec{a} \cdot \vec{a}$ được kí hiệu là $\vec{a}^2$ và gọi là bình phương vô hướng của vectơ $\vec{a}$.

$$\vec{a}^2 = |\vec{a}| |\vec{a}| \cos 0^\circ = |\vec{a}|^2$$



Ví dụ 1.1.

Cho $\vec{a}, \vec{b}$ với $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 2, (\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$. Tính

(1) $\vec{a} \cdot \vec{b}$

(2) $(\vec{a} + \vec{b})^2 + (\vec{a} - \vec{b})^2$

(3) $(\vec{a} + 2\vec{b})(2\vec{a} - \vec{b})$

Lời giải

(1) $\vec{a} \cdot \vec{b}$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 3 \cdot 2 \cdot \cos 120^\circ = -3$$

(2) $(\vec{a} + \vec{b})^2 + (\vec{a} - \vec{b})^2$

$$\begin{cases} (\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} = 3^2 + 2^2 + 2 \cdot (-3) = 7 \\ (\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} = 3^2 + 2^2 - 2 \cdot (-3) = 19 \end{cases} \Rightarrow 7 + 19 = 26$$

(3) $(\vec{a} + 2\vec{b})(2\vec{a} - \vec{b})$

$$(\vec{a} + 2\vec{b})(2\vec{a} - \vec{b}) = 2\vec{a}^2 - \vec{a} \cdot \vec{b} + 4\vec{a} \cdot \vec{b} - 2\vec{b}^2 = 2 \cdot 3^2 - (-3) + 4 \cdot (-3) - 2 \cdot 2^2 = 1$$



Ví dụ 1.2.

Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB=a$, $\angle C=30^\circ$. Tính các tích vô hướng sau

Lời giải

$$\tan \angle C = \frac{AB}{AC} \Rightarrow AC = \frac{AB}{\tan \angle C} = a\sqrt{3}; BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 2a$$

(1) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$

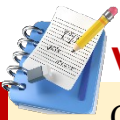
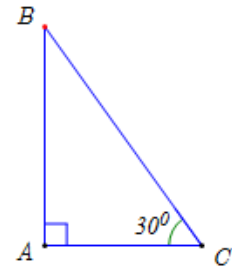
$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = BA \cdot BC \cdot \cos(\angle B) = a \cdot 2a \cdot \cos 60^\circ = a^2$$

(2) $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = CA \cdot CB \cdot \cos(\angle C) = a\sqrt{3} \cdot 2a \cdot \cos 30^\circ = 3a^2$$

(3) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos(\angle A) = a \cdot a\sqrt{3} \cdot \cos 90^\circ = 0$$



Ví dụ 1.3.

Cho tam giác ABC đều cạnh $AB=2a$. Tính các tích vô hướng sau

(1) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$

(2) $2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = 0$

Lời giải

(1) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = AB \cdot BC \cdot \cos(\angle B) = 2a \cdot 2a \cdot \cos 120^\circ = -2a^2$$

(2) $\overrightarrow{BA} \cdot (3\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AB})$

$$\overrightarrow{BA} \cdot (3\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AB}) = 3\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AB}$$

$$= 3BA \cdot AC \cdot \cos(\angle A) - 2AB^2 = 3 \cdot 2a \cdot 2a \cdot \cos 120^\circ + 2 \cdot (2a)^2 = 2a^2$$



▮ Dạng 2. Xác định góc giữa hai vectơ



Phương

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

(1) Tính góc:

(2) Tính độ dài:

$$BC^2 = |\vec{BC}|^2 = (\vec{AC} - \vec{AB})^2$$



Ví dụ 2.1.

Cho $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$. Định góc giữa hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ biết:

(1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$

(2) $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$

(3) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$

(4) $|\vec{a} + 2\vec{b}| = \sqrt{3}; |\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$

👉 Lời giải

(1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = 1 \Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 0^\circ$$

♦ Ta có:

(2) $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = -1 \Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 180^\circ$$

♦ Ta có:

(3) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{\frac{1}{2} |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{1}{2} \Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$$

♦ Ta có:

(4) $|\vec{a} + 2\vec{b}| = \sqrt{3}; |\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$

$$|\vec{a} + 2\vec{b}| = \sqrt{3} \Leftrightarrow |\vec{a} + 2\vec{b}|^2 = 3 \Leftrightarrow |\vec{a}|^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4|\vec{b}|^2 = 3 \Leftrightarrow 1^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4 \cdot 1^2 = 3 \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = -\frac{1}{2}$$

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = -\frac{1}{2} \Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$$

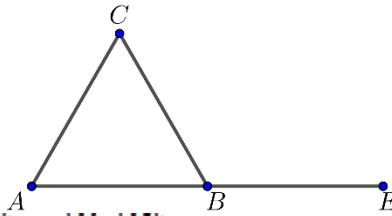
Ta có:



Ví dụ 2.2.

Cho tam giác đều ABC . Tính $P = \cos(\vec{AB}, \vec{BC})$

👉 Lời giải



Vẽ $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB}$. Khi đó
 $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = (\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BC}) = \angle CBE = 180^\circ - \angle CBA = 120^\circ$
 $\rightarrow \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$.



Ví dụ 2.1.

Cho tam giác ABC có $AB=5, BC=7, CA=8$.

- (1) Tính $\cos A, \cos B, \cos C$
- (2) Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB}$
- (3) Tính độ dài đường trung tuyến ứng với cạnh BC của tam giác ABC .

Lời giải

(1) Tính $\cos A, \cos B, \cos C$

$$\begin{cases} \cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} = \frac{1}{2} \\ \cos B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2 \cdot AB \cdot BC} = \frac{1}{7} \\ \cos C = \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2 \cdot AC \cdot BC} = \frac{11}{14} \end{cases}$$

♦ Áp dụng định lý Cosin trong tam giác, ta có:

(2) Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB}$

$$\begin{cases} (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 180^\circ - B \Rightarrow \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = \cos(180^\circ - B) = -\frac{1}{7} \\ (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}) = 180^\circ - C \Rightarrow \cos(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}) = \cos(180^\circ - C) = -\frac{11}{14} \\ (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AB}) = 180^\circ - A \Rightarrow \cos(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AB}) = \cos(180^\circ - A) = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

♦ Ta có

♦ Do đó: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB}$

$$\begin{aligned} &= |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) + |\overrightarrow{BC}| \cdot |\overrightarrow{CA}| \cos(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}) + |\overrightarrow{CA}| \cdot |\overrightarrow{AB}| \cos(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AB}) \\ &= 5 \cdot 7 \cdot \left(-\frac{1}{7}\right) + 7 \cdot 8 \cdot \left(-\frac{11}{14}\right) + 8 \cdot 5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -69 \end{aligned}$$

(3) Tính độ dài đường trung tuyến ứng với cạnh BC của tam giác ABC .

♦ Áp dụng công thức độ dài đường trung tuyến, ta có:

$$m_a^2 = \frac{AB^2 + AC^2}{2} - \frac{BC^2}{4} = \frac{129}{4} \Rightarrow m_a = \frac{\sqrt{129}}{2}$$



Dạng 3. Chứng minh đẳng thức liên quan tích vô hướng



Phương

(1) **Dựa vào định nghĩa:** Tích vô hướng của $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một số.

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}; \vec{b})$$

► **Kí hiệu** là $\vec{a}\vec{b}$ được xác định bởi công thức

(2) **Tính chất:**

Với ba vectơ $\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}$ bất kì và mọi số thực k ta có:

1. $\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}$ (tính chất giao hoán). 2. $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c}$ (tính chất phân phối).

3. $(k\vec{a})\vec{b} = k(\vec{a}\vec{b}) = \vec{a}(k\vec{b})$

4. $\vec{a}^2 \geq 0, \vec{a}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$

(3) **Chú ý:** $\vec{a}^2 = |\vec{a}| |\vec{a}| \cos 0^\circ = |\vec{a}|^2$



Ví dụ 3.1.

Cho tam giác $DABC$, Chứng minh rằng: với điểm M tùy ý ta có:

$$\vec{MA}\vec{BC} + \vec{MB}\vec{CA} + \vec{MC}\vec{AB} = 0$$

Lời giải

♦ Ta có $\vec{MA}\vec{BC} + \vec{MB}\vec{CA} + \vec{MC}\vec{AB}$
 $= \vec{MA}(\vec{MC} - \vec{MB}) + \vec{MB}(\vec{MA} - \vec{MC}) + \vec{MC}(\vec{MB} - \vec{MA})$
 $= \vec{MA}\vec{MC} - \vec{MA}\vec{MB} + \vec{MB}\vec{MA} - \vec{MB}\vec{MC} + \vec{MC}\vec{MB} - \vec{MC}\vec{MA} = 0$



Ví dụ 3.2.

Cho O là trung điểm của AB và M là một điểm tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\vec{MA}\vec{MB} = \vec{OM}^2 - \vec{OA}^2$$

Lời giải

♦ Ta có: $\vec{MA}\vec{MB} = (\vec{OA} - \vec{OM})(\vec{OB} - \vec{OM}) = \vec{OA}\vec{OB} - \vec{OM}(\vec{OA} + \vec{OB}) + \vec{OM}^2$
 $= \vec{OA}\vec{OB} + \vec{OM}^2 = \vec{OM}^2 - \vec{OA}^2$, (do O là trung điểm của đoạn thẳng AB).



Ví dụ 3.3.

Cho I là trung điểm của đoạn thẳng AB và M là điểm tùy ý. Chứng minh rằng:

Lời giải

Đẳng thức cần chứng minh được viết lại là $\vec{MA}\vec{MB} = \vec{IM}^2 - \vec{IA}^2$
 $\vec{MA} = (\vec{MI} + \vec{IA}), \vec{MB} = (\vec{MI} + \vec{IB}) = (\vec{MI} + \vec{IA}), \vec{MB} = (\vec{MI} - \vec{IA})$
 Sử dụng quy tắc ba điểm:



$$\vec{IM} - \vec{IA} = \vec{VP} \text{ (đpcm).}$$



Ví dụ 3.4.

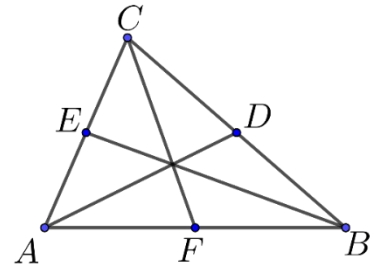
Cho $\triangle ABC$ có 3 trung tuyến AD, BE, CF . Chứng minh rằng:

$$\vec{BC} \cdot \vec{AD} + \vec{CA} \cdot \vec{BE} + \vec{AB} \cdot \vec{CF} = 0$$

Lời giải

♦ Do $\triangle ABC$ có 3 trung tuyến AD, BE, CF nên ta có:

$$\begin{aligned} & \vec{BC} \cdot \vec{AD} + \vec{CA} \cdot \vec{BE} + \vec{AB} \cdot \vec{CF} \\ &= \frac{1}{2} \vec{BC} (\vec{AB} + \vec{AC}) + \frac{1}{2} \vec{CA} (\vec{BA} + \vec{BC}) + \frac{1}{2} \vec{AB} (\vec{CA} + \vec{CB}) \\ &= \frac{1}{2} (\vec{BC} \cdot \vec{AB} + \vec{BC} \cdot \vec{AC} + \vec{CA} \cdot \vec{BA} + \vec{CA} \cdot \vec{BC} + \vec{AB} \cdot \vec{CA} + \vec{AB} \cdot \vec{CB}) \\ &= \frac{1}{2} \vec{AB} (\vec{BC} + \vec{CB}) + \frac{1}{2} \vec{BC} (\vec{AC} + \vec{CA}) + \frac{1}{2} \vec{CA} (\vec{BA} + \vec{AB}) = 0 \end{aligned}$$



Ví dụ 3.5.

Cho nửa đường tròn đường kính AB .

Có AC và BD là hai dây thuộc nửa đường tròn cắt nhau tại E .

$$\vec{AE} \cdot \vec{AC} + \vec{BE} \cdot \vec{BD} = AB^2$$

Lời giải

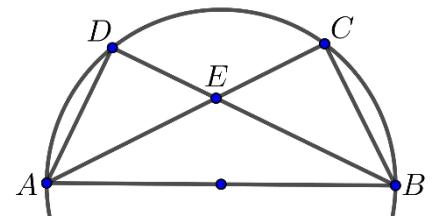
$$\begin{aligned} \text{Ta có } VT &= \vec{AE} \cdot (\vec{AB} + \vec{BC}) + \vec{BE} \cdot (\vec{BA} + \vec{AD}) \\ &= \vec{AE} \cdot \vec{AB} + \vec{AE} \cdot \vec{BC} + \vec{BE} \cdot \vec{BA} + \vec{BE} \cdot \vec{AD} \end{aligned}$$

Vì AB là đường kính nên $\angle ADB = 90^\circ, \angle ACB = 90^\circ$

Suy ra $\vec{AE} \cdot \vec{BC} = 0, \vec{BE} \cdot \vec{AD} = 0$

$$VT = \vec{AE} \cdot \vec{AB} + \vec{BE} \cdot \vec{BA} = \vec{AB} (\vec{AE} + \vec{EB}) = \vec{AB} \cdot \vec{AB} = AB^2$$

Do đó (đpcm).





Dạng 4. Tập hợp điểm



Phương

Loại 1:

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k \quad (1) \quad (A, B \text{ cố định})$$

▫ Với $k=0$: Tập hợp các điểm M là đường tròn đường kính AB

▫ Với $k \neq 0$: Gọi I là trung điểm AB :

$$(1) \Leftrightarrow (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})(\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}) = k \Leftrightarrow \overrightarrow{MI}^2 - \overrightarrow{IA}^2 = k \Leftrightarrow \overrightarrow{MI}^2 = k + \overrightarrow{IA}^2 = \frac{AB^2}{4} + k$$

(1) Nếu $\frac{AB^2}{4} + k > 0 \Leftrightarrow k > -\frac{AB^2}{4}$. Tập hợp các điểm M là đường tròn tâm I ;

$$R = \sqrt{\frac{AB^2}{4} + k}$$

(2) Nếu $\frac{AB^2}{4} + k = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MI} = 0$. Tập hợp các điểm M là một điểm I

(3) Nếu $\frac{AB^2}{4} + k < 0$: Tập hợp các điểm M là $\emptyset$.

