

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO THANH HOÁ
TRƯỜNG THPT THỌ XUÂN 5

SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM

**HƯỚNG DẪN HỌC SINH TIẾP CẬN NHÓM BÀI TOÁN TRẮC
NGHIỆM TRONG TRƯỜNG SỐ PHỨC ĐƯỢC PHÁT TRIỂN TỪ MỘT
SỐ BÀI TOÁN CỰC TRỊ HÌNH HỌC TRONG MẶT PHẪNG**

Người thực hiện: Lê Quang Vũ
Chức vụ: Giáo viên
SKKN thuộc lĩnh vực (môn): Toán

THANH HOÁ, NĂM 2017

MỤC LỤC

1. Mở đầu.....	Trang 2.
2. Nội dung sáng kiến.....	Trang 3.
2.1. Cơ sở lý luận của SKKN	Trang 3.
2.2. Thực trạng vấn đề trước khi áp dụng SKKN.....	Trang 4.
2.3. Các sáng kiến kinh nghiệm để giải quyết vấn đề.....	Trang 4.
2.3.1. Các bài toán cực trị liên quan đến đường thẳng.....	Trang 4.
2.3.2. Các bài toán cực trị liên quan đến đường tròn.....	Trang 10.
2.3.3. Các bài toán cực trị liên quan đến đường E-lip.....	Trang 18.
2.4. Hiệu quả của SKKN đối với hoạt động giáo dục, với bản thân, đồng nghiệp và nhà trường	Trang 19.
3. Kết luận, kiến nghị.....	Trang 19.

1. Mở đầu

1.1. Lí do chọn đề tài

Từ năm học 2016-2017, trong kỳ thi trung học phổ thông quốc gia, đề thi môn toán thay đổi từ hình thức tự luận sang hình thức trắc nghiệm khách quan. Chính điều này đã tạo ra một sự chuyển biến lớn trong cả dạy và học ở các nhà trường. Để đạt được điểm số cao trong kỳ thi này, học sinh không cần chỉ nắm vững kiến thức cơ bản, làm thuần thục các dạng toán quan trọng mà cần có khả năng logic cao để tiếp cận vấn đề một cách nhanh nhất, chọn được cách giải quyết nhanh nhất đến đáp án. Đây thực sự là một thách thức lớn.

Trong quá trình giảng dạy, ôn thi, làm đề tôi phát hiện ra rằng: rất nhiều bài toán khó về số phức đều được xây dựng trên cơ sở một số bài toán cực trị hình học trong mặt phẳng, nếu học sinh tiếp cận theo hướng đại số thuần túy về tính toán sẽ rất khó giải quyết được vấn đề trong thời gian ngắn.

Chính vì những lý do trên nên tôi tổng hợp các kinh nghiệm trong quá trình giảng dạy của mình, sưu tầm các dạng bài điển hình hay gặp trong các đề thi để viết thành tài liệu: **HƯỚNG DẪN HỌC SINH TIẾP CẬN NHÓM BÀI TOÁN TRẮC NGHIỆM TRÊN TRƯỜNG SỐ PHỨC ĐƯỢC PHÁT TRIỂN TỪ MỘT SỐ BÀI TOÁN CỰC TRỊ HÌNH HỌC TRONG MẶT PHẪNG.**

1.2. Mục đích nghiên cứu

Tôi chọn đề tài sáng kiến kinh nghiệm này trước hết nhằm mục đích tạo một tài liệu tham khảo nhỏ giúp các em học sinh khá giỏi trong nhà trường có thêm một phương pháp tiếp cận nhanh và hiệu quả khi gặp những bài toán cực trị trên tập số phức. Sau đó là khuyến khích các em dựa vào những tính chất cực trị hình học đã học để sáng tạo ra những bài tập hay trên tập số phức, qua đó giúp các em phát triển tư duy logic, tổng hợp các phần, các chương đã học để chọn nhanh được hướng tiếp cận đối với các câu hỏi trắc nghiệm ở mức độ vận dụng trong các đề thi.

1.3. Đối tượng nghiên cứu

Đối tượng nghiên cứu của đề tài chủ yếu tập trung vào mối quan hệ giữa số phức với hình học tọa độ trong mặt phẳng, qua đó chọn lọc một số bài toán cực trị đặc trưng trong hình học rồi chuyển hóa nó thành các bài toán cực trị trong tập số phức.

1.4. Phương pháp nghiên cứu

Để giúp học sinh có cách giải phù hợp với các bài toán cực trị số phức, trước hết giáo viên cần yêu cầu học sinh ôn tập các kiến thức hình học liên quan. Đặc biệt với riêng chuyên đề này giáo viên phải yêu cầu học sinh nắm vững mối quan hệ giữa số phức với hình học tọa độ, các công thức chuyển đổi từ số phức sang hình học. Sau đó giáo viên chọn một số bài toán điển hình, các dữ kiện, yêu cầu thường gặp để học sinh luyện tập nhiều, tạo ra “phản xạ” cho các em khi gặp loại toán này. Bước cuối cùng là yêu cầu các em sáng tạo thêm các đề toán từ bài toán điển hình này cũng như từ các bài toán khác mà các em đã từng gặp.

2. Nội dung sáng kiến kinh nghiệm

2.1. Cơ sở lý luận của sáng kiến kinh nghiệm

2.1.1. Một số phép toán mở rộng đối với mô-đun số phức và số phức liên hợp

Cho hai số phức z, w . Ta chứng minh được các tính chất sau:[1]¹

$\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$	$ z = \overline{z} $
$\overline{z - w} = \overline{z} - \overline{w}$	$z \cdot \overline{z} = z ^2$
$\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$	$ z \cdot w = z \cdot w $
$\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$	$\left \frac{z}{w}\right = \frac{ z }{ w }$
$(\overline{z})^n = \overline{(z^n)}$	$ z^n = z ^n$

2.1.2. Biểu diễn hình học của số phức

- Biểu diễn hình học của số phức $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$ trên mặt phẳng tọa độ là điểm $M(x; y)$. Khi đó $|z| = OM$.
- Biểu diễn hình học của hai số phức z và $\overline{z}$ là hai điểm đối xứng nhau qua trục Ox nên nếu quỹ tích điểm biểu diễn hai số phức z và $\overline{z}$ lần lượt là các hình $(C), (C')$ thì hai hình đó cũng đối xứng nhau qua trục Ox .

- Nếu điểm biểu diễn của hai số phức z_1, z_2 là A, B thì
$$\begin{cases} |z_1 - z_2| = AB \\ |z_1 + z_2| = |\vec{OA} + \vec{OB}| = 2OM \end{cases}$$
 với M là trung điểm đoạn AB .

- Cho điểm biểu diễn của hai số phức z_1, z_2 là A, B . Số phức z thay đổi thỏa mãn $|z - z_1| = |z - z_2|$ thì quỹ tích điểm biểu diễn số phức z là trung trực của đoạn AB .

- Cho điểm biểu diễn của hai số phức z_1, z_2 là A, B . Số phức z thay đổi thỏa mãn $|z - z_1| = |\overline{z} - z_2|$ thì quỹ tích điểm biểu diễn số phức z là một đường thẳng.

- Cho z_0 là một số phức không đổi có điểm biểu diễn là I , một số phức z thay đổi thỏa mãn $|z - z_0| = R > 0$ thì quỹ tích điểm biểu diễn số phức z chính là đường tròn tâm I bán kính R .

