ĐỀ 73

HSG TOÁN 9 TỈNH QUẢNG BÌNH 23-24

Câu 1. a) Cho biểu thức $x = \dfrac{\sqrt{5+\sqrt{21}}+\sqrt{5-\sqrt{21}}}{\sqrt{2}}$. Tính giá trị của biểu thức

$$P = \left(1-7x^{2019}+x^{2021}\right)^{2023}$$

b) Cho các số thực dương *x, y, z* thỏa mãn $x + y + z = xyz$. Tính giá trị của biểu thức

$$Q = \frac{1}{yz}\sqrt{\frac{(1+y^2)(1+z^2)}{1+x^2}}+\frac{1}{zx}\sqrt{\frac{(1+z^2)(1+x^2)}{1+y^2}}+\frac{1}{xy}\sqrt{\frac{(1+x^2)(1+y^2)}{1+y^2}}$$

Câu 2. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai điểm A(6;0), B(0;−3) và đường thẳng (d) có phương trình $y=-(m+2)x+2m+2$ (m là tham số, $m \neq -2$, $m\neq-\frac{5}{2}$

a) Tìm tọa độ giao điểm của hai đường thẳng (d) và AB

b) Tìm các giá trị của m sao cho đường thẳng d chia tam giác OAB thành hai phần có diện tích bằng nhau (O là gốc tọa độ)

Câu 3. Cho đường tròn (O;R) và điểm A nằm ngoài đường tròn sao cho OA = 2R. Từ điểm A kẻ hai tiếp tuyến AM, AN và cát tuyến ABC với đường tròn (O), (MN là các tiếp điểm và AB < AC < 3R). Gọi I là trung điểm của BC, T là giao điểm của NI và đường tròn (O) (T khác N).

a) Chứng minh tam giác đều

b) Chứng minh rằng đường thẳng MT song song với đường thẳng AC

c) Các tiếp tuyến của đường tròn (O) tại B và C cắt nhau ở K. Chứng minh rằng ba điểm K, M, N thẳng hàng

Câu 4. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn

$$\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}\geq 2022$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{\sqrt{y^2+3x^2}}{xy}+\frac{\sqrt{z^2+3y^2}}{yz}+\frac{\sqrt{x^2+3z^2}}{zx}$$

Câu 5. a) Tìm các cặp số nguyên (x; y) thỏa mãn phương tình

$$(x-y-1)(x+1-y)+6xy+y^2(2-x-y)=2(x+1)(y+1)$$

b) Cho 2022 điểm phân biệt $A_1, A_2, ..., A_{2022}$ trên mặt phẳng. Chứng minh rằng trên đường tròn có bán kính R = 1 bất kì đều tồn tại điểm M sao cho $MA_1 + MA_2 + ... + MA_{2022} \geq 2022$

------HẾT------

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. a) Cho biểu thức $x = \dfrac{\sqrt{5+\sqrt{21}}+\sqrt{5-\sqrt{21}}}{\sqrt{2}}$. Tính giá trị của biểu thức

$$P = \left(1-7x^{2019}+x^{2021}\right)^{2023}$$

b) Cho các số thực dương *x, y, z* thỏa mãn $x + y + z = xyz$. Tính giá trị của biểu thức

$$Q = \frac{1}{yz}\sqrt{\frac{\left(1+y^2\right)\left(1+z^2\right)}{1+x^2}} + \frac{1}{zx}\sqrt{\frac{\left(1+z^2\right)\left(1+x^2\right)}{1+y^2}} + \frac{1}{xy}\sqrt{\frac{\left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right)}{1+y^2}}$$

Lời giải

a) Ta có $x = \dfrac{\sqrt{5+\sqrt{21}}+\sqrt{5-\sqrt{21}}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{3}.\sqrt{7}}+\sqrt{10-2\sqrt{3}.\sqrt{7}}}{2}$

$= \dfrac{\sqrt{\left(\sqrt{3}+\sqrt{7}\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)^2}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{7}+\sqrt{7}-\sqrt{3}}{2} = \sqrt{7}$

$\Rightarrow x^2 = 7$

Khi đó $P = \left(x^{2021}-7x^{2019}+1\right)^{2023} = \left[x^{2019}\left(x^2-7\right)+1\right]^{2023}$