Loại 2:

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{v} = k \quad (2) \quad (A \text{ cố định, } \vec{v} \text{ có hướng, độ dài xác định})$$

▫ Với $k=0$: Tập hợp các điểm M là đường thẳng qua A , có giá vuông góc với giá của $\vec{v}$

▫ Với $k \neq 0$: $(2) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM'} \cdot \vec{v} = k$ với $\overrightarrow{AM'}$ là hình chiếu của $\overrightarrow{AM}$ trên giá của $\vec{v} \Rightarrow M'$ cố định.

Tập hợp các điểm M là đường thẳng qua M' , có giá vuông góc với giá của $\vec{v}$.

Loại 3:

$$a\overrightarrow{MA}^2 + b\overrightarrow{MB}^2 = k \quad (3) \quad (A, B \text{ cố định; } a, b \text{ hằng số, } a+b \neq 0)$$

▫ Gọi I thỏa $a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} = \vec{0} \Rightarrow I$ cố định.

$$(3) \Leftrightarrow a(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + b(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 = k$$

$$\Leftrightarrow (a+b)\overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot (a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB}) + a\overrightarrow{IA}^2 + b\overrightarrow{IB}^2 = k \Leftrightarrow (a+b)\overrightarrow{MI}^2 = k - a\overrightarrow{IA}^2 - b\overrightarrow{IB}^2$$

(1) Nếu $\frac{k - a\overrightarrow{IA}^2 - b\overrightarrow{IB}^2}{a+b} > 0$. Tập hợp các điểm M là đường tròn tâm I ;

$$R = \sqrt{\frac{k - a\overrightarrow{IA}^2 - b\overrightarrow{IB}^2}{a+b}}$$



Ví dụ 4.1.

Cho $\triangle ABC$. Tìm tập hợp các điểm M sao cho

$$(1) \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA}$$

$$(2) \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = 0$$

Lời giải

$$(1) \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA}$$



$$\vec{MA} \cdot \vec{AB} = \vec{AB} \cdot \vec{CA} \Leftrightarrow \vec{AB} \cdot (\vec{MA} - \vec{CA}) = 0 \Leftrightarrow \vec{AB} \cdot \vec{MC} = 0$$

Ta có:

Do A, B, C cố định nên tập hợp các điểm M là đường thẳng qua C và vuông góc với đường thẳng AB .

$$(2) \vec{MA} \cdot \vec{MB} + \vec{MA} \cdot \vec{MC} = 0$$

$$\text{Ta có: } \vec{MA} \cdot \vec{MB} + \vec{MA} \cdot \vec{MC} = 0$$

$$\Leftrightarrow \vec{MA} \cdot (\vec{MB} + \vec{MC}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \vec{MA} \cdot 2\vec{MI} = 0 \quad (\text{với } I \text{ là trung điểm } BC)$$

$$\Leftrightarrow \vec{MA} \cdot \vec{MI} = 0 \Leftrightarrow M \in \text{đường tròn đường kính } AI.$$



Ví dụ 4.2.

Cho hai điểm A, B cố định có độ dài bằng a , vector $\vec{a}$ khác $\vec{0}$ và số thực k cho trước. Tìm tập hợp điểm M sao cho

$$(1) \vec{MA} \cdot \vec{MB} = \frac{3a^2}{4}$$

$$(2) \vec{MA} \cdot \vec{MB} = MA^2$$

➤ **Lời giải**

$$(1) \vec{MA} \cdot \vec{MB} = \frac{3a^2}{4}$$

Gọi I là trung điểm của AB

$$\vec{MA} \cdot \vec{MB} = \frac{3a^2}{4}$$

Ta có:

$$\Leftrightarrow (\vec{MI} + \vec{IA})(\vec{MI} + \vec{IB}) = \frac{3a^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow MI^2 - IA^2 = \frac{3a^2}{4} \quad (\text{Do } \vec{IB} = -\vec{IA}) \Leftrightarrow MI^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{3a^2}{4} \Leftrightarrow MI = a$$

Vậy tập hợp điểm M là đường tròn tâm I bán kính $R = a$.

$$(2) \vec{MA} \cdot \vec{MB} = MA^2$$

$$\vec{MA} \cdot \vec{MB} = MA^2 \Leftrightarrow \vec{MA} \cdot \vec{MB} = \vec{MA} \cdot \vec{MA} \Leftrightarrow \vec{MA} \cdot (\vec{MB} - \vec{MA}) = 0 \Leftrightarrow \vec{MA} \cdot \vec{BA} = 0 \Leftrightarrow \vec{MA} \perp \vec{BA}$$

Vậy tập hợp điểm M là đường thẳng vuông góc với đường thẳng AB tại A .



Ví dụ 4.3.

Cho hình vuông $ABCD$ tâm O .

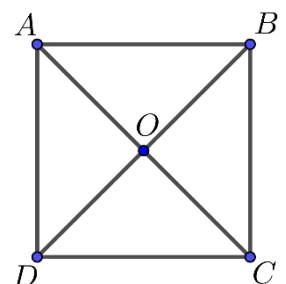
Tìm tập hợp các điểm M thỏa mãn $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MD^2$.

➤ **Lời giải**

$$\text{Ta có } MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MD^2$$

$$\Leftrightarrow (\vec{MO} + \vec{OA})^2 + (\vec{MO} + \vec{OB})^2 + (\vec{MO} + \vec{OC})^2 = 3(\vec{MO} + \vec{OD})^2$$

$$\Leftrightarrow \vec{MO} \cdot (\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} - 3\vec{OD}) = 0 \Leftrightarrow \vec{MO} \cdot (\vec{DA} + \vec{DB} + \vec{DC}) = 0$$





$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{DB} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MO} = \vec{0} \\ \overrightarrow{MO} \perp \overrightarrow{BD} \end{cases}$$

Vậy tập hợp điểm M là đường thẳng AC .



▮ Dạng 5. Chứng minh vuông góc dùng tích vô hướng



Phương

- (1) **Dựa vào định nghĩa:** Tích vô hướng của $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một số.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\widehat{a; b})$$

- **Kí hiệu** là $\vec{a} \cdot \vec{b}$ được xác định bởi công thức

- (2) **Tính chất:**

Với ba vector $\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}$ bất kì và mọi số thực k ta có:

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (tính chất giao hoán).

2. $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ (tính chất phân phối).

3. $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (k\vec{b})$

4. $\vec{a}^2 \geq 0, \vec{a}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$

(a) $\vec{a}^2 = |\vec{a}| |\vec{a}| \cos 0^\circ = |\vec{a}|^2$

$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$



Ví dụ 5.1.

Cho $\vec{a} \perp \vec{b}, |\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = \sqrt{2}$. Biết $\vec{u} = 2\vec{a} - \vec{b}; \vec{v} = \vec{a} + \vec{b}$. Chứng minh rằng:
 $\vec{u} \perp \vec{v}$.

👉 Lời giải

♦ Ta có $\vec{u} \cdot \vec{v} = (2\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = 2\vec{a}^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b}^2$

$$\begin{cases} \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 = 1 \\ \vec{b}^2 = |\vec{b}|^2 = 2 \\ \vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 2\vec{a}^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b}^2 = 2 + 0 - 2 = 0 \Rightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$$

♦ Với



Ví dụ 5.2.

Cho tứ giác $ABCD$. Chứng minh rằng:

$$AC \perp BD \Leftrightarrow AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2.$$

👉 Lời giải

$$\begin{aligned} AB^2 + CD^2 &= \overline{AB}^2 + \overline{CD}^2 \\ &= (\overline{AD} + \overline{DB})^2 + (\overline{CB} + \overline{BD})^2 \\ &= AD^2 + 2\overline{DB} \cdot \overline{AD} + \overline{DB}^2 + BC^2 + 2\overline{BD} \cdot \overline{CB} + \overline{BD}^2 \\ &= BC^2 + AD^2 + 2\overline{DB} \cdot (\overline{DB} + \overline{AD} - \overline{CB}) \\ &= BC^2 + AD^2 + 2\overline{AC} \cdot \overline{BD}. \end{aligned}$$

Do đó $AC \perp BD \Leftrightarrow AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2$.



Ví dụ 5.3.

Cho tam giác đều ABC cạnh $3a$. Lấy các điểm M, N, P lần lượt trên các cạnh BC, CA, AB sao cho $BM = a$, $CN = 2a$, $AP = x$, $0 < x < 3a$. Xác định x để AM và PN vuông góc với nhau.

Lời giải

$$\begin{cases} BM = a \Rightarrow \vec{BM} = \frac{1}{3}\vec{BC} = \frac{1}{3}(\vec{AC} - \vec{AB}) \\ CN = 2a \Rightarrow \vec{AN} = \frac{1}{3}\vec{AC} \\ AP = x \Rightarrow \vec{AP} = \frac{x}{3a}\vec{AB} \end{cases}$$

♦ Ta có

$$\begin{cases} \vec{AM} = \vec{AB} + \vec{BM} = \vec{AB} + \frac{1}{3}(\vec{AC} - \vec{AB}) = \frac{2}{3}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AC} \\ \vec{PN} = \vec{AN} - \vec{AP} = \frac{1}{3}\vec{AC} - \frac{x}{3a}\vec{AB} \end{cases}$$

♦ Do đó

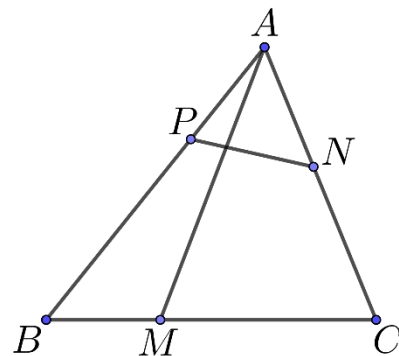
♦ AM và PN vuông góc với nhau $\Leftrightarrow \vec{AM} \cdot \vec{PN} = 0$.

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AC} \right) \cdot \left(\frac{1}{3}\vec{AC} - \frac{x}{3a}\vec{AB} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{9}\vec{AB} \cdot \vec{AC} + \frac{1}{9}AC^2 - \frac{x}{9a}\vec{AB} \cdot \vec{AC} - \frac{2x}{9a}AB^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{9}.9a^2 - \frac{2x}{9a}.9a^2 + \left(\frac{2}{9} - \frac{x}{9a} \right).3a.3a.\cos 60^\circ = 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 2ax + (2a - x)a \cdot \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow 2a^2 - 4ax + 2a^2 - ax = 0 \Leftrightarrow 4a^2 = 5ax \Leftrightarrow x = \frac{4}{5}a$$





Luyện tập

A. Câu hỏi - Trả lời trắc nghiệm

» Câu 1. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác vectơ $\vec{0}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$

B. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}; \vec{b})$

C. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a} \cdot \vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}; \vec{b})$

D. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\vec{a}; \vec{b})$

👉 **Lời giải**

Chọn B

Theo định nghĩa tích vô hướng của hai vectơ.

» Câu 2. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng $4a$. Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{AB}$ và $\vec{AC}$ là

A. $8a^2$

B. $8a$

C. $8\sqrt{3}a^2$

D. $8\sqrt{3}a$

👉 **Lời giải**

Chọn A

Ta có $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = |\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}| \cos(\vec{AB}, \vec{AC}) = 4a \cdot 4a \cdot \cos 60^\circ = 4a \cdot 4a \cdot \frac{1}{2} = 8a^2$

» Câu 3. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh a . Tính $\vec{AB} \cdot \vec{AD}$.

A. $\vec{AB} \cdot \vec{AD} = 0$

B. $\vec{AB} \cdot \vec{AD} = a$

C. $\vec{AB} \cdot \vec{AD} = \frac{a^2}{2}$

D. $\vec{AB} \cdot \vec{AD} = a^2$

👉 **Lời giải**

Chọn A

Vì $ABCD$ là hình vuông nên $AB \perp AD$ do đó $\vec{AB} \cdot \vec{AD} = 0$.

» Câu 4. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Đẳng thức nào sau đây **sai**?

A. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}; \vec{b})$

B. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} (|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2)$

C. $|\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 = |\vec{a} \cdot \vec{b}|^2$

D. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} (|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2)$

👉 **Lời giải**

Chọn C

$|\vec{a} \cdot \vec{b}|^2 = [|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}; \vec{b})]^2 = |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 \cdot \cos^2(\vec{a}; \vec{b})$ nên C sai.

» Câu 5. Cho tam giác ABC có $\hat{A} = 90^\circ$, $\hat{B} = 60^\circ$ và $AB = a$. Khi đó $\vec{AC} \cdot \vec{CB}$ bằng

A. $-2a^2$

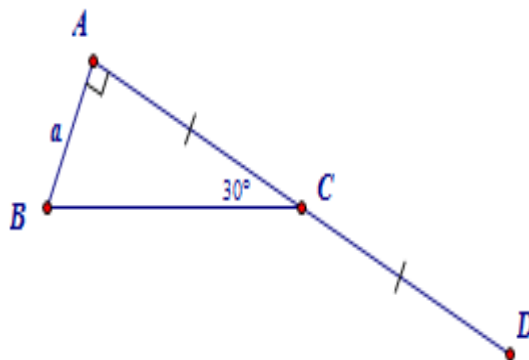
B. $2a^2$

C. $3a^2$

D. $-3a^2$

👉 **Lời giải**

Chọn D



Gọi D là điểm đối xứng với A qua C .

$$\text{Khi đó: } \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CB} \cdot \cos 150^\circ = a\sqrt{3} \cdot 2a \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -3a^2$$

» Câu 6. Cho tam giác ABC đều cạnh bằng a . Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$.