- Cho z_0 là một số phức không đổi có điểm biểu diễn là I , một số phức z thay đổi thỏa mãn $|z - z_0| < R > 0$ thì quỹ tích điểm biểu diễn số phức z là miền trong đường tròn tâm I bán kính R .

¹ [1] Kết quả được tham khảo ở trang 12, 13, 14 sách “HÀM BIẾN PHỨC” của tác giả Nguyễn Văn Khuê- Lê Mậu Hải

- Cho z_0 là một số phức không đổi có điểm biểu diễn là I , một số phức z thay đổi thỏa mãn $|z - z_0| > R > 0$ thì quỹ tích điểm biểu diễn số phức z là miền ngoài đường tròn tâm I bán kính R .

- Cho hai số phức z_1, z_2 không đổi có điểm biểu diễn là hai điểm A, B . Một số phức z thay đổi thỏa mãn $|z - z_1| + |z - z_2| = a > 0$. Khi đó

+ Nếu $|z_1 - z_2| < a$ thì quỹ tích điểm biểu diễn số phức z là đường E-lip nhận A, B làm hai tiêu điểm và độ dài trục lớn bằng a .

+ Nếu $|z_1 - z_2| = a$ thì quỹ tích điểm biểu diễn số phức z là đoạn thẳng AB .

2.2. Thực trạng vấn đề trước khi áp dụng sáng kiến kinh nghiệm.

Hiện nay khi gặp dạng toán cực trị trên tập số phức được phát triển từ bài toán cực trị hình học thường làm các học sinh kể cả những học sinh giỏi lúng túng từ khâu phát hiện nút thắt mấu chốt cho đến cách xử lý. Đa số các em không nhận ra “bẫy” trong đề bài, sa đà vào tính toán, gây mất thời gian mà thường không thu được kết quả mong đợi.

Khi gặp các bài toán về vấn đề trên, hầu như học sinh mất rất nhiều thời gian để biến đổi bài toán. Một số học sinh do năng lực tư duy hạn chế chưa biết cách phối hợp giữa tư duy hình học và tính toán đại số.

Một thực tế nữa là nhiều học sinh khi làm bài toán loại này ở chương hình học thì làm được khá thành thạo nhưng khi ở chương số phức với ngôn từ, giả thiết khác thì các em lại không phát hiện ra vấn đề cốt lõi, quen thuộc mà rất lúng túng cứ như là gặp những bài toán mới.

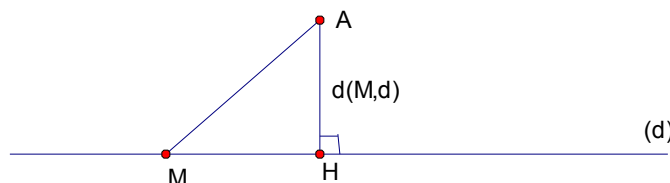
Chính vì vậy người dạy phải hướng dẫn học sinh tìm ra bản chất vấn đề cũng như cách giải đơn giản, dễ thuận lợi kết thúc bài toán.

2.3. Các sáng kiến kinh nghiệm hoặc các giải pháp đã sử dụng để giải quyết vấn đề.

2.3.1. Các bài toán cực trị liên quan đến đường thẳng, đoạn thẳng.

Bài toán 1: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho điểm A và đường thẳng (d) . Điểm M chạy trên đường thẳng (d) sao cho độ dài đoạn AM nhỏ nhất. Khi đó hãy tìm vị trí điểm M và tính độ dài AM .

a. Hướng dẫn giải:



Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm A lên đường thẳng (d) . Khi đó $AM \geq AH$, nên độ dài đoạn AM nhỏ nhất khi và chỉ khi M là hình chiếu vuông góc của điểm A lên đường thẳng (d) và $AM_{\min} = AH = d(M, d)$.

b. Cách tạo và giải một số bài toán cực trị trên tập số phức từ bài toán trên:

- **Tạo giả thiết:** Tạo một điều kiện ràng buộc số phức z sao cho quỹ tích nó là một đường thẳng.

- **Tạo kết luận:** Tìm giá trị nhỏ nhất của mô-đun $|z - z_0|$ với z_0 là một số phức đã biết.

- **Cách giải quyết:** Gọi điểm biểu diễn của số phức z, z_0 lần lượt là M, A . Gọi đường thẳng biểu diễn quỹ tích số phức z là (d) . Khi đó bài toán số phức trở về bài toán hình học nêu ở trên.

- **Nhận xét:** Điểm mấu chốt để tạo ra một bài tập loại này là ta tạo ra được một điều kiện ràng buộc số phức z để quỹ tích biểu diễn nó là đường thẳng. Điều kiện kiểu này khá đa dạng, mà hay gặp có thể kể đến:

+ Cho số phức $z = x + yi (x, y \in \mathbb{R})$ sao cho $ax + by + c = 0 (a, b, c \in \mathbb{R})$.

+ Cho số phức z thỏa mãn $|z - z_1| = |z - z_2|$ với z_1, z_2 là hai số phức đã biết.

c. Ví dụ minh họa:

Ví dụ 1: Cho số phức z có điểm biểu diễn nằm trên đường thẳng $(d): 3x - 4y - 3 = 0$. Tính giá trị nhỏ nhất của $|z|$.

A. $\frac{1}{5}$.

B. $\frac{3}{5}$.

C. $\frac{4}{5}$.

D. $\frac{2}{5}$.

• **Gợi ý:** Gọi M là điểm biểu diễn số phức $z \Rightarrow \text{Min}|z| = OM_{\min} = d(O; d) = \frac{3}{5}$

Ví dụ 2: Cho các số phức z, w thỏa mãn $|z + 2 - 2i| = |z - 4i|, w = iz + 1$. Giá trị nhỏ nhất của $|w|$ là

A. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

B. 2.

C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

D. $2\sqrt{2}$.

• **Gợi ý:** Gọi $A(-2; 2), B(0; 4)$ và M là điểm biểu diễn số phức z . Từ đề bài ta có: $MA = MB$, hay quỹ tích điểm M là đường trung trực đoạn $AB \Rightarrow$ Quỹ tích điểm M là đường thẳng $(d): x + y - 2 = 0$.

Mà $|w| = |iz + 1| = |i| \cdot \left| z + \frac{1}{i} \right| = |z - i| = IM$ với $I(0; 1) \Rightarrow \text{Min}|w| = d(I; d) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ví dụ 3: Cho số phức z không phải số thuần ảo thỏa điều kiện $|z^2 + 4| = |z(z + 2i)|$. Giá trị nhỏ nhất của $|z + i|$ bằng

A. 2.

B. 1.

C. 3.

D. 4.

$$|z^2 + 4| = |z(z + 2i)| \Rightarrow |z - 2i||z + 2i| = |z||z + 2i| \Rightarrow \begin{cases} |z - 2i| = |z| \\ z = 2i(l) \end{cases}$$

- **Gợi ý:** bài toán đã trở về dạng giống Ví dụ 2.