$= \left(0+1\right)^{2023} = 1$

Vậy P = 1

b) Từ giả thiết $x + y + z = xyz \Rightarrow \dfrac{1}{xy} + \dfrac{1}{yz} + \dfrac{1}{zx} = 1$

Ta có $1+x^2 = x^2\left(\dfrac{1}{x^2}+1\right) = x^2\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{xy}+\dfrac{1}{yz}+\dfrac{1}{zx}\right)$

¿ $x^2\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{z}\right)$

$= x^2\dfrac{(x+y)(x+z)}{x^2yz} = \dfrac{(x+y)(x+z)}{yz}$

Do đó $1+x^2 = \dfrac{(x+y)(x+z)}{yz}$

Hoàn toàn tương tự $1+y^2 = \dfrac{(y+x)(y+z)}{xz}$; $1+z^2 = \dfrac{(z+x)(z+y)}{xy}$

Ta có: $\dfrac{\left(1+z^2\right)\left(1+x^2\right)}{1+y^2} = \dfrac{(y+x)(y+z)}{xz} . \dfrac{(z+x)(z+y)}{xy} : \dfrac{(x+y)(x+z)}{yz}$

$= \dfrac{(x+y)^2}{z^2}$

$\Rightarrow Q = \dfrac{1}{yz}\sqrt{\dfrac{\left(1+y^2\right)\left(1+z^2\right)}{1+x^2}} + \dfrac{1}{zx}\sqrt{\dfrac{\left(1+z^2\right)\left(1+x^2\right)}{1+y^2}} + \dfrac{1}{xy}\sqrt{\dfrac{\left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right)}{1+y^2}}$

$= \dfrac{1}{yz} . \dfrac{z+y}{x} + \dfrac{1}{zx} . \dfrac{x+z}{y} + \dfrac{1}{xy} . \dfrac{x+y}{z}$ (Do x, y, z > 0)

$= \dfrac{2(x+z+y)}{xyz} = 2$

Vậy Q = 2

Câu 2. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai điểm A(6;0), B(0;−3) và đường thẳng (d) có phương trình $y=-(m+2)x+2m+2$ (m là tham số, m $\neq -2$, $m \neq -\dfrac{5}{2}$

a) Tìm tọa độ giao điểm của hai đường thẳng (d) và AB

b) Tìm các giá trị của m sao cho đường thẳng d chia tam giác OAB thành hai phần có diện tích bằng nhau (O là gốc tọa độ)

Lời giải

a) Gọi phương trình đường thẳng AB có dạng $y=ax+b$

Vì đường thẳng AB đi qua A(6;0), B(0;-3) nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 6a+b=0 \\ 0a+b=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{1}{2} \\ b=-3 \end{cases}$$

Vậy phương trình đường thẳng AB là: $y=\frac{1}{2}x-3$

Hoàng dộ giao điểm của hai đường thẳng (d) và AB là nghiệm của phương trình

$-(m+2)x+2m+1=\frac{1}{2}x-3$

$\Leftrightarrow (2m-5)(x-2)=0$

$\Leftrightarrow x-2=0$ (do $m\neq-\frac{5}{2}$)

$\Leftrightarrow x=2$

Thay $x=2$ vào phương trình $y=\frac{1}{2}x-3$ ta được y = -2

Vậy tọa độ giao điểm của hai đường thẳng (d) và (AB) là M(2; -2)

b) Ta có đường thẳng (d) giao với tam giác OAB tại cạnh OA hoặc OB

$S_{OAB} = \frac{1}{2}$.OA.OB = $\frac{1}{2}$.6.3 = 9 và $S_{OAM} = \frac{1}{2}$.2.6 = 6 > $\frac{1}{2}S_{OAB}$

Do $S_{OAM} >\ S_{OAB}$ nên đường thẳng (d) chia tam giác OAB thành 2 phần có diện tích bằng nhau khi (d) cắt cạnh OA tại C$\left(\frac{2m+2}{m+2};0\right)$