A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. B. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{a^2}{2}$. D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -\frac{a^2}{2}$.

👉 **Lời giải**

Chọn D

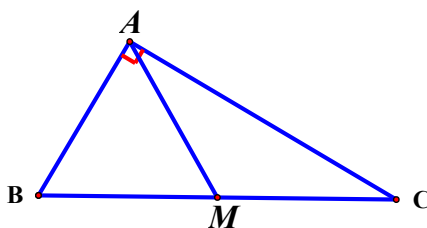
$$\text{Ta có } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{BC}| \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = aa \cos 120^\circ = -\frac{a^2}{2}.$$

» Câu 7. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = a, AC = a\sqrt{3}$ và AM là trung tuyến. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AM}$

A. $\frac{a^2}{2}$. B. a^2 . C. $-a^2$. D. $-\frac{a^2}{2}$.

👉 **Lời giải**

Chọn D



Ta có tam giác ABC vuông tại A và có AM là trung tuyến nên $AM = \frac{BC}{2}$.

$$AM = \frac{BC}{2} = \frac{\sqrt{AB^2 + AC^2}}{2} = \frac{\sqrt{a^2 + 3a^2}}{2} = a$$

Tam giác AMB có $AB = BM = AM = a$ nên là tam giác đều. Suy ra góc $\angle MAB = 60^\circ$.

$$\text{Ta có } \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = -|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AM}| \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) = -aa \cos 60^\circ = -\frac{a^2}{2}.$$



» **Câu 8.** Cho hình bình hành $ABCD$, với $AB=2$, $AD=1$, $\angle BAD=60^\circ$. Tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ bằng

A. -1 .

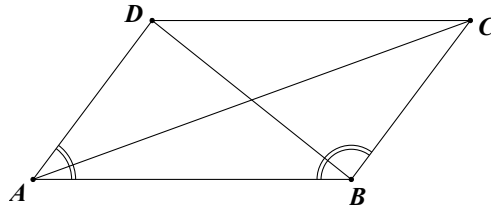
B. 1 .

C. $-\frac{1}{2}$.

D. $\frac{1}{2}$.

👉 **Lời giải**

Chọn B



$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = AB \cdot AD \cdot \cos \angle BAD = 2 \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ = 1$$

» **Câu 9.** Cho hình bình hành $ABCD$, với $AB=2$, $AD=1$, $\angle BAD=60^\circ$. Tích vô hướng $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ bằng

A. -1 .

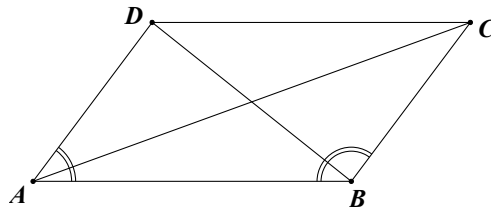
B. $\frac{1}{2}$

C. -1 .

D. $-\frac{1}{2}$.

👉 **Lời giải**

Chọn D



Theo giả thiết: $\angle BAD = 60^\circ \Rightarrow \angle ABC = 120^\circ$.

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cdot \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = AB \cdot BC \cdot \cos \angle ABC = 2 \cdot 1 \cdot \cos 120^\circ = -1$$

» **Câu 10.** Cho hình bình hành $ABCD$, với $AB=2$, $AD=1$, $\angle BAD=60^\circ$. Độ dài đường chéo AC bằng

A. $\sqrt{5}$.

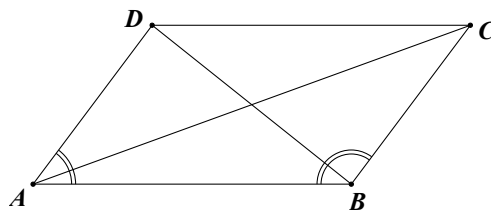
B. $\sqrt{7}$.

C. 5 .

D. $\frac{7}{2}$.

👉 **Lời giải**

Chọn B



Ta có:

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \Rightarrow AC^2 = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} \Leftrightarrow AC^2 = 2^2 + 1^2 + 2 \cdot 1 \Rightarrow AC = \sqrt{7}$$

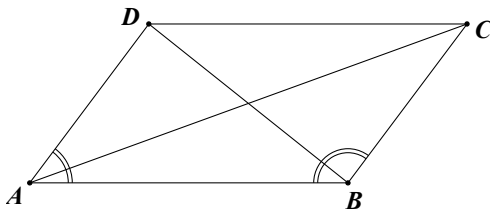


» Câu 11. Cho hình bình hành $ABCD$, với $AB=2$, $AD=1$, $\widehat{BAD}=60^\circ$. Độ dài đường chéo BD bằng

- A. $\sqrt{3}$. B. $\sqrt{5}$. C. 5. D. 3.

👉 **Lời giải**

Chọn A



$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{BD}^2 = \overrightarrow{BA}^2 + \overrightarrow{BC}^2 + 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow BD^2 = 2^2 + 1^2 + 2 \cdot (-1)$$

$$\Rightarrow BD = \sqrt{3}.$$

» Câu 12. Cho các véc tơ $\vec{a}; \vec{b}$ và $\vec{c}$ thỏa mãn các điều kiện $|\vec{a}|=x$, $|\vec{b}|=y$ và $|\vec{c}|=z$ và $\vec{a} + \vec{b} + 3\vec{c} = \vec{0}$. Tính $A = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}$.

- A. $A = \frac{3x^2 - z^2 + y^2}{2}$. B. $A = \frac{3z^2 - x^2 - y^2}{2}$. C. $A = \frac{3y^2 - x^2 - z^2}{2}$. D. $A = \frac{3z^2 + x^2 + y^2}{2}$.

👉 **Lời giải**

Chọn B

$$\vec{a} + \vec{b} + 3\vec{c} = \vec{0} \Rightarrow \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = -2\vec{c}$$

$$\Rightarrow \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 + 2A = 4\vec{c}^2$$

$$\Rightarrow (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})^2 = (-2\vec{c})^2$$

Sử dụng tính chất bình phương vô hướng bằng bình phương độ dài ta có:

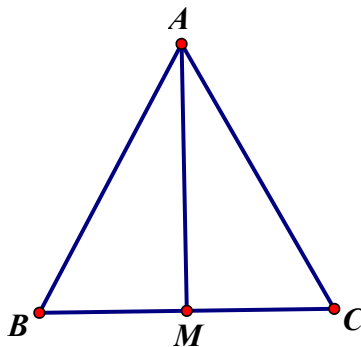
$$x^2 + y^2 + z^2 + 2A = 4z^2 \Rightarrow A = \frac{3z^2 - x^2 - y^2}{2}.$$

» Câu 13. Cho $\triangle ABC$ đều; $AB=6$ và M là trung điểm của BC . Tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MA}$ bằng

- A. -18. B. 27. C. 18. D. -27.

👉 **Lời giải**

Chọn D



Ta có $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) = \widehat{BAM} = 30^\circ$.



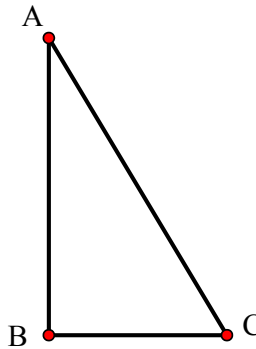
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MA} = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = -|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AM}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) = -6 \cdot \frac{6\sqrt{3}}{2} \cdot \cos 30^\circ = -27$$

» Câu 14. Cho tam giác ABC vuông tại B , $BC = a\sqrt{3}$. Tính $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB}$.

- A. $3a^2$. B. $-\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. D. $-3a^2$.

👉 **Lời giải**

Chọn D



Ta có
$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = |\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{CB}| \cdot \cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = -AC \cdot CB \cdot \cos \angle ACB = -AC \cdot CB \cdot \frac{CB}{AC} = -BC^2 = -3a^2$$

» Câu 15. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Biết $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = \sqrt{3}$ và $(\vec{a}, \vec{b}) = 30^\circ$. Tính $|\vec{a} + \vec{b}|$.

- A. $\sqrt{11}$. B. $\sqrt{13}$. C. $\sqrt{12}$. D. $\sqrt{14}$.

👉 **Lời giải**

Chọn B

Ta có:
$$(\vec{a} + \vec{b})^2 = a^2 + b^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} = a^2 + b^2 + 2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$$

$$\Rightarrow (\vec{a} + \vec{b})^2 = 4 + 3 + 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \cos 30^\circ = 13 \Rightarrow |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{13}$$

» Câu 16. Cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và D ; $AB = AD = a, CD = 2a$. Khi đó tích vô hướng $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$ bằng

- A. $-a^2$. B. 0 . C. $\frac{3a^2}{2}$. D. $-\frac{a^2}{2}$.

👉 **Lời giải**

Chọn A

Ta có:
$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}) \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) = AD^2 - 2AB^2 - \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}$$

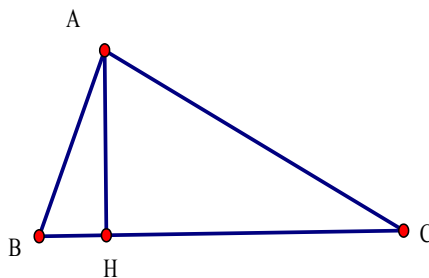
$$= AD^2 - 2AB^2 = -a^2$$

» Câu 17. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = a, BC = 2a$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$.

- A. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = a^2$. B. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{a^2}{2}$. C. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 2a^2$. D. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

👉 **Lời giải**

Chọn A



Vẽ $AH \perp BC, H \in BC$.

Có $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{BC} = BA^2 = a^2$.

- » Câu 18. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB=4$. Kết quả $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ bằng
A. 16. **B.** 0. **C.** $4\sqrt{2}$. **D.** 4.

👉 **Lời giải**

Chọn A

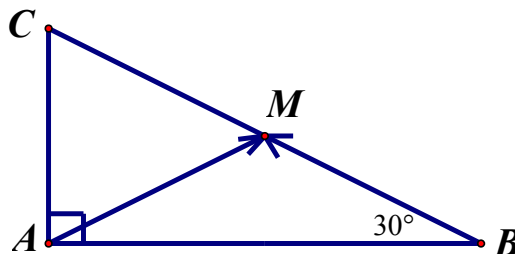
Vì $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \angle ABC$ nên $\cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \cos \angle ABC = \frac{AB}{BC} = \frac{4}{BC}$.

Do đó $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cdot \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = AB \cdot BC \cdot \frac{4}{BC} = 4 \cdot 4 = 16$

- » Câu 19. Cho tam giác ABC vuông tại A có $\angle B=30^\circ, AC=2$. Gọi M là trung điểm của BC . Tính giá trị của biểu thức $P = \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM}$.
A. $P = -2$. **B.** $P = 2\sqrt{3}$. **C.** $P = 2$. **D.** $P = -2\sqrt{3}$.

👉 **Lời giải**

Chọn A



Ta có: $P = \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}) \cdot \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{BM}$

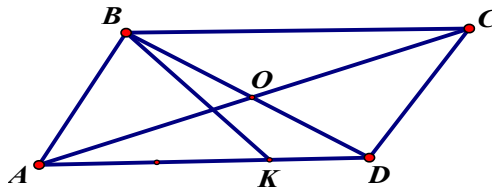
$BC = \frac{AC}{\sin 30^\circ} = 4; AB = AC \cdot \cot 30^\circ = 2\sqrt{3}; BM = 2$

$\Rightarrow \overrightarrow{BM}^2 = 4; \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BM} = 2\sqrt{3} \cdot 2 \cdot \cos 150^\circ = -6 \Rightarrow P = -2$

- » Câu 20. Cho hình bình hành $ABCD$ có $AB=2a, AD=3a, \angle BAD=60^\circ$. Điểm K thuộc AD thỏa mãn $\overrightarrow{AK} = -2\overrightarrow{DK}$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC}$
A. $3a^2$. **B.** $6a^2$. **C.** 0. **D.** a^2 .

👉 **Lời giải**

Chọn D



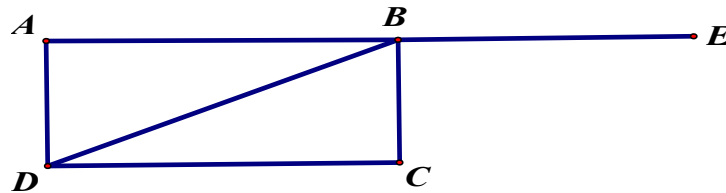
Ta có $\vec{BK} = -\vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{AD}$; $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD}$
 Khi đó $\vec{BK} \cdot \vec{AC} = (-\vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{AD})(\vec{AB} + \vec{AD}) = -\vec{AB}^2 + \frac{2}{3}\vec{AD}^2 - \frac{1}{3}\vec{AB} \cdot \vec{AD}$
 $\vec{BK} \cdot \vec{AC} = -4a^2 + \frac{2}{3} \cdot 9a^2 - \frac{1}{3} \cdot 2a \cdot 3a \cdot \cos 60^\circ = a^2$

» Câu 21. Cho hình chữ nhật ABCD có $AB=8, AD=5$. Tích $\vec{AB} \cdot \vec{BD}$

- A. $\vec{AB} \cdot \vec{BD} = 62$. B. $\vec{AB} \cdot \vec{BD} = -64$. C. $\vec{AB} \cdot \vec{BD} = -62$. D. $\vec{AB} \cdot \vec{BD} = 64$.