Ví dụ 4: Cho các số phức z thỏa mãn $|z - 2 - 4i| = |\bar{z} - 2i|$. Giá trị nhỏ nhất của $|\bar{z} + 7 - i|$ là

A. $\frac{4\sqrt{10}}{5}$.

B. 3.

C. $\frac{3\sqrt{10}}{5}$.

D. $\sqrt{10}$.

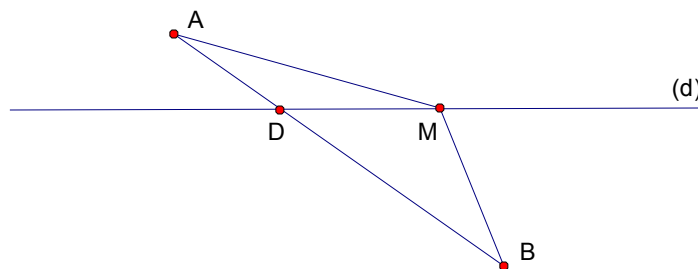
- **Gợi ý:** $\begin{cases} |\bar{z} - 2i| = |\overline{z - 2i}| = |z + 2i| \\ |\bar{z} + 7 - i| = |\overline{z + 7 + i}| = |z + 7 + i| \end{cases}$. Bài toán trở thành: Cho các số phức z thỏa mãn $|z - 2 - 4i| = |z + 2i|$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z + 7 + i|$. Như vậy bài toán đã trở về dạng giống Ví dụ 2.

Bài toán 2: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai điểm phân biệt A, B và đường thẳng (d) . Điểm M chạy trên đường thẳng (d) sao cho tổng độ dài đoạn $AM + BM$ nhỏ nhất. Khi đó hãy tìm vị trí điểm M và tính $AM + BM$.

a. Hướng dẫn giải:

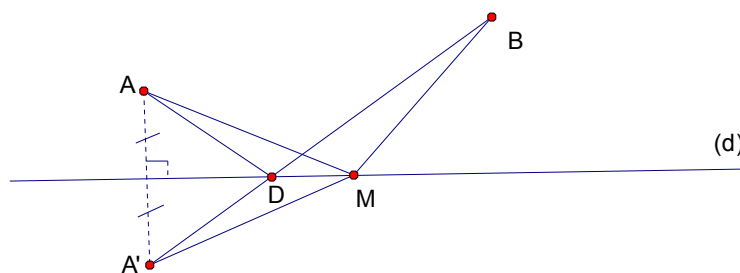
Ta xét hai trường hợp

+) Trường hợp 1 : hai điểm A, B nằm về hai phía đối với đường thẳng (d)



Ta có $MA + MB \geq AB$ nên $(MA + MB)_{\min} = AB$, đạt được khi $M = AB \cap (d)$.

+) Trường hợp 2 : hai điểm A, B cùng phía đối với đường thẳng (d)



Gọi điểm A' là điểm đối xứng của điểm A qua đường thẳng (d) . Khi đó $MA = MA' \Rightarrow MA + MB = MA' + MB \geq A'B$ nên $(MA + MB)_{\min} = A'B$, đạt được khi $M = A'B \cap (d)$.

b. Cách tạo và giải một số bài toán cực trị trên tập số phức từ bài toán trên:

- **Tạo giả thiết:** Tạo một điều kiện ràng buộc số phức z sao cho quỹ tích nó là một đường thẳng.

- **Tạo kết luận:** Tìm giá trị nhỏ nhất của mô-đun $|z - z_1| + |z - z_2|$ với z_1, z_2 là một số phức đã biết.

- **Cách giải quyết:** Gọi điểm biểu diễn của số phức z, z_1, z_2 lần lượt là M, A, B . Gọi đường thẳng biểu diễn quỹ tích số phức z là (d) . Khi đó bài toán số phức trở về bài toán hình học nêu ở trên.

- **Nhận xét:** Điểm mấu chốt để tạo ra một bài tập loại này là phát hiện nhanh yếu tố hình học ở giả thiết và kết luận, vẽ các yếu tố hình học lên hệ trục tọa độ để xác định nhanh vị trí của A, B với đường thẳng (d) .

c. Ví dụ minh họa:

Ví dụ 5: Cho các số phức z thỏa mãn $|z - 1| = |z + 1|$. Giá trị nhỏ nhất của $|z + 2 - 4i| + |z - 4 - 6i|$ là

- A. $\sqrt{10} + \sqrt{5}$. B. $\sqrt{13}$. C. $2\sqrt{5}$ D. $2\sqrt{10}$.

- **Gợi ý:** Gọi M là điểm biểu diễn số phức z , từ điều kiện $|z - 1| = |z + 1|$ suy ra được quỹ tích điểm M là trục Oy . Đặt $A(-2; 4), B(4; 6)$ thì A, B nằm về hai phía trục Oy . Khi đó $|z + 2 - 4i| + |z - 4 - 6i| = MA + MB \geq AB = 2\sqrt{10}$.

Ví dụ 6: Cho các số phức z thỏa mãn $|2z + 5 - 4i| = |2z + 3 + 4i|$. Giá trị nhỏ nhất của $|z + 1 - 4i| + |z - 1 - i|$ là

- A. 5 B. $\sqrt{13}$. C. $\sqrt{41}$ D. $\sqrt{10}$.

- **Gợi ý:** Gọi M là điểm biểu diễn số phức z , từ $|2z + 5 - 4i| = |2z + 3 + 4i|$

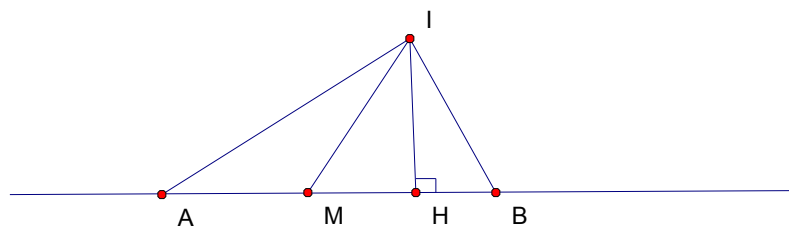
$\Rightarrow \left| z + \frac{5}{2} - 2i \right| = \left| z + \frac{3}{2} + 2i \right|$ suy ra quỹ tích điểm M là đường thẳng
 $(d): x - 4y + 2 = 0$. Đặt $A(-1; 4), B(1; 1)$ thì A, B nằm về cùng một phía với
 đường thẳng (d) . Điểm $A'(-3; -4)$ là điểm đối xứng của điểm A qua đường
 thẳng (d) . Khi đó $|z + 1 - 4i| + |z - 1 - i| = MA + MB = MA' + MB \geq A'B = \sqrt{41}$.

Bài toán 3: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho điểm I và đoạn thẳng AB . Điểm M chạy trên đoạn thẳng AB sao cho độ dài đoạn IM nhỏ nhất. Khi đó hãy tìm vị trí điểm M và tính độ dài IM .

a. Hướng dẫn giải:

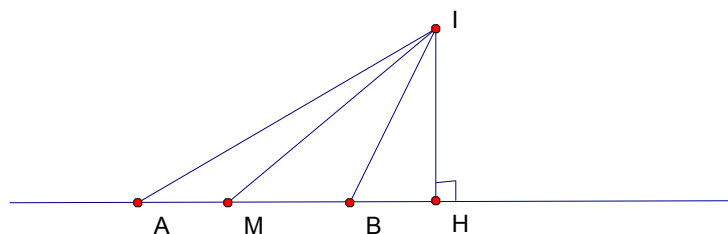
Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm I lên đường thẳng (AB) . Ta xét hai trường hợp

- Trường hợp 1: điểm H nằm trong đoạn AB



Dễ dàng thấy $IM_{\min} = IH$ và $IM_{\max} = \max\{IA; IB\}$.