👉 Lời giải

Chọn B



Giả sử E là điểm đối xứng với A qua B ta có $\vec{AB} = \vec{BE}$

Xét $\triangle ABD$ có $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{89}$

Xét $\triangle ABD$ có $\cos \angle ABD = \frac{AB}{BD} = \frac{8}{\sqrt{89}}$ suy ra $\cos(\vec{AB}; \vec{BD}) = \cos \angle DBE = -\cos \angle ABD = -\frac{8}{\sqrt{89}}$

$$\vec{AB} \cdot \vec{BD} = |\vec{AB}| \cdot |\vec{BD}| \cdot \cos(\vec{AB}; \vec{BD}) = 8 \cdot \sqrt{89} \cdot \left(-\frac{8}{\sqrt{89}}\right) = -64$$

Ta có

» Câu 22. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác $\vec{0}$. Xác định góc α giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ biết $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

- A. $\alpha = 90^\circ$. B. $\alpha = 0^\circ$. C. $\alpha = 45^\circ$. D. $\alpha = 180^\circ$.

👉 Lời giải

Chọn D

Ta có: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha$. Mà $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ nên $\cos \alpha = -1$. Suy ra, $\alpha = 180^\circ$.

» Câu 23. Cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ khác vectơ-không thỏa mãn $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$. Khi đó góc giữa hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ bằng:

- A. $(\vec{a}; \vec{b}) = 45^\circ$. B. $(\vec{a}; \vec{b}) = 0^\circ$. C. $(\vec{a}; \vec{b}) = 180^\circ$. D. $(\vec{a}; \vec{b}) = 90^\circ$.

👉 Lời giải

Chọn C



Ta có:
$$\begin{cases} \vec{a}\vec{b} = -|\vec{a}||\vec{b}| \\ \vec{a}\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a}, \vec{b}) \end{cases} \Rightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) = -1 \Leftrightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 180^\circ$$

» **Câu 24.** Cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ thỏa mãn: $|\vec{a}|=4; |\vec{b}|=3; |\vec{a}-\vec{b}|=4$. Gọi α là góc giữa hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$. Chọn phát biểu **đúng**.

- A. $\alpha = 60^\circ$. B. $\alpha = 30^\circ$. C. $\cos \alpha = \frac{1}{3}$. D. $\cos \alpha = \frac{3}{8}$.

👉 **Lời giải**

Chọn D

Ta có

$$|\vec{a}-\vec{b}|=4 \Leftrightarrow (\vec{a}-\vec{b})^2=16 \Leftrightarrow \vec{a}^2-2\vec{a}\vec{b}+\vec{b}^2=16 \Leftrightarrow 4^2-2.4.3.\cos \alpha+3^2=16 \Leftrightarrow \cos \alpha=\frac{3}{8}$$

» **Câu 25.** Cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ khác vectơ $\vec{0}$ thỏa mãn $\vec{a}\vec{b}=\frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|$. Khi đó góc giữa hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ là

- A. 60° . B. 120° . C. 150° . D. 30° .

👉 **Lời giải**

Chọn A

Ta có $|\vec{a}|=|\vec{b}|$.

Vậy $\vec{a}\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a}, \vec{b})=\frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}| \Rightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b})=\frac{1}{2} \Rightarrow (\vec{a}, \vec{b})=60^\circ$

» **Câu 26.** Cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ sao cho $|\vec{a}|=\sqrt{2}, |\vec{b}|=2$ và hai vectơ $\vec{x}=\vec{a}+\vec{b}, \vec{y}=2\vec{a}-\vec{b}$ vuông góc với nhau. Tính góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

- A. 120° . B. 60° . C. 90° . D. 30° .

👉 **Lời giải**

Chọn C

Vì hai vectơ $\vec{x}=\vec{a}+\vec{b}, \vec{y}=2\vec{a}-\vec{b}$ vuông góc với nhau nên

$$\begin{aligned} (\vec{a}+\vec{b}).(2\vec{a}-\vec{b}) &= 0 \Leftrightarrow 2\vec{a}^2-\vec{b}^2+\vec{a}\vec{b}=0 \Leftrightarrow 2|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2+|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a}, \vec{b})=0 \\ &\Leftrightarrow 2.(\sqrt{2})^2-2^2+\sqrt{2}.2.\cos(\vec{a}, \vec{b})=0 \Leftrightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b})=0 \Leftrightarrow (\vec{a}, \vec{b})=90^\circ \end{aligned}$$

» **Câu 27.** Cho hai điểm B, C phân biệt. Tập hợp những điểm M thỏa mãn $\vec{CM}.\vec{CB}=\vec{CM}^2$ là:

- A. Đường tròn đường kính BC . B. Đường tròn $(B; BC)$.
C. Đường tròn $(C; CB)$. D. Một đường khác.

👉 **Lời giải**

Chọn A

$$\vec{CM}.\vec{CB}=\vec{CM}^2 \Leftrightarrow \vec{CM}.\vec{CB}-\vec{CM}^2=0 \Leftrightarrow \vec{CM}.\vec{MB}=0.$$

Tập hợp điểm M là đường tròn đường kính BC .



- » **Câu 28.** Cho ba điểm A, B, C phân biệt. Tập hợp những điểm M mà $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$ là :
- A.** Đường tròn đường kính AB .
 - B.** Đường thẳng đi qua A và vuông góc với BC .
 - C.** Đường thẳng đi qua B và vuông góc với AC .
 - D.** Đường thẳng đi qua C và vuông góc với AB .

👉 **Lời giải**

Chọn B

$$\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{CM} - \overrightarrow{CA}) \cdot \overrightarrow{CB} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CB} = 0$$

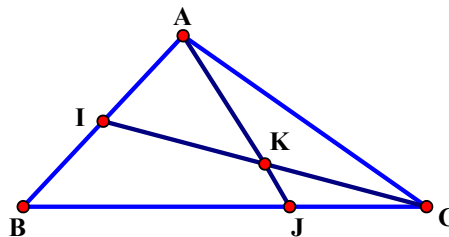
Tập hợp điểm M là đường thẳng đi qua A và vuông góc với BC .

- » **Câu 29.** Cho tam giác ABC , điểm J thỏa mãn $\overrightarrow{AK} = 3\overrightarrow{KJ}$, I là trung điểm của cạnh AB , điểm K thỏa mãn $\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + 2\overrightarrow{KC} = 0$. Một điểm M thay đổi nhưng luôn thỏa mãn $(3\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{AK}) \cdot (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}) = 0$. Tập hợp điểm M là đường nào trong các đường sau.

- A.** Đường tròn đường kính IJ .
- B.** Đường tròn đường kính IK .
- C.** Đường tròn đường kính JK .
- D.** Đường trung trực đoạn JK .

👉 **Lời giải**

Chọn C



Ta có: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = 4\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + 2\overrightarrow{KC} = 4\overrightarrow{MK}$.

Lấy điểm J thỏa mãn $\overrightarrow{AK} = 3\overrightarrow{KJ}$. Ta có $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB}}{4} + \frac{\overrightarrow{AC}}{2}$, mà $\overrightarrow{AK} = 3\overrightarrow{KJ}$
 $\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{KJ} = \overrightarrow{AK} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AK} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$
 nên

Lại có $\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{AJ} - \overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.

Suy ra J là điểm cố định nằm trên đoạn thẳng BC xác định bởi hệ thức $\overrightarrow{BJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$

Ta có $3\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{AK} = 3\overrightarrow{MK} + 3\overrightarrow{KJ} = 3\overrightarrow{MJ}$.

Như vậy $(3\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{AK}) \cdot (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}) = 0 \Leftrightarrow (3\overrightarrow{MJ}) \cdot (4\overrightarrow{MK}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MJ} \cdot \overrightarrow{MK} = 0$.

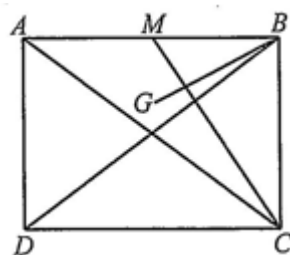
Từ đó suy ra điểm M thuộc đường tròn đường kính JK .

Vì J, K là các điểm cố định nên điểm M luôn thuộc một đường tròn đường kính JK là đường tròn cố định.

B. Câu hỏi - Trả lời đúng/sai



» **Câu 30.** Cho hình chữ nhật $ABCD$, $AB = 4a$, $AD = 3a$. Gọi M là trung điểm của AB , G là trọng tâm tam giác ACM



	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$\vec{CM} = \frac{1}{2}\vec{BA} - 3\vec{BC}$		
(b)	$\vec{BG} = \frac{3}{2}\vec{BA} + \frac{1}{3}\vec{BC}$		
(c)	$\vec{BC} \cdot \vec{BA} = 0$		
(d)	$\vec{BG} \cdot \vec{CM} = -a^2$		

» **Lời giải**

(a) $\vec{CM} = \frac{1}{2}\vec{BA} - 3\vec{BC}$

$$\vec{CM} = \vec{BM} - \vec{BC} = \frac{1}{2}\vec{BA} - \vec{BC}$$

Ta có:

» **Chọn SAI.**

(b) $\vec{BG} = \frac{3}{2}\vec{BA} + \frac{1}{3}\vec{BC}$

Vì G là trọng tâm của tam giác ACM nên

$$3\vec{BG} = \vec{BA} + \vec{BM} + \vec{BC} = \vec{BA} + \frac{1}{2}\vec{BA} + \vec{BC} = \frac{3}{2}\vec{BA} + \vec{BC} \Rightarrow \vec{BG} = \frac{1}{2}\vec{BA} + \frac{1}{3}\vec{BC}$$

» **Chọn SAI.**

(c) $\vec{BC} \cdot \vec{BA} = 0$

Vì $ABCD$ là hình chữ nhật nên $\vec{BC} = \vec{AD} = 3a$, $\vec{BC} \cdot \vec{BA} = 0$.

» **Chọn ĐÚNG.**

(d) $\vec{BG} \cdot \vec{CM} = -a^2$

$$\vec{BG} \cdot \vec{CM} = \left(\frac{1}{2}\vec{BA} + \frac{1}{3}\vec{BC} \right) \cdot \left(\frac{1}{2}\vec{BA} - \vec{BC} \right)$$

Ta có:

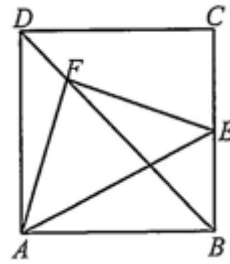
$$= \frac{1}{4}\vec{BA}^2 - \frac{1}{3}\vec{BA} \cdot \vec{BC} - \frac{1}{3}\vec{BC}^2 = \frac{1}{4}(4a)^2 - \frac{1}{3} \cdot 4a \cdot 3a - \frac{1}{3}(3a)^2 = -3a^2$$

» **Chọn SAI.**

» **Câu 31.** Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Lấy E là trung điểm của BC , điểm F thỏa mãn

$$\vec{BF} = \frac{3}{4}\vec{BD}$$

Khi đó:



(a)	$\vec{AE} = \vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AD}$		
(b)	$\vec{AF} = \frac{1}{4}\vec{AB} + \frac{5}{4}\vec{AD}$		
(c)	$\vec{EF} = -\frac{3}{4}\vec{AB} + \frac{1}{4}\vec{AD}$		
(d)	Tam giác AEF vuông cân		

👉 **Lời giải**

(a) $\vec{AE} = \vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AD}$

$$\vec{AE} = \vec{AB} + \vec{BE} = \vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{BC} = \vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AD}$$

Ta có:

» **Chọn ĐÚNG.**

(b) $\vec{AF} = \frac{1}{4}\vec{AB} + \frac{5}{4}\vec{AD}$

$$\vec{AF} = \vec{AB} + \vec{BF} = \vec{AB} + \frac{3}{4}\vec{BD} = \vec{AB} + \frac{3}{4}(\vec{AD} - \vec{AB}) = \frac{1}{4}\vec{AB} + \frac{3}{4}\vec{AD}$$

» **Chọn SAI.**

(c) $\vec{EF} = -\frac{3}{4}\vec{AB} + \frac{1}{4}\vec{AD}$

$$\vec{EF} = \vec{AF} - \vec{AE} = \left(\frac{1}{4}\vec{AB} + \frac{3}{4}\vec{AD}\right) - \left(\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AD}\right) = -\frac{3}{4}\vec{AB} + \frac{1}{4}\vec{AD}$$

» **Chọn ĐÚNG.**

(d) Tam giác AEF vuông cân.

$$\vec{AF} \cdot \vec{EF} = \left(\frac{1}{4}\vec{AB} + \frac{3}{4}\vec{AD}\right) \cdot \left(-\frac{3}{4}\vec{AB} + \frac{1}{4}\vec{AD}\right)$$

Ta có:

$$= -\frac{3}{16}\vec{AB}^2 - \frac{1}{2}\vec{AB} \cdot \vec{AD} + \frac{3}{16}\vec{AD}^2 = 0 \Rightarrow \vec{AF} \perp \vec{EF}$$

$$\vec{AF}^2 = \left(\frac{1}{4}\vec{AB} + \frac{3}{4}\vec{AD}\right)^2 = \frac{1}{16}\vec{AB}^2 + \frac{3}{8}\vec{AB} \cdot \vec{AD} + \frac{9}{16}\vec{AD}^2 = \frac{5}{8}\vec{AB}^2$$

Ta có:

$$\vec{EF}^2 = \left(-\frac{3}{4}\vec{AB} + \frac{1}{4}\vec{AD}\right)^2 = \frac{9}{16}\vec{AB}^2 - \frac{3}{8}\vec{AB} \cdot \vec{AD} + \frac{1}{16}\vec{AD}^2 = \frac{5}{8}\vec{AB}^2$$

Và

$$\Rightarrow \vec{AF}^2 = \vec{EF}^2 = \frac{5}{8}\vec{AB}^2 \Rightarrow \vec{AF} = \vec{EF}$$

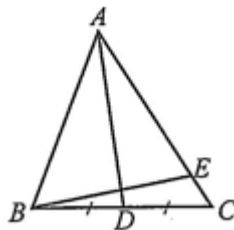
. Vậy tam giác AEF vuông cân tại F .

Chú ý: Ta có thể chứng minh tam giác AEF vuông bằng định lý Pythagore.

» **Chọn ĐÚNG.**



» **Câu 32.** Cho tam giác ABC có $AB=4\sqrt{2}$, $AC=6$, $\angle BAC=45^\circ$. Gọi D là trung điểm của đoạn thẳng BC . Điểm E thỏa mãn $\vec{AE}=k\vec{AC}$ ($k \in \mathbb{R}$) (Hình). Khi đó:



(a)	$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 20$		
(b)	$\vec{AD} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC}$		
(c)	$BC = 3\sqrt{5}$		
(d)	$AD \perp BE$ khi $k = \frac{14}{15}$		

🔑 **Lời giải**

(a) $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 20$

Ta có: $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos A = 4\sqrt{2} \cdot 6 \cdot \cos 45^\circ = 24$.

» **Chọn SAI.**

(b) $\vec{AD} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC}$

Ta có: $\vec{AB} + \vec{AC} = 2\vec{AD} \Rightarrow \vec{AD} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC}$

» **Chọn ĐÚNG.**

(c) $BC = 3\sqrt{5}$

$\vec{BC} = \vec{AC} - \vec{AB}$.

Khi đó:

$$BC^2 = (\vec{AC} - \vec{AB})^2 = AC^2 - 2\vec{AC} \cdot \vec{AB} + AB^2 = 6^2 - 2 \cdot 24 + (4\sqrt{2})^2 = 20 \Rightarrow BC = 2\sqrt{5}.$$

» **Chọn SAI.**

(d) $AD \perp BE$ khi $k = \frac{14}{15}$.

Ta có: $\vec{BE} = \vec{AE} - \vec{AB} = k\vec{AC} - \vec{AB}$.

$$\vec{AD} \cdot \vec{BE} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC}) \cdot (k\vec{AC} - \vec{AB})$$

Từ đó, ta có:

$$= \frac{1}{2} \left(k\vec{AB} \cdot \vec{AC} + k\vec{AC}^2 - \vec{AB}^2 - \vec{AB} \cdot \vec{AC} \right) = \frac{1}{2} \left[24k + 6^2 \cdot k - (4\sqrt{2})^2 - 24 \right] = 30k - 28.$$

$$AD \perp BE \Leftrightarrow \vec{AD} \cdot \vec{BE} = 0 \Leftrightarrow 30k - 28 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{14}{15}.$$

» **Chọn ĐÚNG.**

» **Câu 33.** Cho tam giác ABC đều, đường cao AH . Khi đó:



(a)	$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 30^\circ$		
(b)	$(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{CB}) = 90^\circ$		
(c)	$(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BC}) = 120^\circ$		
(d)	$(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{BA}) = 130^\circ$		

Lời giải

(a) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 30^\circ$

Ta có: $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \angle BAC = 60^\circ$.

» **Chọn SAI.**

(b) $(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{CB}) = 90^\circ$

Ta có: $(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{CB}) = 90^\circ$ do $AH \perp BC$.

» **Chọn ĐÚNG.**

(c) $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BC}) = 120^\circ$

Cách giải 1: Gọi D là điểm đối xứng với B qua C , ta có: $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CD}$.

Khi đó: $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BC}) = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CD}) = \angle ACD = 120^\circ$

Cách giải 2: Áp dụng tính chất được rút ra từ định nghĩa:

$(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = 180^\circ - (-\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = 180^\circ - (\overrightarrow{a}, -\overrightarrow{b})$, ta được:

$(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BC}) = 180^\circ - (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = 180^\circ - \angle ACB = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$

» **Chọn ĐÚNG.**

(d) $(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{BA}) = 130^\circ$

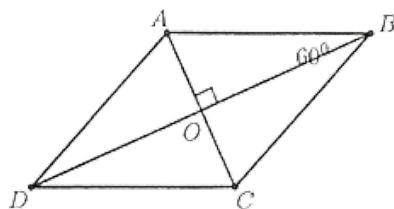
Ta có: $(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{BA}) = 180^\circ - (\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{AB}) = 180^\circ - \angle BAH = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$

» **Chọn SAI.**

» **Câu 34.** Cho hình thoi $ABCD$ có cạnh bằng 2 và góc B bằng 60° . Khi đó:

(a)	$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 60^\circ$		
(b)	$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DA}) = 30^\circ$		
(c)	$\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC} = 3$		
(d)	$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{BA} = -3$		

Lời giải



(a) $(\vec{AB}, \vec{AC}) = 60^\circ$

Xét hình thoi $ABCD$ có $\angle ABC = 60^\circ \Rightarrow \angle BAD = 120^\circ$;

Tam giác ABC có $AB = BC = 2, \angle ABC = 60^\circ \Rightarrow \triangle ABC$ đều cạnh $2 \Rightarrow OB = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$.

$(\vec{AB}, \vec{AC}) = \angle BAC = 60^\circ$

Ta có:

» **Chọn ĐÚNG.**

(b) $(\vec{AB}, \vec{DA}) = 30^\circ$

$(\vec{AB}, \vec{DA}) = 180^\circ - (\vec{AB}, \vec{AD}) = 180^\circ - \angle BAD = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$

» **Chọn SAI.**

(c) $\vec{DA} \cdot \vec{DC} = 3$

$\vec{DA} \cdot \vec{DC} = |\vec{DA}| \cdot |\vec{DC}| \cos(\vec{DA}, \vec{DC}) = DA \cdot DC \cdot \cos \angle ADC = 2 \cdot 2 \cdot \cos 60^\circ = 2$;

» **Chọn SAI.**

(d) $\vec{OB} \cdot \vec{BA} = -3$

$\vec{OB} \cdot \vec{BA} = -BO \cdot BA = -|\vec{BO}| \cdot |\vec{BA}| \cdot \cos \angle ABO = -BO \cdot BA \cdot \cos 30^\circ = -\sqrt{3} \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -3$.

» **Chọn ĐÚNG.**

» **Câu 35.** Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = a, BC = 2a$. Khi đó:

(a)	$\angle ACB = 60^\circ$		
(b)	$\vec{BA} \cdot \vec{BC} = a^2$		
(c)	$\vec{BC} \cdot \vec{CA} = 3a^2$		
(d)	$\vec{AB} \cdot \vec{BC} + \vec{BC} \cdot \vec{CA} + \vec{CA} \cdot \vec{AB} = -4a^2$		

» **Lời giải**

(a) $\angle ACB = 60^\circ$

Xét tam giác vuông ABC : $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{(2a)^2 - a^2} = a\sqrt{3}$,

$\cos \angle ABC = \frac{AB}{BC} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2} \Rightarrow \angle ABC = 60^\circ \Rightarrow \angle ACB = 30^\circ$.

» **Chọn SAI.**

(b) $\vec{BA} \cdot \vec{BC} = a^2$

Ta có: $\vec{BA} \cdot \vec{BC} = |\vec{BA}| \cdot |\vec{BC}| \cdot \cos(\vec{BA}, \vec{BC}) = BA \cdot BC \cdot \cos \angle ABC = a \cdot 2a \cdot \frac{1}{2} = a^2$.



» **Chọn ĐÚNG.**

(c) $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} = 3a^2$.

Ta có: $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} = -|\overrightarrow{CB}| \cdot |\overrightarrow{CA}| \cos \angle CB$

$$= -CB \cdot CA \cdot \cos 30^\circ = -2a \cdot a\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -3a^2.$$

» **Chọn SAI.**

(d) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = -4a^2$

Vì tam giác ABC vuông tại A nên $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.

Ta có: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -a^2, \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} = -3a^2$.

Suy ra $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = -a^2 - 3a^2 = -4a^2$.

» **Chọn ĐÚNG.**

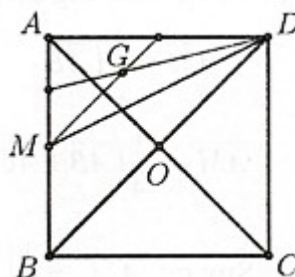
» **Câu 36.** Cho hình vuông $ABCD$ tâm O , có cạnh a . Biết M là trung điểm của AB , G là trọng tâm tam giác ADM . Khi đó:

(a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} = a^2$

(b) $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{a^2}{3}$

(c) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{a^2}{2}$

(d) $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) = a^2$



» **Lời giải**

(a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} = a^2$

Độ dài đường chéo hình vuông $ABCD$ cạnh a là $AC = BD = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$.

Ta có: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$

$$= -AB \cdot AC \cdot \cos \angle BAC = -a \cdot a\sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ = -a^2$$

» **Chọn SAI.**

(b) $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{a^2}{3}$

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AM}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AC}) = AM \cdot AC \cdot \cos \angle CAM = \frac{a}{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ = \frac{a^2}{2}.$$

» **Chọn SAI.**

(c) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{a^2}{2}$



$$\begin{aligned} \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{AC} \\ \text{Ta có:} \\ &= |\overrightarrow{DA}| \cdot |\overrightarrow{DB}| \cdot \cos(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) - \frac{1}{2} \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} \\ &= DA \cdot DB \cdot \cos \angle ADB - \frac{1}{2} AD \cdot AC \cdot \cos \angle CAD \\ &= a \cdot a\sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ - \frac{1}{2} a \cdot a\sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ = a^2 - \frac{1}{2} a^2 = \frac{1}{2} a^2. \end{aligned}$$

» **Chọn ĐÚNG.**

(d) $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) = a^2$

Ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ (quy tắc hình bình hành).
 $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AC}(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC})$

Do đó:

$$= \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = |\overrightarrow{CA}| \cdot |\overrightarrow{CB}| \cos \angle ACB = a \cdot a\sqrt{2} \cos 45^\circ = a^2$$

(trong đó $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$ vì $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}$).

» **Chọn ĐÚNG.**

» **Câu 37.** Cho hình vuông $ABCD$ tâm O , cạnh bằng a . Khi đó:

(a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} = 2a^2$

(b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OC} = a^2$

(c) $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{OC} = -a^2$

(d) $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD}) = a^2$

🔍 **Lời giải**

(a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} = 2a^2$;

Do $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}$ cùng hướng nên $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}) = 0^\circ$.

Suy ra: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} = AB \cdot DC \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}) = a \cdot a \cdot \cos 0^\circ = a^2$.

» **Chọn SAI.**

(b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OC} = a^2$;

Hai vector $\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{OC}$ cùng hướng, do đó $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OC}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}) = \angle BAO = 45^\circ$

Ta có: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OC} = AB \cdot OC \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OC}) = a \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \cos 45^\circ = \frac{a^2}{2}$.

» **Chọn SAI.**

(c) $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{OC} = -a^2$;

Hai vector $\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{OC}$ ngược hướng, do đó $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{OC}) = 180^\circ$.

Suy ra: $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{OC} = CA \cdot OC \cdot \cos(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{OC}) = a\sqrt{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \cos 180^\circ = -a^2$.



» **Chọn ĐÚNG.**

(d) $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD}) = a^2$

Ta có: $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD}) = \overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD})$

$= \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$ (trong đó $AC \perp BD \Rightarrow \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$).

Ta có: $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = |\overrightarrow{CA}| \cdot |\overrightarrow{CB}| \cdot \cos(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = CA \cdot CB \cdot \cos \angle ACB = a\sqrt{2} \cdot a \cdot \cos 45^\circ = a^2$

Vậy $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD}) = a^2$

» **Chọn ĐÚNG.**

» **Câu 38.** Cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và B , biết $AD = a, BC = 3a$ và cạnh $AB = 2a$. Khi đó:

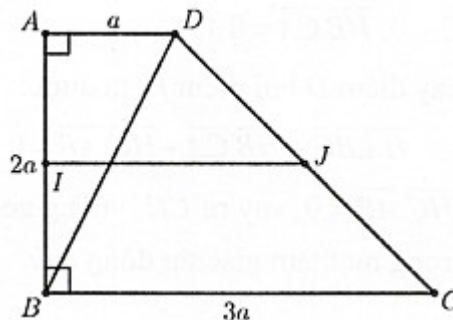
(a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = -4a^2$

(b) $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD} = 2a^2$

(c) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = -2a^2$

(d) Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB, CD . Khi đó $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{IJ} = 6a^2$

» **Lời giải**



(a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = -4a^2$

Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD}$. Ta có: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$

$= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = -AB^2 = -4a^2$.

» **Chọn ĐÚNG.**

(b) $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD} = 2a^2$

Tính $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD}$. Ta có: $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD} = BC \cdot BD \cdot \cos(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}) = BC \cdot BD \cdot \cos \angle DBC$

$= BC \cdot BD \cdot \cos \angle BDA = BC \cdot BD \cdot \frac{AD}{BD} = BC \cdot AD = 3a^2$.

(trong đó $\angle DBC = \angle BDA$ vì là hai góc so le trong).

» **Chọn SAI.**

(c) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = -2a^2$

Tính $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$.