- Trường hợp 2: điểm H nằm ngoài đoạn AB



Dễ dàng thấy $IM_{\min} = \min\{IA; IB\}$ và $IM_{\max} = \max\{IA; IB\}$.

b. Cách tạo và giải một số bài toán cực trị trên tập số phức từ bài toán trên:

- **Tạo giả thiết:** Tạo một điều kiện ràng buộc số phức z sao cho quỹ tích nó là một đoạn thẳng.

- **Tạo kết luận:** Tìm giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của mô-đun $|z - z_0|$ với z_0 là một số phức đã biết.

- **Cách giải quyết:** Gọi điểm biểu diễn của số phức z, z_0 lần lượt là M, I . Gọi đoạn thẳng biểu diễn quỹ tích số phức z là AB . Khi đó bài toán số phức trở về bài toán hình học nêu ở trên.

- **Nhận xét:** Điểm mấu chốt để tạo ra một bài tập loại này là ta tạo ra được một điều kiện ràng buộc số phức z để quỹ tích biểu diễn nó là đoạn thẳng. Điều kiện kiểu này chủ yếu dựa vào tính chất: điểm M thuộc đoạn thẳng AB khi và chỉ khi $MA + MB = AB$. Tính chất này viết theo ngôn ngữ số phức sẽ có một số dạng sau:

+ Cho số phức z thỏa mãn $|z - z_1| + |z - z_2| = a$ với z_1, z_2 là hai số phức đã biết và $|z_1 - z_2| = a$. (Đây chính là dạng suy biến của Elip như đã trình bày ở phần cơ sở lý thuyết).

+ Cho số phức z thỏa mãn $|z - z_1| + |z - z_2|$ nhỏ nhất với z_1, z_2 là hai số phức đã biết.

Hoặc có thể tạo ra quỹ tích điểm biểu diễn z là phần đường thẳng bị giới hạn ở miền trong đường tròn, elip. Chẳng hạn như:

+ Cho số phức bị ràng buộc bởi điều kiện để quỹ tích của nó là một đường thẳng, điều kiện còn lại là $|z - z_0| \leq r$ hoặc $|z - z_1| + |z - z_2| \leq 2a$.

c. Ví dụ minh họa:

Ví dụ 7: Xét số phức z thỏa mãn $|z + 2 - i| + |z - 4 - 7i| = 6\sqrt{2}$. Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của $|z - 1 + i|$. Tính $P = m + M$.

A. $P = \sqrt{13} + \sqrt{73}$.

B. $P = \frac{5\sqrt{2} + 2\sqrt{73}}{2}$.

C. $P = 5\sqrt{2} + 2\sqrt{73}$.

D. $P = \frac{5\sqrt{2} + \sqrt{73}}{2}$.

- **Gợi ý:** Gọi M là điểm biểu diễn số phức z , gọi $A(-2;1), B(4;7)$. Từ giả thiết $|z + 2 - i| + |z - 4 - 7i| = 6\sqrt{2} \Leftrightarrow MA + MB = AB \Rightarrow$ Quỹ tích điểm M chính là đoạn thẳng AB . Gọi $I(1;-1)$ thì $|z - 1 + i| = IM$. Vẽ hình trực quan để kiểm tra hình chiếu của I lên đường thẳng (AB) nằm trong đoạn AB . Lại có:

$$IA = \sqrt{13}, IB = \sqrt{73}, d(I; AB) = \frac{5\sqrt{2}}{2} \Rightarrow P = \frac{5\sqrt{2} + 2\sqrt{73}}{2}$$

Ví dụ 8: Xét số phức z thỏa mãn $|z + 1 - 2i| + |z - 2 + 2i|$ nhỏ nhất. Gọi m, M lần lượt

là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của $|z - 4i|$. Tính $P = \frac{M}{m}$.

A. $P = 2$.

B. $P = 2\sqrt{2}$.

C. $P = 2\sqrt{5}$.

D. $P = 5\sqrt{2}$.

- **Gợi ý:** Gọi M là điểm biểu diễn số phức z , gọi $A(-1;2), B(2;-2)$. Ta có $|z+1-2i|+|z-2+2i|=MA+MB \geq AB$, nghĩa là $|z+1-2i|+|z-2+2i|$ nhỏ nhất thì quỹ tích điểm M chính là đoạn thẳng AB . Gọi $I(0;4)$ thì $|z-4i|=IM$. Vẽ hình trực quan để kiểm tra hình chiếu của I lên đường thẳng (AB) nằm ngoài đoạn AB . Lại có: $IA=\sqrt{5}, IB=2\sqrt{10} \Rightarrow P=2\sqrt{2}$.

Ví dụ 9: Xét số phức z thỏa mãn $\begin{cases} |z+2|=|z-8-8i| \\ |z| \leq 5 \end{cases}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z-4i|$

- A. 4. B. 3. C. $\frac{6\sqrt{5}}{5}$. D. $2\sqrt{5}$.

- **Gợi ý:** Gọi M là điểm biểu diễn số phức z , vì $|z+2|=|z-8-8i|$ nên M thuộc đường thẳng $(d): 2x+y-10=0$, mà $|z| \leq 5$ nên M thuộc miền trong đường tròn $(C): x^2+y^2=25$. Lại có (d) cắt (C) tại hai điểm phân biệt $A(3;4), B(5;0)$ nên quỹ tích điểm M là đoạn thẳng AB . Gọi $I(0;4)$ thì $|z-4i|=IM$, vẽ hình trực quan thấy hình chiếu vuông góc của điểm I lên đường thẳng (d) nằm ngoài đoạn AB mà $IA=\sqrt{41}, IB=3$ nên $|z-4i|_{\min}=3$.

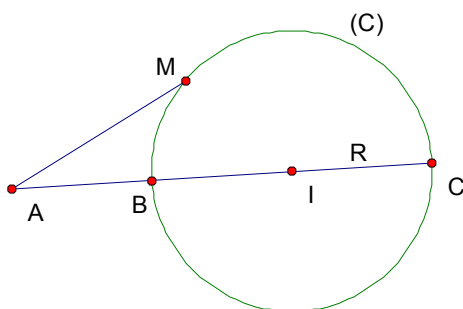
2.3.2 Các bài toán cực trị liên quan đến đường tròn

Bài toán 4: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho điểm A và đường tròn (C) có tâm I bán kính R . Điểm M thay đổi trên đường tròn (C) . Xác định vị trí điểm M để độ dài đoạn AM đạt giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất và tính các giá trị này.

a. Hướng dẫn giải:

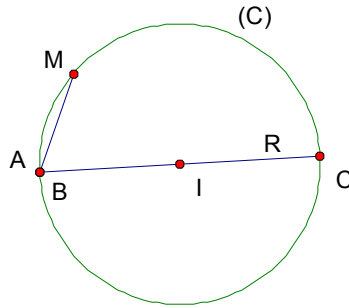
Ta xét ba trường hợp

- Trường hợp 1: điểm A nằm ở miền ngoài đường tròn (C)



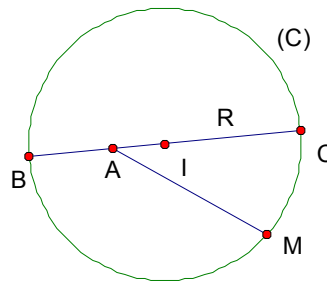
$$AM_{\min} = AB = AI - R \quad \text{và} \quad AM_{\max} = AC = AI + R$$

- Trường hợp 2: điểm A nằm ở trên đường tròn (C)



$$AM_{\min} = 0 \quad \text{và} \quad AM_{\max} = AC = 2R$$

- Trường hợp 3: điểm A nằm ở miền trong đường tròn (C)



$$AM_{\min} = AB = R - AI \quad \text{và} \quad AM_{\max} = AC = AI + R$$

b. Cách tạo và giải một số bài toán cực trị trên tập số phức từ bài toán trên:

- **Tạo giả thiết:** Tạo một điều kiện ràng buộc số phức z sao cho quỹ tích nó là một đường tròn.