Ta có:

$$\vec{AC} \cdot \vec{BD} = (\vec{AB} + \vec{BC})(\vec{BA} + \vec{AD}) = \vec{AB} \cdot \vec{BA} + \vec{AB} \cdot \vec{AD} + \vec{BC} \cdot \vec{BA} + \vec{BC} \cdot \vec{AD}$$

$$= -AB^2 + 0 + 0 + \vec{BC} \cdot \vec{AD} \cdot \cos 0^\circ = -AB^2 + 3a \cdot a \cdot 1 = -(2a)^2 + 3a^2 = -a^2.$$

» **Chọn SAI.**

(d) Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB, CD . Khi đó $\vec{AC} \cdot \vec{IJ} = 6a^2$

$$\vec{AC} \cdot \vec{IJ} = (\vec{AB} + \vec{BC}) \cdot \vec{IJ} = \vec{AB} \cdot \vec{IJ} + \vec{BC} \cdot \vec{IJ} = \vec{BC} \cdot \vec{IJ} \cdot \cos 0^\circ = 3a \cdot 2a \cdot 1 = 6a^2.$$

Ta có:
 » **Chọn ĐÚNG.**

» **Câu 39.** Cho tam giác đều ABC , đường cao AH . Khi đó:

(a)	$(\vec{AB}, \vec{AC}) = 60^\circ$		
(b)	$(\vec{AB}, \vec{BC}) = 120^\circ$		
(c)	$(\vec{AH}, \vec{BC}) = 90^\circ$		
(d)	$(\vec{HA}, \vec{AB}) = 120^\circ$		

» **Lời giải**

(a) $(\vec{AB}, \vec{AC}) = 60^\circ$
 $(\vec{AB}, \vec{AC}) = \angle BAC = 60^\circ$

» **Chọn ĐÚNG.**

(b) $(\vec{AB}, \vec{BC}) = 120^\circ$
 Đặt hình bình hành $ABCD$, ta có: $\vec{BC} = \vec{AD}$.

$$(\vec{AB}, \vec{BC}) = (\vec{AB}, \vec{AD}) = \angle BAD = 180^\circ - \angle ABC = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

Suy ra:

» **Chọn ĐÚNG.**

(c) $(\vec{AH}, \vec{BC}) = 90^\circ$
 $(\vec{AH}, \vec{BC}) = 90^\circ$

Tam giác ABC đều nên $AH \perp BC$. Suy ra

» **Chọn ĐÚNG.**

(d) $(\vec{HA}, \vec{AB}) = 120^\circ$
 Đặt hình bình hành $ABEH$, ta có: $\vec{AB} = \vec{HE}$.

$$(\vec{HA}, \vec{AB}) = (\vec{HA}, \vec{HE}) = \angle AHE = 180^\circ - \angle BAH = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$$

Suy ra:

» **Chọn SAI.**

» **Câu 40.** Cho tam giác ABC đều có cạnh a , có trọng tâm G . Khi đó:

(a)	$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{a^2}{2}$		
(b)	$\vec{AG} \cdot \vec{AC} = \frac{a^2}{4}$		



(c)	$\vec{AG} \cdot \vec{GB} = 120^\circ$		
(d)	$\vec{GA} \cdot \vec{GB} = \frac{a^2}{6}$		

Lời giải

(a) $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{a^2}{2}$

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = |\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}| \cdot \cos(\vec{AB}, \vec{AC}) = AB \cdot AC \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2} a^2$$

» **Chọn ĐÚNG.**

(b) $\vec{AG} \cdot \vec{AC} = \frac{a^2}{4}$

$$\vec{AG} \cdot \vec{AC} = |\vec{AG}| \cdot |\vec{AC}| \cdot \cos(\vec{AG}, \vec{AC}) = AG \cdot AC \cdot \cos 30^\circ = \frac{1}{2} a^2$$

» **Chọn SAI.**

(c) $\vec{AGB} = 120^\circ$

Tam giác AGB có $\hat{GAB} = \hat{GBA} = 30^\circ \Rightarrow \vec{AGB} = 120^\circ$

» **Chọn ĐÚNG.**

(d) $\vec{GA} \cdot \vec{GB} = \frac{a^2}{6}$

$$\Rightarrow \vec{GA} \cdot \vec{GB} = GA \cdot GB \cdot \cos \vec{AGB} = \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} \cos 120^\circ = -\frac{a^2}{6}$$

» **Chọn SAI.**

» **Câu 41.** Cho tam giác ABC có $AB=2a, AC=3a, \hat{BAC}=60^\circ$. Gọi I là trung điểm đoạn thẳng BC . Điểm J thuộc đoạn AC thỏa mãn: $12AJ=7AC$. Khi đó:

(a)	$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 4a^2$		
(b)	$\vec{AI} = \frac{3}{2}\vec{AB} + \frac{3}{2}\vec{AC}$		
(c)	$\vec{BJ} = -\vec{AB} + \frac{7}{12}\vec{AC}$		
(d)	$AI \perp BJ$		

Lời giải

(a) $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 4a^2$

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \cdot AC \cos \hat{BAC} = 2a \cdot 3a \cdot \cos 60^\circ = 3a^2$$

» **Chọn SAI.**

(b) $\vec{AI} = \frac{3}{2}\vec{AB} + \frac{3}{2}\vec{AC}$

$$\vec{AI} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC}) = \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC}$$

Do I là trung điểm BC nên

» **Chọn SAI.**



$$(c) \quad \vec{BJ} = -\vec{AB} + \frac{7}{12}\vec{AC}$$

$$\vec{BJ} = \vec{BA} + \vec{AJ} = -\vec{AB} + \frac{7}{12}\vec{AC}$$

» **Chọn ĐÚNG.**

$$(d) \quad AI \perp BJ$$

$$\begin{aligned} \vec{AI} \cdot \vec{BJ} &= \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC}) \cdot \left(-\vec{AB} + \frac{7}{12}\vec{AC}\right) \\ &= \frac{1}{2} \left(-\vec{AB} \cdot \vec{AB} + \frac{7}{12}\vec{AB} \cdot \vec{AC} - \vec{AB} \cdot \vec{AC} + \frac{7}{12}\vec{AC} \cdot \vec{AC} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(-4a^2 + \frac{7}{12} \cdot 3a^2 - 3a^2 + \frac{7}{12} \cdot 9a^2 \right) = 0 \end{aligned}$$

Vậy $AI \perp BJ$

» **Chọn ĐÚNG.**

C. Câu hỏi - Trả lời ngắn

» **Câu 42.** Cho hình thang vuông $ABCD$ có đáy lớn $AB=8$; đáy nhỏ $CD=4$; đường cao $AD=6$; I là trung điểm của AD . Tính $(\vec{IA} + \vec{IB}) \cdot \vec{ID}$.

👉 **Lời giải**

✓ **Trả lời: -18**

$$\begin{aligned} \vec{IA} \cdot \vec{ID} + \vec{IB} \cdot \vec{ID} &= -\vec{IA} \cdot \vec{IB} + \vec{IB} \cdot \vec{ID} \cdot \cos BID \\ &= -\vec{IA} \cdot \vec{IB} + \vec{IB} \cdot \vec{ID} \cdot \cos BIA \\ &= -\vec{IA} \cdot \vec{IB} + \vec{IB} \cdot \vec{ID} \cdot \frac{IA}{IB} = -\vec{IA} \cdot \vec{IB} + \vec{IA} \cdot \vec{ID} = -2\vec{IA} \cdot \vec{ID} = -2 \cdot 3^2 = -18 \end{aligned}$$

» **Câu 43.** Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB=1, AC=2\sqrt{3}$ và AM là trung tuyến. Tính tích vô hướng $\vec{BA} \cdot \vec{AM}$.

👉 **Lời giải**

✓ **Trả lời: -0,5**

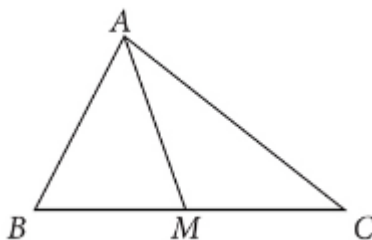
Tam giác AMB có $AM=BM=AB$ nên là tam giác đều. Suy ra $\angle MAB=60^\circ$.

$$\vec{BA} \cdot \vec{AM} = -\vec{AB} \cdot \vec{AM} = -|\vec{AB}| \cdot |\vec{AM}| \cdot \cos(\vec{AB}, \vec{AM}) = -1 \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ = -\frac{1}{2}.$$

» **Câu 44.** Cho tam giác ABC , trung tuyến AM . Khi đó $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AM^2 - kBC^2$. Vậy $k=?$

👉 **Lời giải**

✓ **Trả lời: 0,25**





$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})^2 - (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})^2}{4} = \frac{4AM^2 - BC^2}{4} = AM^2 - \frac{1}{4}BC^2.$$

Ta có:

» **Câu 45.** Cho tam giác ABC cân tại A ; M là trung điểm của BC , H là hình chiếu của M trên AC ; E là trung điểm của MH . Tính $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BH}$

👉 **Lời giải**

✓ **Trả lời: 0**

Ta có biến đổi tích vô hướng như sau:

$$\begin{aligned} 2\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BH} &= (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AH}) \cdot (\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MH}) \\ &= \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{MH} + \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BM} \\ &= \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{MH} + (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MH}) \cdot \overrightarrow{BM} \\ &= \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{MH} + \overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{MC} \\ &= \overrightarrow{HM} \cdot \overrightarrow{MH} + \overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{MH} \\ &= \overrightarrow{MH} + \overrightarrow{MH} = 0. \end{aligned}$$

Suy ra $\overrightarrow{AE} \perp \overrightarrow{BH}$ (đpcm).

Suy ra $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BH} = 0$



» **Câu 46.** Cho tam giác ABC có $BC = a, CA = b, AB = c$. Biết M là trung điểm của BC . Tính

$\overrightarrow{AM}^2$ ta thu được kết quả $\frac{m(b^2 + c^2) - a^2}{n}$, với $m; n$ là các số tự nhiên. Tính $S = m^n$

👉 **Lời giải**

✓ **Trả lời: 16**

Vì M là trung điểm của BC , nên: $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$;

$$\overrightarrow{AM}^2 = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})^2 = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}^2) \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2};$$

$$\overrightarrow{AM}^2 = \frac{1}{4}\left(c^2 + 2 \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2} + b^2\right) = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4} \Rightarrow \begin{cases} m=2 \\ n=4 \end{cases} \Rightarrow S = m^n = 16$$

Suy ra:

(đây cũng là công thức để tính độ dài đường trung tuyến tam giác).

» **Câu 47.** Cho nửa đường tròn đường kính AB . Biết rằng AC và BD là hai dây thuộc nửa đường tròn cắt nhau tại E . Tính $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{BD}$ biết $AB = 2$.

👉 **Lời giải**

✓ **Trả lời: 4**

Ta có: $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AE} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{BE} \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD})$

$$= \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{AD}.$$

Vì AB là đường kính nửa đường tròn nên

$$\angle ADB = 90^\circ, \angle ACB = 90^\circ \Rightarrow \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BC} = 0, \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{AD} = 0.$$

Khi đó: $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EB} \cdot \overrightarrow{AB}$

$$= \overrightarrow{AB}(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EB}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}^2 = AB^2 = 4$$



- » **Câu 48.** Cho hình vuông $ABCD$, điểm M nằm trên đoạn thẳng AC sao cho $AM = \frac{AC}{4}$. Gọi N là trung điểm CD . Khi đó BMN là tam giác vuông và $MB = k \cdot MN$, với k là số tự nhiên. Xác định k .

👉 **Lời giải**

✓ **Trả lời: 1**

Đặt $\vec{AD} = \vec{a}, \vec{AB} = \vec{b}$.

$$\vec{AM} = \frac{1}{4} \vec{AC} = \frac{1}{4} (\vec{a} + \vec{b})$$

Khi đó:

$$\vec{AN} = \vec{AD} + \vec{DN} = \vec{a} + \frac{1}{2} \vec{b}$$

$$\vec{MB} = \vec{AB} - \vec{AM} = \vec{b} - \frac{1}{4} (\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{4} (-\vec{a} + 3\vec{b})$$

và

$$\vec{MN} = \vec{AN} - \vec{AM} = \vec{a} + \frac{1}{2} \vec{b} - \frac{1}{4} (\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{4} (3\vec{a} + \vec{b})$$

$$\text{Hơn nữa: } \vec{MB}^2 = \frac{1}{16} (-\vec{a} + 3\vec{b})^2 = \frac{1}{16} (\vec{a}^2 + 9\vec{b}^2 - 6\vec{a} \cdot \vec{b}) = \frac{1}{16} (AD^2 + 9AB^2 - 0) = \frac{5}{8} AB^2;$$

$$\vec{MN}^2 = \frac{1}{16} (3\vec{a} + \vec{b})^2 = \frac{1}{16} (9\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 6\vec{a} \cdot \vec{b}) = \frac{1}{16} (9AD^2 + AB^2 + 0) = \frac{5}{8} AB^2$$

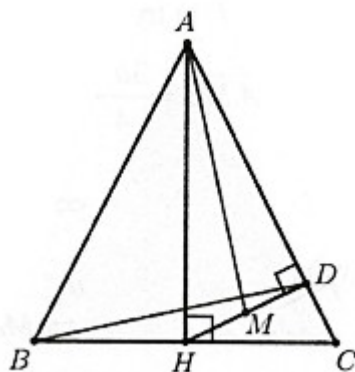
Suy ra $MB = MN$

Vậy $k = 1$

- » **Câu 49.** Cho tam giác ABC cân tại A . Gọi H là trung điểm của BC , D là hình chiếu của H trên AC , M là trung điểm của HD . Tính $\vec{AM} \cdot \vec{BD}$

👉 **Lời giải**

✓ **Trả lời: 0**



Ta cần chứng minh: $\vec{AM} \cdot \vec{BD} = 0$.

$$\text{Ta có: } \vec{BD} = \vec{BH} + \vec{HD} = \vec{HC} + \vec{HD} \text{ và } \vec{AM} = \frac{1}{2} (\vec{AH} + \vec{AD})$$

$$\vec{AM} \cdot \vec{BD} = \frac{1}{2} (\vec{AH} + \vec{AD}) \cdot (\vec{HC} + \vec{HD})$$

Do đó:

$$= \frac{1}{2} (\vec{AH} \cdot \vec{HC} + \vec{AH} \cdot \vec{HD} + \vec{AD} \cdot \vec{HC} + \vec{AD} \cdot \vec{HD})$$



$$\begin{aligned} \text{mà } \begin{cases} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{HC} = 0 \text{ (do } AH \perp BC) \\ \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{HD} = 0 \text{ (do } HD \perp AC) \end{cases} &\Rightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BD} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{HD} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{HC}) \\ &= \frac{1}{2} [\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{HD} + (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HD}) \cdot \overrightarrow{HC}] \\ &= \frac{1}{2} (\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{HD} + \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{HC} + \overrightarrow{HD} \cdot \overrightarrow{HC}) = \frac{1}{2} \overrightarrow{HD} \cdot (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HC}) = \frac{1}{2} \overrightarrow{HD} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{aligned}$$

» **Câu 50.** Cho hai điểm A, B cố định có khoảng cách bằng 1. Tập hợp điểm M sao cho:
 $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \frac{3a^2}{4}$ là đường tròn có bán kính bằng bao nhiêu?