- **Tạo kết luận:** Tìm giá trị nhỏ nhất của mô-đun $|z - z_0|$ với z_0 là một số phức đã biết.

- **Cách giải quyết:** Gọi điểm biểu diễn của số phức z, z_0 lần lượt là M, A . Gọi đường tròn biểu diễn quỹ tích số phức z là (C) . Khi đó bài toán số phức trở về bài toán hình học nêu ở trên.

- **Nhận xét:** Điểm mấu chốt để tạo ra một bài tập loại này là ta tạo ra được một điều kiện ràng buộc số phức z để quỹ tích biểu diễn nó là đường tròn. Điều kiện kiểu này khá đa dạng, mà hay gặp có thể kể đến:

+ Cho số phức z thỏa mãn $|z - z_0| = R$ với z_0 là hai số phức đã biết.

+ Cho số phức z thỏa mãn $|z - z_1| = k|z - z_2|$ với z_1, z_2 là hai số phức đã biết và $k > 0$.

c. Ví dụ minh họa:

Ví dụ 10: Cho số phức z có $|z| = 2$ thì số phức $w = z + 3i$ có modun nhỏ nhất và lớn nhất lần lượt là

- A. 2 và 5. B. 1 và 6. C. 2 và 6. D. 1 và 5.

- **Gợi ý:** Gọi M là điểm biểu diễn số phức z . Vì $|z| = 2$ nên quỹ tích điểm M là đường tròn (C) tâm O bán kính $R = 2$. Đặt $A(0; -3)$ thì $|w| = |z + 3i| = AM$. Để thấy điểm A nằm ngoài đường tròn (C) nên $|w|_{\min} = AM_{\min} = AO - R = 1$ và $|w|_{\max} = AM_{\max} = AO + R = 5$.

Ví dụ 11: Cho số phức z thỏa $|z - 3 + 4i| = 2$ và $w = 2z + 1 - i$. Khi đó $|w|$ có giá trị lớn nhất là:

- A. $16 + \sqrt{74}$. B. $2 + \sqrt{130}$. C. $4 + \sqrt{74}$. D. $4 + \sqrt{130}$.

- **Gợi ý:** Gọi M là điểm biểu diễn số phức z . Vì $|z - 3 + 4i| = 2$ nên quỹ tích điểm M là đường tròn (C) tâm $I(3; -4)$ bán kính $R = 2$. Đặt $A(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$ thì $|w| = |2z + 1 - i| = 2\left|z + \frac{1}{2} - \frac{i}{2}\right| = 2AM$. Để thấy điểm A nằm ngoài đường tròn (C) nên $|w|_{\max} = 2AM_{\max} = 2(AI + R) = 4 + \sqrt{130}$.

Ví dụ 12: Cho số phức z , tìm giá trị lớn nhất của $|z|$ biết rằng z thỏa mãn điều

kiện $\left| \frac{-2 - 3i}{3 - 2i}z + 1 \right| = 1$

- A. 3. B. 2. C. 1. D. $\sqrt{2}$.

- **Gợi ý:** Gọi M là điểm biểu diễn số phức $z \Rightarrow |z| = OM$. Theo bài ra : $\left| \frac{-2 - 3i}{3 - 2i}z + 1 \right| = 1 \Leftrightarrow \left| \frac{-2 - 3i}{3 - 2i} \right| \left| z + \frac{3 - 2i}{-2 - 3i} \right| = 1 \Leftrightarrow |z + i| = 1$ nên quỹ tích điểm M là đường tròn (C) tâm $I(0; -1)$ bán kính $R = 1$. Để thấy điểm O nằm trên đường tròn (C) nên $|z|_{\max} = 2R = 2$.

Ví dụ 13: Cho số phức z thỏa mãn $|z - 3| = 2|z|$ và $\min \left| z + \frac{3}{2} + 2i \right| = a + b\sqrt{2}$.

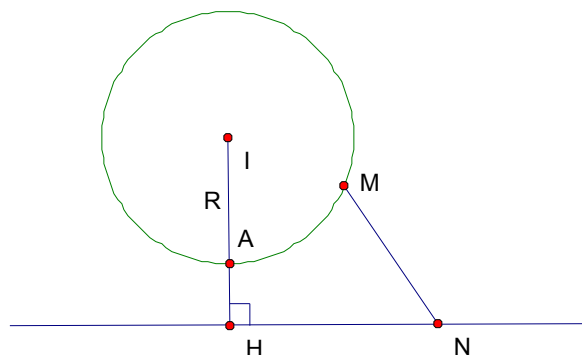
Tính $a + b$.

- A. 1. B. $2\sqrt{2}$. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{4}{3}$.

- Gợi ý:** Đặt $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$. Từ $|z - 3| = 2|z| \Rightarrow (x - 3)^2 + y^2 = 2(x^2 + y^2) \Rightarrow x^2 + y^2 + 6x - 9 = 0 \Rightarrow (x + 3)^2 + y^2 = 18 \Rightarrow |z + 3| = 3\sqrt{2}$. Gọi M là điểm biểu diễn số phức z thì quỹ tích M là đường tròn tâm $I(-3; 0)$, bán kính $R = 3\sqrt{2}$. Đặt $A\left(-\frac{3}{2}; -2\right)$ thì $\left|z + \frac{3}{2} + 2i\right| = AM$. Dễ thấy điểm A nằm ở miền trong đường tròn (C) nên $AM_{\min} = R - AI = -\frac{5}{2} + 3\sqrt{2} \Rightarrow a + b = \frac{1}{2}$.

Bài toán 5: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng (d) và đường tròn (C) có tâm I bán kính R không có điểm chung. Điểm M thay đổi trên đường tròn (C) , điểm N thay đổi trên đường thẳng (d) . Xác định vị trí hai điểm M, N để độ dài đoạn MN giá trị nhỏ nhất và tính các giá trị này.

a. Hướng dẫn giải:



$$MN_{\min} = AH = d(I, d) - R$$

b. Cách tạo và giải một số bài toán cực trị trên tập số phức từ bài toán trên:

- **Tạo giả thiết:** Tạo một điều kiện ràng buộc số phức z_1 sao cho quỹ tích điểm biểu diễn nó là một đường tròn, tạo một điều kiện ràng buộc số phức z_2 sao cho quỹ tích điểm biểu diễn nó là một đường thẳng.

- **Tạo kết luận:** Tìm giá trị nhỏ nhất của mô-đun $|z_1 - z_2|$.

- **Cách giải quyết:** Gọi điểm biểu diễn của số phức z_1, z_2 lần lượt là M, N . Gọi đường tròn biểu diễn quỹ tích số phức z_1 là (C) , đường thẳng biểu diễn số phức z_2 là (d) . Khi đó bài toán số phức trở về bài toán hình học nêu ở trên.

- **Nhận xét:** Khi học sinh đã nắm vững bài toán 1 và 3 thì cũng sẽ dễ dàng hình dung được con đường hình học để giải quyết bài toán này.

c. Ví dụ minh họa:

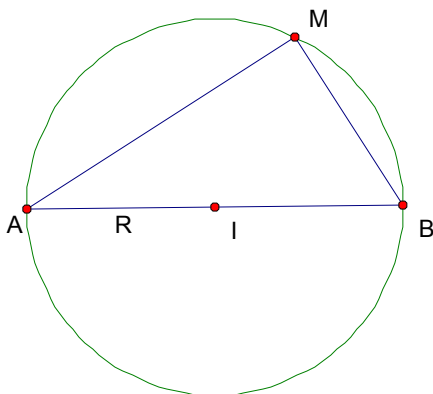
Ví dụ 14: Xét hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn
$$\begin{cases} |z_1 - i| = |z_1 + 1| \\ |z_2 - 1 - i| = 1 \end{cases}$$
. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z_1 - z_2|$.

- A. $\sqrt{2}$. B. 1. C. $\sqrt{2} - 1$. D. $\frac{1}{2}$.

- **Gợi ý:** Gọi M, N lần lượt là điểm biểu diễn của hai số phức z_1, z_2 . Theo bài ra
$$\begin{cases} |z_1 - i| = |z_1 + 1| \\ |z_2 - 1 - i| = 1 \end{cases}$$
, suy ra quỹ tích điểm M là đường thẳng $(d): x + y = 0$ và quỹ tích điểm N là đường tròn (C) tâm $I(1;1)$ có bán kính $R = 1$. Vẽ hình trực quan dễ thấy (C) và (d) không có điểm chung, mà $|z_1 - z_2| = MN$ nên $|z_1 - z_2|_{\min} = MN_{\min} = d(I, d) - R = \sqrt{2} - 1$.

Bài toán 6: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường tròn (C) có tâm I bán kính R . Đoạn AB là một đường kính của (C) . Điểm M thay đổi trên đường tròn (C) . Xác định vị trí điểm M để tổng độ dài $k.MA + l.MB$ (với $k \geq l > 0$) đạt giá trị nhỏ nhất và tính giá trị này.

a. Hướng dẫn giải:



Ta có : $k \geq l > 0 \Rightarrow kMA + lMB \geq l(MA + MB) \geq lAB$, dấu bằng xảy ra khi $M \equiv A$.

b. Cách tạo và giải một số bài toán cực trị trên tập số phức từ bài toán trên:

- **Tạo giả thiết:** Tạo một điều kiện ràng buộc số phức z sao cho quỹ tích nó là một đường tròn.

- **Tạo kết luận:** Tìm giá trị nhỏ nhất của mô-đun $k|z - z_1| + l|z - z_2|$ với z_1, z_2 là hai số phức đã biết mà đoạn nối hai điểm biểu diễn của chúng là một đường kính của đường tròn biểu diễn số phức z .

- **Cách giải quyết:** Gọi điểm biểu diễn của số phức z, z_1, z_2 lần lượt là M, A, B . Gọi đường tròn biểu diễn quỹ tích số phức z là (C) . Khi đó bài toán số phức trở về bài toán hình học nêu ở trên.

- **Nhận xét:** Điểm mấu chốt để tạo ra một bài tập loại này là chọn được z_1, z_2 sao cho đoạn nối điểm biểu diễn chúng là đường kính đường tròn.

c. Ví dụ minh họa:

Ví dụ 15: Cho số phức z thỏa mãn $|z| = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = |z + 1| + 2|z - 1|$.

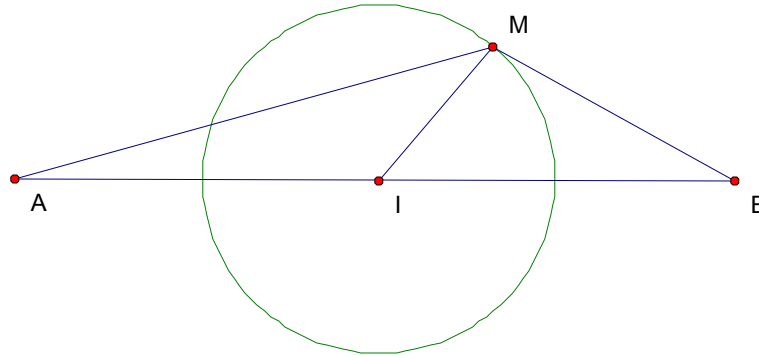
A. $\min T = 2\sqrt{5}$. B. $\min T = 2$. C. $\min T = \sqrt{5}$. D. $\min T = \sqrt{2}$.

- **Gợi ý:** Gọi M là điểm biểu diễn số phức z . Theo bài ra $|z| = 1$ nên quỹ tích điểm M là đường tròn (C) tâm O bán kính $R = 1$. Đặt $A(-1; 0), B(1; 0)$, vẽ hình trực quan dễ thấy AB là một đường kính của đường tròn (C) . Khi đó $T = |z + 1| + 2|z - 1| = MA + 2MB \geq MA + MB \geq AB = 2$, dấu bằng xảy ra khi $M \equiv B$. Suy ra $\min T = 2$.

Bài toán 7: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường tròn (C) có tâm I bán kính R . Đoạn AB cố định nhận điểm I làm trung điểm. Điểm M thay đổi trên đường

tròn (C) . Xác định vị trí điểm M để tổng độ dài $k.MA + l.MB$ (với $k > 0, l > 0$) đạt giá trị lớn nhất và tính giá trị này.

a. Hướng dẫn giải:



$$MI^2 = \frac{MA^2 + MB^2}{2} - \frac{AB^2}{4}$$

Theo công thức đường trung tuyến ta có

$$\Rightarrow MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2} = a = \text{const}$$

Lại có: $k.MA + l.MB \leq \sqrt{k^2 + l^2} \cdot \sqrt{MA^2 + MB^2} = \sqrt{k^2 + l^2} \cdot \sqrt{a}$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ

khi $\frac{MA}{k} = \frac{MB}{l} \Rightarrow MA = \frac{k}{l} MB \Rightarrow \left(\frac{k^2 + l^2}{l}\right) MB = \sqrt{k^2 + l^2} \cdot \sqrt{a}$, hay M là giao điểm của

đường (C) với đường tròn tâm B bán kính $\frac{l\sqrt{a}}{\sqrt{k^2 + l^2}}$.

b. Cách tạo và giải một bài toán cực trị trên tập số phức từ bài toán trên:

- **Tạo giả thiết:** Tạo một điều kiện ràng buộc số phức z sao cho quỹ tích nó là một đường tròn.

- **Tạo kết luận:** Tìm giá trị nhỏ nhất của mô-đun $k|z - z_1| + l|z - z_2|$ với z_1, z_2 là hai số phức đã biết mà đoạn nối hai điểm biểu diễn của chúng nhận tâm của đường tròn biểu diễn số phức z làm trung điểm.