👉 **Lời giải**

✓ **Trả lời: 1**

Gọi I là trung điểm của AB ta có:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} &= \frac{3}{4} \Leftrightarrow (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = \frac{3}{4} \\ \Leftrightarrow (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})(\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}) &= \frac{3}{4} \Leftrightarrow MI^2 - IA^2 = \frac{3}{4} \\ \text{IA} &= \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow MI^2 &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \Leftrightarrow MI = 1 \end{aligned}$$

Vậy tập hợp điểm M là đường tròn tâm I bán kính $R=1$.

» **Câu 51.** Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a và số thực k . Tập hợp điểm M sao cho
 $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD} = k$ là đường tròn có bán kính dạng $R = n \cdot \sqrt{\frac{k+a^2}{m}}$, với m, n là các số tự nhiên. Tính $S = m + n$

👉 **Lời giải**

✓ **Trả lời: 3**

Gọi I là tâm của hình vuông $ABCD$

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC}) = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})(\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}) = MI^2 - IA^2 = MI^2 - \frac{a^2}{2}$$

Ta có

$$\text{Hoàn toàn tương tự, ta có: } \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD} = MI^2 - IB^2$$

$$\text{Khi đó: } \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD} = k \Leftrightarrow 2MI^2 - IA^2 - IB^2 = k \Leftrightarrow 2MI^2 - 2IA^2 = k$$

$$\Leftrightarrow MI^2 = \frac{k}{2} + IA^2 \Leftrightarrow MI^2 = \frac{k}{2} + \frac{a^2}{2} \Leftrightarrow MI = \sqrt{\frac{k+a^2}{2}}$$

$$IA^2 = \left(\frac{AC}{2}\right)^2 = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{2}$$

(trong đó

Nếu $k < -a^2$: Tập hợp điểm M là tập rỗng.

Nếu $k = -a^2$ thì $MI = 0 \Leftrightarrow M \equiv I$ (điểm M trùng với điểm I).

$$\text{Nếu } k > -a^2 \text{ thì } MI = \sqrt{\frac{k+a^2}{2}}.$$



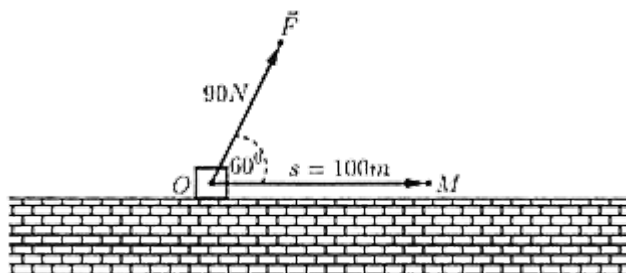
$$R = \sqrt{\frac{k+a^2}{2}}$$

Vậy tập hợp điểm M là đường tròn tâm I , bán kính

$$\begin{cases} m=2 \\ n=1 \end{cases} \Rightarrow S=m+n=3$$

Khi đó

- » **Câu 52.** Một người dùng một lực $\vec{F}$ có độ lớn $90N$ làm một vật dịch chuyển một đoạn $100m$. Biết lực $\vec{F}$ hợp với hướng dịch chuyển một góc 60° . Công sinh ra bởi lực $\vec{F}$ là bao nhiêu Jun?



🔗 **Lời giải**

✓ **Trả lời: 4500**

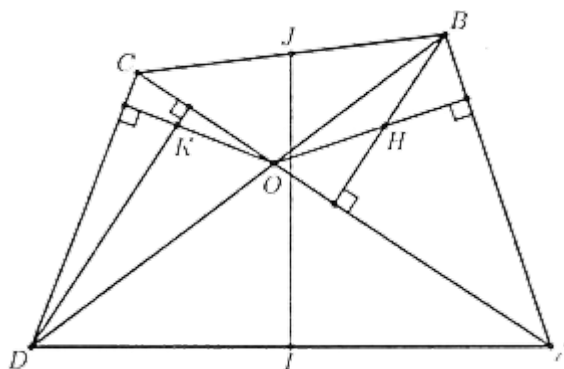
Đặt $OM=s$ là đoạn đường mà vật di chuyển được với O là điểm đặt vật ban đầu. Công sinh ra bởi lực $\vec{F}$ là:

$$A = \vec{F} \cdot \vec{OM} = |\vec{F}| \cdot |\vec{OM}| \cdot \cos(\vec{F}, \vec{OM}) = 90 \cdot 100 \cdot \cos 60^\circ = 4500 J.$$

- » **Câu 53.** Cho tứ giác lồi $ABCD$, hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại O . Gọi H và K lần lượt là trực tâm các tam giác ABO và CDO . Gọi I, J lần lượt là trung điểm AD và BC . Tính $\vec{HK} \cdot \vec{IJ}$?

🔗 **Lời giải**

✓ **Trả lời: 0**



$$\begin{cases} \vec{IJ} = \vec{IA} + \vec{AC} + \vec{CJ} \\ \vec{IJ} = \vec{ID} + \vec{DB} + \vec{BJ} \end{cases} \Rightarrow 2\vec{IJ} = \vec{AC} + \vec{DB}$$

Ta có:

$$\vec{HK} \cdot 2\vec{IJ} = \vec{HK} \cdot (\vec{AC} + \vec{DB}) = \vec{HK} \cdot \vec{AC} + \vec{HK} \cdot \vec{DB}$$

Suy ra:

$$= (\vec{HB} + \vec{BD} + \vec{DK}) \cdot \vec{AC} + (\vec{HA} + \vec{AC} + \vec{CK}) \cdot \vec{DB} = \vec{AC} \cdot (\vec{BD} + \vec{DB}) = \vec{AC} \cdot \vec{0} = 0$$

$$\text{Vậy } \vec{HK} \cdot \vec{IJ} = 0$$

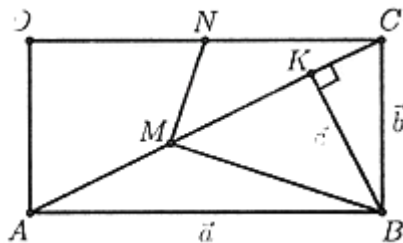


» **Câu 54.** Cho hình chữ nhật $ABCD$. Kẻ $BK \perp AC, K \in AC$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AK và CD . Tìm số đo góc BMN .

Trả lời: 90°

Lời giải

✓ **Trả lời:**



Đặt $\vec{BA} = \vec{a}, \vec{BC} = \vec{b}, \vec{BK} = \vec{c}$ và $BA = a, BC = b, BK = c$.

$$\vec{BM} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{c})$$

Khi đó:

$$\vec{MN} = \vec{MB} + \vec{BC} + \vec{CN} = -\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{c}) + \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a} = \vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c} = \frac{1}{2}(2\vec{b} - \vec{c})$$

$$\text{Do đó: } \vec{MN} \cdot \vec{BM} = \frac{1}{4}(2\vec{b} - \vec{c})(\vec{a} + \vec{c}) = \frac{1}{4}(2\vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{c} + 2\vec{b} \cdot \vec{c} - \vec{c}^2)$$

$$= \frac{1}{4}[2\vec{a} \cdot \vec{b} + (\vec{b} - \vec{a})\vec{c} + (\vec{b} - \vec{c})\vec{c}]$$

Ta thấy rằng: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ do $\vec{a} \perp \vec{b}$; $(\vec{b} - \vec{a})\vec{c} = \vec{AC} \cdot \vec{c} = 0$

Do $\vec{AC} \perp \vec{BK}$; $(\vec{b} - \vec{c})\vec{c} = \vec{KC} \cdot \vec{c} = 0$ do $\vec{CK} \perp \vec{BK}$.

Vì vậy $\vec{MN} \cdot \vec{BM} = 0 \Rightarrow \angle BMN = 90^\circ$.

» **Câu 55.** Cho đoạn $AB = 20$. Tồn tại điểm M sao cho $T = 3MA^2 + 2MB^2$ đạt giá trị bé nhất $T_{\min}$. Tính giá trị $T_{\min}$?

Lời giải

✓ **Trả lời: 480**

Gọi điểm I thỏa mãn $3\vec{IA} + 2\vec{IB} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow 3\vec{IA} + 2(\vec{IA} + \vec{AB}) = \vec{0} \Leftrightarrow 5\vec{IA} + 2\vec{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{AI} = -\frac{2}{5}\vec{AB}$$

Vậy điểm I thuộc đoạn AB và $IA = \frac{2}{5} \cdot AB = \frac{2}{5} \cdot 20 = 8, IB = 12$

$$T = 3MA^2 + 2MB^2 = 3\vec{MA}^2 + 2\vec{MB}^2 = 3(\vec{MI} + \vec{IA})^2 + 2(\vec{MI} + \vec{IB})^2$$

Ta có

$$= 3\vec{MI}^2 + 6\vec{MI} \cdot \vec{IA} + 3\vec{IA}^2 + 2\vec{MI}^2 + 4\vec{MI} \cdot \vec{IB} + 2\vec{IB}^2$$

$$= 5\vec{MI}^2 + 3\vec{IA}^2 + 2\vec{IB}^2 + 2\vec{MI} \left(\frac{3\vec{IA} + 2\vec{IB}}{5} \right) = 5\vec{MI}^2 + 3\vec{IA}^2 + 2\vec{IB}^2$$

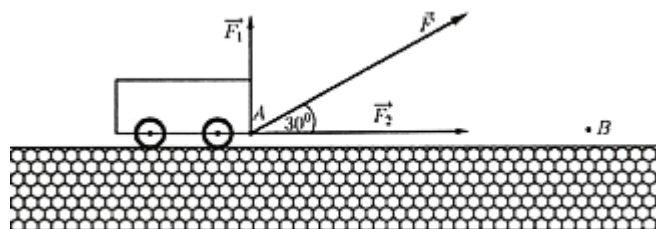
Ta có $(3\vec{IA}^2 + 2\vec{IB}^2)$ là hằng số do ba điểm A, B, I cố định.



Do đó: T đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow 5MI^2$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow MI$ bé nhất $\Leftrightarrow$ Điểm M trùng với điểm I .

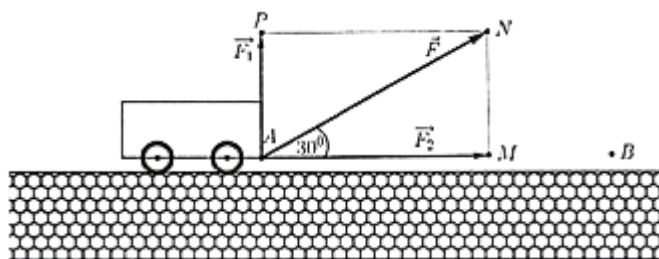
Khi đó giá trị T nhỏ nhất là: $T_{\min} = 3IA^2 + 2IB^2 = 3 \cdot 8^2 + 2 \cdot 12^2 = 480$.

» **Câu 56.** Một chiếc xe được kéo bởi một lực $\vec{F}$ có độ lớn $50N$, di chuyển theo quãng đường từ A đến B có chiều dài $200m$. Cho biết góc hợp bởi lực $\vec{F}$ và $\vec{AB}$ bằng 30° và lực $\vec{F}$ được phân tích thành hai lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2$. Gọi $m; n; k$ lần lượt là các công sinh ra bởi các lực $\vec{F}, \vec{F}_1, \vec{F}_2$. Khi đó tính $S = m - n - k$.



👉 **Lời giải**

✓ **Trả lời: 0**



Đặt $\vec{F} = \vec{AN}, \vec{F}_1 = \vec{AP}, \vec{F}_2 = \vec{AM}$.

Khi đó $AMNP$ là hình bình hành, mà $AM \perp AP$ nên $AMNP$ là hình chữ nhật.

Ta có: $AN = 50, AM = AN \cdot \cos 30^\circ = 50 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 25\sqrt{3}$,

$AP = MN = \sqrt{AN^2 - AM^2} = 25$.

Lực $\vec{F}$ sinh ra công $A = |\vec{F}| \cdot |\vec{AB}| \cdot \cos 30^\circ = 50 \cdot 200 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5000\sqrt{3} J$.

Lực $\vec{F}_1$ có độ lớn $25N$ và tạo với phương dịch chuyển góc 90° nên công sinh ra là $A_1 = |\vec{F}_1| \cdot |\vec{AB}| \cdot \cos 90^\circ = 0 J$.

Lực $\vec{F}_2$ có độ lớn $25\sqrt{3} N$ và tạo với phương dịch chuyển góc 0° nên công sinh ra là $A_2 = |\vec{F}_2| \cdot |\vec{AB}| \cdot \cos 0^\circ = 25\sqrt{3} \cdot 200 \cdot 1 = 5000\sqrt{3} J$.

Khi đó $S = m - n - k = 5000\sqrt{3} - 0 - 5000\sqrt{3} = 0$

» **Câu 57.** Cho tam giác ABC vuông tại A có cạnh $AC = 7cm$ và $BC = 14cm$. Tính cosin của góc giữa hai vectơ $\vec{AC}$ và $\vec{CB}$.