- **Cách giải quyết:** Gọi điểm biểu diễn của số phức z, z_1, z_2 lần lượt là M, A, B . Gọi đường tròn biểu diễn quỹ tích số phức z là (C) . Khi đó bài toán số phức trở về bài toán hình học nêu ở trên.

- **Nhận xét:** Điểm mấu chốt để tạo ra một bài tập loại này là chọn được z_1, z_2 sao cho đoạn nối điểm biểu diễn chúng là đường kính đường tròn (C) ; đồng thời hai số

thực k, l phải chọn cẩn thận để đường tròn tâm B bán kính $\frac{2Rl}{\sqrt{k^2 + l^2}}$ và đường tròn

(C) có điểm chung, nghĩa là các đánh giá bất đẳng thức ở lời giải trên xảy ra được dấu bằng.

c. Ví dụ minh họa:

Ví dụ 16: Cho số phức z thỏa mãn $|z|=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T=|z+1|+2|z-1|$.

- A. $\max T=2\sqrt{5}$ B. $\max T=2\sqrt{10}$ C. $\max T=3\sqrt{5}$ D. $\max T=3\sqrt{2}$

- **Gợi ý:** Gọi M là điểm biểu diễn số phức z . Theo bài ra $|z|=1$ nên quỹ tích điểm M là đường tròn (C) tâm O bán kính $R=1$. Đặt $A(-1;0), B(1;0)$, vẽ hình trực quan dễ thấy AB nhận O làm trung điểm nên trong $\triangle MAB$ ta có

$$MO^2 = \frac{MA^2 + MB^2}{2} - \frac{AB^2}{4} \Rightarrow MA^2 + MB^2 = 2MO^2 + \frac{AB^2}{2} = 4. \text{ Khi đó}$$

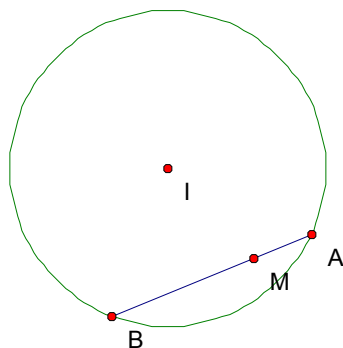
$$T = |z+1| + 2|z-1| = MA + 2MB \leq \sqrt{1^2 + 2^2} \cdot \sqrt{MA^2 + MB^2} = 2\sqrt{5}, \text{ dấu bằng xảy ra}$$

$$\text{khi } MB = 2MA \Rightarrow MA = \frac{2\sqrt{5}}{5} \Rightarrow A \text{ là giao điểm của đường tròn (C) với}$$

$$\text{đường tròn tâm } A \text{ bán kính } \frac{2\sqrt{5}}{5}. \text{ Suy ra } \max T = 2\sqrt{5}.$$

Bài toán 8: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường tròn (C) có tâm I bán kính R . Điểm M cố định nằm ở miền trong đường tròn; hai điểm A, B thay đổi trên (C) sao cho ba điểm M, A, B thẳng hàng. Xác định vị trí hai điểm A, B để tổng độ dài $k.MA + l.MB$ (với $k > 0, l > 0$) giá trị nhỏ nhất và tính giá trị này.

a. Hướng dẫn giải:



Ta có tích $MA.MB$ chính là độ lớn phương tích của điểm M với đường tròn (C), suy ra $MA.MB = R^2 - MI^2$. Nên $k.MA + l.MB \geq 2\sqrt{kl.MA.MB} = 2\sqrt{kl(R^2 - MI^2)}$, dấu

bằng xảy ra khi và chỉ khi $kMA = lMB = \sqrt{kl(R^2 - MI^2)} \Rightarrow MA = \sqrt{\frac{l}{k}(R^2 - MI^2)}$ hay A

là giao điểm của đường tròn tâm M bán kính $\sqrt{\frac{l}{k}(R^2 - MI^2)}$ với đường tròn (C) .

b. Cách tạo và giải một số bài toán cực trị trên tập số phức từ bài toán trên:

- **Tạo giả thiết:** Tạo một điều kiện ràng buộc hai số phức z_1, z_2 sao cho quỹ tích điểm biểu diễn chúng cùng là một đường tròn. Chọn một số phức z_0 có điểm biểu diễn nằm ở miền trong đường tròn biểu diễn z_1, z_2 . Tạo một điều kiện ràng buộc để ba điểm biểu diễn z_0, z_1, z_2 thẳng hàng.

- **Tạo kết luận:** Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng mô-đun $k|z_0 - z_1| + l|z_0 - z_2|$.

- **Cách giải quyết:** Gọi điểm biểu diễn của số phức z_0, z_1, z_2 lần lượt là M, A, B . Gọi đường tròn biểu diễn quỹ tích hai số phức z_1, z_2 là (C) . Khi đó bài toán số phức trở về bài toán hình học nêu ở trên.

- **Nhận xét:** Điểm mấu chốt để tạo ra một bài tập loại này là tạo được điều kiện ràng buộc để ba điểm biểu diễn ba số phức z_0, z_1, z_2 thẳng hàng; đồng thời hai số thực k, l và số phức z_0 phải chọn cẩn thận để đường tròn tâm M bán kính

$\sqrt{\frac{l}{k}(R^2 - MI^2)}$ và đường tròn (C) có điểm chung, nghĩa là các đánh giá bất đẳng thức ở lời giải trên xảy ra được dấu bằng. Điều kiện ràng buộc để ba điểm biểu diễn ba số phức z_0, z_1, z_2 thẳng hàng ta thường sử dụng là $|z_1 - z_0| + |z_2 - z_0| = |z_1 - z_2|$.

c. Ví dụ minh họa:

Ví dụ 17: Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $\begin{cases} |z_1 - 1 - i| = |z_2 - 1 - i| = 1 \\ |z_1 - z_2| = \left| z_1 - 1 - \frac{1}{2}i \right| + \left| z_2 - 1 - \frac{1}{2}i \right| \end{cases}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = |2z_1 - 2 - i| + |2iz_2 + 1 - 2i|$.

A. $\min T = 2\sqrt{5}$. B. $\min T = 2\sqrt{3}$. C. $\min T = 2\sqrt{2}$. D. $\min T = 3\sqrt{2}$.

- **Gợi ý:** Gọi A, B lần lượt là điểm biểu diễn của hai số phức z_1, z_2 . Theo bài ra $|z_1 - 1 - i| = |z_2 - 1 - i| = 1$, suy ra quỹ tích điểm A và quỹ tích điểm B là đường tròn (C) tâm $I(1;1)$ có bán kính $R=1$. Đặt điểm $M\left(1; \frac{1}{2}\right)$, ta có

$$|z_1 - z_2| = \left| z_1 - 1 - \frac{1}{2}i \right| + \left| z_2 - 1 - \frac{1}{2}i \right| \Rightarrow MA + MB = AB \Rightarrow \text{điểm } M \text{ thuộc đoạn } AB,$$

nên theo công thức phương tích ta có $MA \cdot MB = R^2 - IM^2 = \frac{3}{4}$. Lại có

$$T = |2z_1 - 2 - i| + |2iz_2 + 1 - 2i| = 2 \left| z_1 - 1 - \frac{i}{2} \right| + |2i| \left| z_2 + \frac{1}{2i} - 1 \right| = 2 \left(\left| z_1 - 1 - \frac{i}{2} \right| + \left| z_2 - 1 - \frac{i}{2} \right| \right)$$

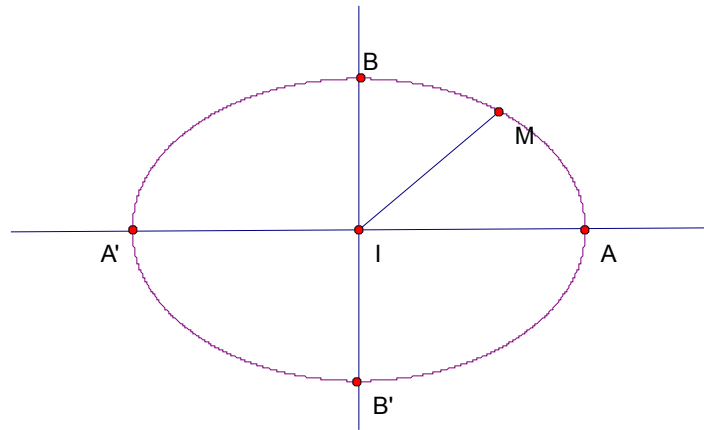
$$\Rightarrow T = 2(MA + MB) \geq 4\sqrt{MA \cdot MB} = 2\sqrt{3},$$

dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $MA = MB$ hay A, B là giao điểm của đường thẳng qua M vuông góc với IM và đường tròn (C) .

2.3.3. Các bài toán cực trị liên quan tới E-lip

Bài toán 9: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho E-lip (E) có độ dài trục lớn là $2a$, độ dài trục bé là $2b$, tâm đối xứng là I ; điểm M thay đổi trên (E) . Xác định vị trí điểm M sao cho độ dài đoạn IM lớn nhất, nhỏ nhất và tính các giá trị đó.

a. Hướng dẫn giải:



$$IM_{\max} = IA = IA' = a \quad \text{và} \quad IM_{\min} = IB = IB' = b$$

b. Cách tạo và giải một số bài toán cực trị trên tập số phức từ bài toán trên:

- **Tạo giả thiết:** Tạo một điều kiện ràng buộc số phức z sao cho quỹ tích điểm biểu diễn của nó là một đường E-lip.

- **Tạo kết luận:** Tìm giá trị nhỏ nhất mô-đun $|z - z_0|$ với z_0 là số phức có điểm biểu diễn là tâm của E-lip.

- **Cách giải quyết:** Gọi điểm biểu diễn của hai số phức z_0, z lần lượt là I, M . Gọi đường E-lip biểu diễn quỹ tích số phức z là (E) . Khi đó bài toán số phức trở về bài toán hình học nêu ở trên.

- **Nhận xét:** Điểm mấu chốt để tạo ra một bài tập loại này là tạo được điều kiện ràng buộc để quỹ tích điểm biểu diễn số phức z là một E-lip; đồng thời số phức z_0 phải chọn cẩn thận để điểm biểu diễn nó đúng là tâm của E-lip.

c. Ví dụ minh họa:

Ví dụ 18: Cho số phức z thỏa mãn $|z - 2 - i| + |z - 4 + 3i| = 10$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $|z - 3 + i|$. Tính $T = M^2 + m^2$

A. $T = 40$

B. $T = 45$

C. $T = 10\sqrt{5}$

D. $T = 2\sqrt{10}$

- **Gợi ý:** Gọi M là điểm biểu diễn số phức z . Đặt $A(2;1), B(4;-3) \Rightarrow AB = 2\sqrt{5}$

. Theo bài ra $|z - 2 - i| + |z - 4 + 3i| = 10 \Rightarrow MA + MB = 10$ nên quỹ tích điểm M là

đường E-lip có hai tiêu điểm A, B , độ dài trục lớn bằng 10, tiêu cự bằng $2\sqrt{5}$

, độ dài trục bé bằng $4\sqrt{5}$. Đặt $I(3;-1)$, dễ thấy I là tâm của E-lip và

$$|z - 3 + i| = IM \Rightarrow |z - 3 + i|_{\min} = IM_{\min} = 2\sqrt{5}, |z - 3 + i|_{\max} = IM_{\max} = 5.$$

Suy ra

$$T = M^2 + m^2 = 45.$$

2.4. Hiệu quả của sáng kiến kinh nghiệm đối với hoạt động giáo dục, với bản thân, đồng nghiệp và nhà trường.

Trong quá trình giảng dạy, tôi nhận thấy rằng: sau khi đưa ra hệ thống bài tập trên, học sinh đã biết vận dụng phương pháp linh hoạt vào các bài toán khác nhau, từ đơn giản đến phức tạp. Học sinh không còn tâm lý e ngại khi gặp các bài toán này nữa. Mặt khác, hiệu quả áp dụng tương đối cao, bài giải trở nên sáng sủa, ngắn gọn. Hầu hết các em vận dụng tốt và giải quyết nhanh được các câu hỏi trắc nghiệm loại này.

Một hiệu quả nữa mà tôi nhận thấy là những học sinh của mình sau khi đọc tài liệu này đã nhìn các bài toán cực trị trên tập số phức với con mắt “bớt sợ” hơn. Những em khá, ham tìm tòi cũng đã mạnh dạn nghiên cứu những bài toán hình học khác để thử áp dụng cho các bài toán cực trị khác.

Tuy vậy vẫn còn một bộ phận học sinh do những kiến thức còn hạn chế nên vẫn chưa thấy được điểm mạnh của phương pháp, và vận dụng vẫn chưa linh hoạt ở các dạng đề khác nhau.

3. Kết luận, kiến nghị

3.1. Kết luận:

Trên đây là một số giải pháp tôi đã triển khai áp dụng tại lớp 12A1 trường THPT Thọ Xuân 5 thu được nhiều kết quả khả quan về kết quả học tập chương số phức của học sinh.

3.2. Kiến nghị:

Hàng năm, những sáng kiến kinh nghiệm có ứng dụng thực tiễn, thiết thực phục vụ cho nhiệm vụ nâng cao chất lượng giáo dục và đào tạo, nhất là các sáng kiến đổi

mới phương pháp giảng dạy cần được tập hợp trong một kỷ yếu khoa học của Sở GD&ĐT và tạo điều kiện cho giáo viên, học sinh và phụ huynh được tham khảo

Tài liệu tham khảo

1. Sách “ Hàm biến phức” của tác giả Nguyễn Văn Khuê- Lê Mậu Hải- Nhà xuất bản đại học quốc gia Hà Nội năm 2001.

Danh mục các đề tài SKKN mà tác giả đã được Hội đồng Cấp Sở GD&ĐT đánh giá đạt từ loại C trở lên.

1. SKKN: Hướng dẫn học sinh sử dụng điểm cố định của họ đường thẳng để giải một số bài toán cực trị hình học - Giải C năm 2014

XÁC NHẬN CỦA THỦ TRƯỞNG ĐƠN VỊ	Thanh Hóa, ngày 22 tháng 05 năm 2017 <i>Tôi xin cam đoan đây là SKKN của mình viết, không sao chép nội dung của người khác.</i> Lê Quang Vũ
---------------------------------------	---