👉 **Lời giải**

✓ **Trả lời: -0,5**

Ta có: $(\vec{AC}, \vec{CB}) = 180^\circ - (\vec{CA}, \vec{CB}) = 180^\circ - \angle ACB$.



Mà $\cos(\angle ACB) = \frac{AC}{BC} = \frac{1}{2}$ nên $\angle ACB = 60^\circ$.

Vậy $(\vec{AC}, \vec{CB}) = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ hay $\cos(\vec{AC}, \vec{CB}) = \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$

» **Câu 58.** Cho hình vuông $ABCD$ cạnh bằng 3. Trên cạnh AB lấy điểm M sao cho $BM=1$, trên cạnh CD lấy điểm N sao cho $DN=1$ và P là trung điểm BC . Tính $\cos \angle MNP$. Kết quả làm tròn đến hàng phần chục

👉 **Lời giải**

✓ **Trả lời: 0,8**

Ta có $\vec{NM} = \frac{1}{3}\vec{AB} - \vec{AD}, \vec{NP} = \frac{2}{3}\vec{AB} - \frac{1}{2}\vec{AD}$

Suy ra $\vec{NM} \cdot \vec{NP} = \frac{2}{9} \cdot 9 + \frac{1}{2} \cdot 9 = \frac{13}{2}$

Mặt khác $|\vec{NM}| = \sqrt{10}, |\vec{NP}| = \frac{5}{2} \Rightarrow \cos \angle MNP = \frac{13}{5\sqrt{10}}$.

» **Câu 59.** Cho tam giác ABC . Gọi M, N, E lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB . Tính: $\vec{AM} \cdot \vec{BC} + \vec{BN} \cdot \vec{CA} + \vec{CE} \cdot \vec{AB}$.

👉 **Lời giải**

✓ **Trả lời: 0**

Vì M là trung điểm BC nên:

$$2\vec{AM} = \vec{AB} + \vec{AC} \Leftrightarrow 2\vec{AM} \cdot \vec{BC} = (\vec{AB} + \vec{AC}) \cdot \vec{BC} = \vec{AB} \cdot \vec{BC} + \vec{AC} \cdot \vec{BC} \quad (1)$$

$$\text{Tương tự ta có: } 2\vec{BN} \cdot \vec{CA} = \vec{BC} \cdot \vec{CA} + \vec{BA} \cdot \vec{CA} \quad (2)$$

$$2\vec{CE} \cdot \vec{AB} = \vec{CB} \cdot \vec{AB} + \vec{CA} \cdot \vec{AB} \quad (3)$$

Cộng từng vế (1), (2), (3) được:

$$2\vec{AM} \cdot \vec{BC} + 2\vec{BN} \cdot \vec{CA} + 2\vec{CE} \cdot \vec{AB} = 0 \text{ hay } \vec{AM} \cdot \vec{BC} + \vec{BN} \cdot \vec{CA} + \vec{CE} \cdot \vec{AB} = 0$$

» **Câu 60.** Cho tam giác đều ABC cạnh 1 nội tiếp đường tròn (O) bán kính R, M là điểm bất kỳ nằm trên đường tròn (O) . Tính $MA^2 + MB^2 + MC^2$.

👉 **Lời giải**

✓ **Trả lời: 2**

Tam giác đều ABC cạnh a nội tiếp đường tròn (O) bán kính R nên O là

trọng tâm của tam giác $ABC \Rightarrow \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{0}$ và $R = OA = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Xét: $MA^2 + MB^2 + MC^2$

$$\begin{aligned} &= (\vec{MO} + \vec{OA})^2 + (\vec{MO} + \vec{OB})^2 + (\vec{MO} + \vec{OC})^2 \\ &= 3\vec{MO}^2 + \vec{OA}^2 + \vec{OB}^2 + \vec{OC}^2 + 2\vec{MO} \cdot (\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}) \end{aligned}$$

$$= 6R^2 + 2\vec{MO} \cdot \vec{0} = 6 \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \right)^2 = 2$$

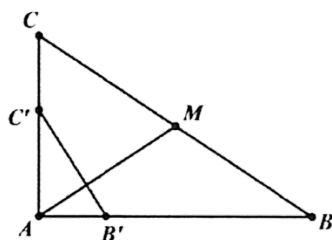


Vậy $\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MC}^2 = 2$.

» **Câu 61.** Cho tam giác ABC vuông tại A , trên hai cạnh AB và AC lần lượt lấy hai điểm B' và C' sao cho $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC'}$. Gọi M là trung điểm của BC . Tính $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{B'C'}$

🔗 **Lời giải**

✓ **Trả lời: 0**



Vì M là trung điểm của BC nên $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$
 $2\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{B'C'} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{AC'} - \overrightarrow{AB'})$

Do đó,
 $= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC'} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB'} - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB'} = 0 - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC'} = 0$

» **Câu 62.** Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=1$ và $AD=\sqrt{2}$. Gọi K là trung điểm của cạnh AD . Tính $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC}$.

🔗 **Lời giải**

✓ **Trả lời: 0**

Ta có: $AC = BD = \sqrt{2a^2 + a^2} = a\sqrt{3}$.

$\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

Suy ra

$\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = \left(\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \right) \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$

$= \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD} = -1^2 + 0 + 0 + \frac{1}{2}(\sqrt{2})^2 = 0$.

» **Câu 63.** Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Biết $|\vec{a}|=2, |\vec{b}|=\sqrt{3}$ và $(\vec{a}, \vec{b})=120^\circ$. Tính $|\vec{a} + \vec{b}|$. Kết quả làm tròn đến hàng phần chục.

🔗 **Lời giải**

✓ **Trả lời: 1,9**

Ta có $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{(\vec{a} + \vec{b})^2} = \sqrt{\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 2\vec{a}\vec{b}} = \sqrt{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a}, \vec{b})} = \sqrt{7 - 2\sqrt{3}} \approx 1,9$

» **Câu 64.** Cho hình vuông $ABCD$ cạnh bằng 1. Tập hợp điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD} = 1^2$ là đường tròn bán kính $R=?$

🔗 **Lời giải**

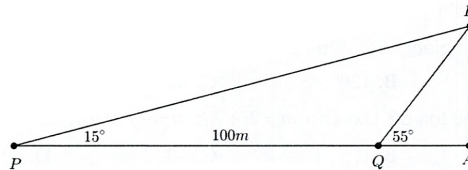
✓ **Trả lời: 1**



Ta có $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD} = 1^2 \Leftrightarrow MO^2 - OA^2 + MO^2 - OB^2 = 1^2 \Leftrightarrow MO^2 = 1^2$
 $\Leftrightarrow MO = 1 \left(OA = OB = \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$.

Vậy tập hợp điểm M là đường tròn tâm O , bán kính $R = 1$.

» **Câu 65.** Hai chiếc tàu thủy P và Q trên biển cách nhau $100m$ và thẳng hàng với chân A của tháp hải đăng AB ở trên bờ biển. Từ P và Q người ta nhìn chiều cao AB của tháp dưới các góc $BPA = 15^\circ$ và $BQA = 55^\circ$. Tính chiều cao của tháp (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).



👉 **Lời giải**

✓ **Trả lời: 33**

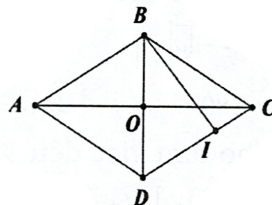
$$\frac{BQ}{PQ} = \frac{\sin BPQ}{\sin PBQ} = \frac{\sin 15^\circ}{\sin 40^\circ} \Rightarrow BQ = \frac{PQ \sin 15^\circ}{\sin 40^\circ}$$

$$\frac{AB}{BQ} = \sin 55^\circ \Rightarrow AB = BQ \sin 55^\circ = \frac{PQ \sin 15^\circ}{\sin 40^\circ} \cdot \sin 55^\circ \approx 33m$$

» **Câu 66.** Cho hình thoi $ABCD$ tâm O có cạnh bằng 1 và $\angle ABD = 60^\circ$. Gọi I là điểm thỏa mãn $2\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{BI}$.

👉 **Lời giải**

✓ **Trả lời: 0,5**



Do $ABCD$ là hình thoi có cạnh bằng 1 và $\angle ABD = 60^\circ$

Nên ABD và BCD là các tam giác đều cạnh 1.

Ta có:

$$\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{AO} \cdot (\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DI}) = \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{DI} = \overrightarrow{AO} \cdot \left(\frac{2}{3} \overrightarrow{DC} \right) = \frac{2}{3} \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 1 \cdot \cos 30^\circ = \frac{1}{2}$$

» **Câu 67.** Cho $\triangle ABC$ đều cạnh là 3. Điểm M thỏa mãn: $MA^2 + MB^2 = 18$, khi đó tập hợp điểm M thuộc đường tròn có bán kính bằng bao nhiêu? Kết quả làm tròn đến hàng phần mười.

👉 **Lời giải**

✓ **Trả lời: 2,6**

Gọi I là trung điểm AB . Đưa về vector bằng cách chèn điểm I vào tính ra

$$2MI^2 + IA^2 + IB^2 = 18 \Leftrightarrow MI^2 = \frac{27}{4} \Leftrightarrow MI = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$



$$R = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Vậy quỹ tích điểm M là đường tròn tâm I bán kính

- » **Câu 68.** Cho $\triangle ABC$ đều cạnh là 3. Điểm M thỏa mãn: $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 18$, khi đó tập hợp điểm M thuộc đường tròn có bán kính bằng bao nhiêu? Kết quả làm tròn đến hàng phần mười.

👉 **Lời giải**

✓ **Trả lời: 1,4**

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC suy ra $GA = GB = GC = \sqrt{3}$

Chèn G vào biến đổi suy ra $3ME^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 = 18 \Leftrightarrow ME^2 = 2 \Leftrightarrow ME = \sqrt{2}$

Vậy quỹ tích điểm M là đường tròn tâm E bán kính $R = \sqrt{2}$.

- » **Câu 69.** Cho $\triangle ABC$ đều cạnh là 3. Điểm M thỏa mãn: $2MA^2 + MB^2 + MC^2 = 18$, khi đó tập hợp điểm M thuộc đường tròn có bán kính bằng bao nhiêu? Kết quả làm tròn đến hàng phần mười.

👉 **Lời giải**

✓ **Trả lời: 1,7**

Gọi N là điểm thỏa mãn $2\vec{NA} + \vec{NB} + \vec{NC} = \vec{0}$ và D là trung điểm BC . Suy ra N

là trung điểm AD . $NA = ND = AD : 2 = \frac{3\sqrt{3}}{4}$; $NB = NC = \frac{\sqrt{39}}{4}$;

Chèn N vào để ta được $4MN^2 + 2NA^2 + NB^2 + NC^2 = 18$ suy ra $MN = \frac{\sqrt{183}}{8}$

Vậy tập hợp điểm M thỏa đường tròn tâm N bán kính $R = MN = \frac{\sqrt{183}}{8}$

- » **Câu 70.** Cho tam giác ABC . Gọi M là trung điểm BC và H là trực tâm. Biết $\vec{MH} \cdot \vec{MA} = kBC^2$. Khi đó $k = ?$

👉 **Lời giải**

✓ **Trả lời: 0,25**

Ta có M là trung điểm BC

$$\Rightarrow \vec{AM} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC}); \vec{HM} = \frac{1}{2}(\vec{HB} + \vec{HC})$$

$$\Rightarrow \vec{AM} \cdot \vec{HM} = \frac{1}{4}(\vec{AB} + \vec{AC}) \cdot (\vec{HB} + \vec{HC}) = \frac{1}{4}(\vec{AB} \cdot \vec{HB} + \vec{AB} \cdot \vec{HC} + \vec{AC} \cdot \vec{HB} + \vec{AC} \cdot \vec{HC})$$

$$= \frac{1}{4}(\vec{AB} \cdot \vec{HB} + \vec{AC} \cdot \vec{HC}) = \frac{1}{4}[\vec{AB}(\vec{HC} + \vec{CB}) + \vec{AC}(\vec{HB} + \vec{BC})]$$

$$= \frac{1}{4}(\vec{AB} \cdot \vec{HC} + \vec{AB} \cdot \vec{CB} + \vec{AC} \cdot \vec{HB} + \vec{AC} \cdot \vec{BC}) = \frac{1}{4}(\vec{AB} \cdot \vec{CB} + \vec{AC} \cdot \vec{BC})$$

$$= \frac{1}{4}(\vec{AB} \cdot \vec{CB} - \vec{AC} \cdot \vec{CB}) = \frac{1}{4}\vec{CB}(\vec{AB} - \vec{AC}) = \frac{1}{4}\vec{CB}^2 = \frac{1}{4}BC^2$$

- » **Câu 71.** Cho tứ giác $ABCD$ có $\vec{AB}^2 + \vec{CD}^2 = \vec{BC}^2 + \vec{AD}^2$. Tính $\vec{DB} \cdot \vec{AC}$

👉 **Lời giải**

✓ **Trả lời: 0**

$$\vec{AB}^2 + \vec{CD}^2 = \vec{BC}^2 + \vec{AD}^2 \Leftrightarrow \vec{AB}_2 + \vec{CD}_2 = \vec{BC}_2 + \vec{AD}_2$$



$$\begin{aligned}
 &\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{BC} = 0 \\
 &\Leftrightarrow (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{BC})(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC}) = 0 \\
 &\Leftrightarrow \overrightarrow{DB}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) + \overrightarrow{BD}(\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{BC}) = 0 \\
 &\Leftrightarrow \overrightarrow{DB}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) - \overrightarrow{DB}(\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{BC}) = 0 \\
 &\Leftrightarrow \overrightarrow{DB}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC}) = 0 \\
 &\Leftrightarrow \overrightarrow{DB}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{DB}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{DB} \cdot 2\overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0
 \end{aligned}$$

----- Hết -----

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com
<https://www.vnteach.com>