Khi đó ta có $S_{AMC} = \frac{1}{2}.S_{OAB}=\frac{9}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}$.2.AC = $\frac{9}{2} \Leftrightarrow$ AC = $\frac{9}{2} \Leftrightarrow 6\ \frac{-2m+2}{m+2} = \frac{9}{2} \Leftrightarrow$ m = 2 (tm)

Vậy m = 2

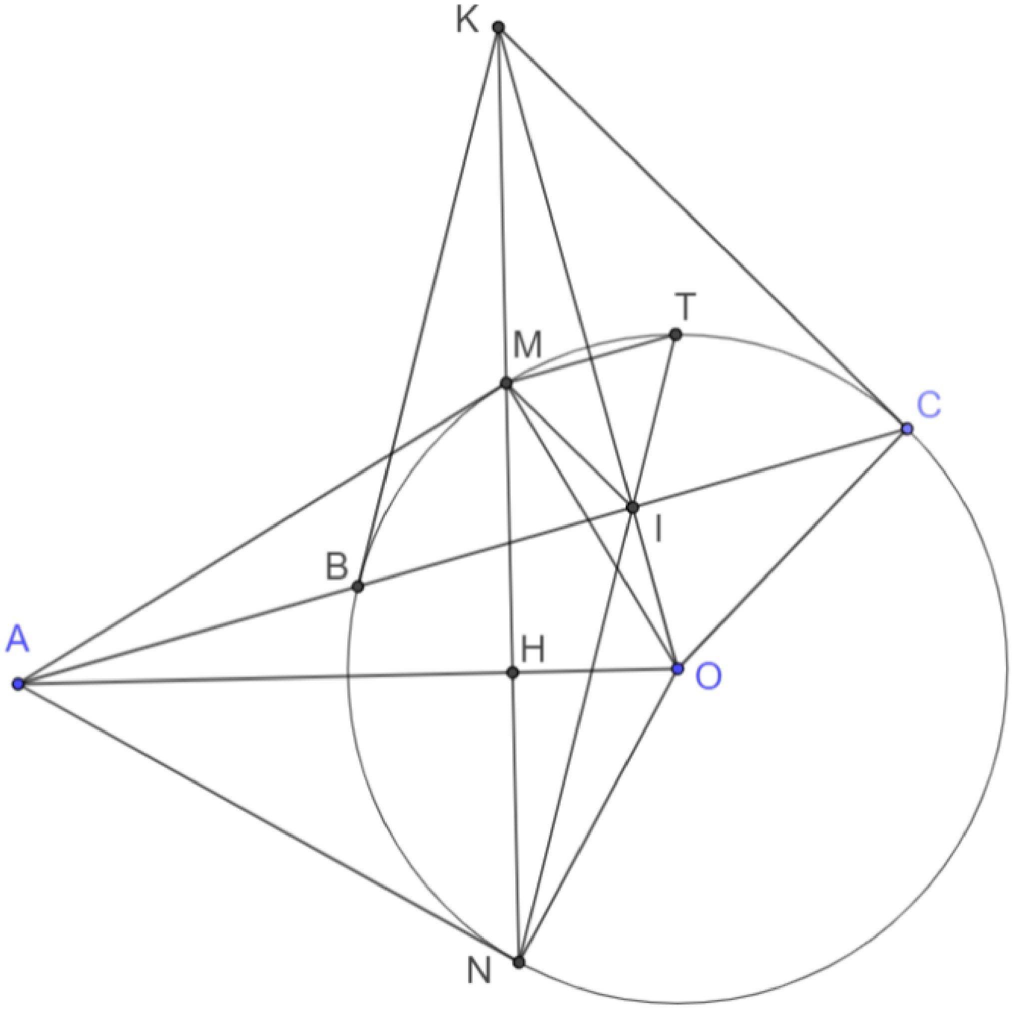
Câu 3. Cho đường tròn (O;R) và điểm A nằm ngoài đường tròn sao cho OA = 2R. Từ điểm A kẻ hai tiếp tuyến AM, AN và cát tuyến ABC với đường tròn (O), (MN là các tiếp điểm và AB < AC < 3R). Gọi I là trung điểm của BC, T là giao điểm của NI và đường tròn (O) (T khác N).

a) Chứng minh tam giác đều

b) Chứng minh rằng đường thẳng MT song song với đường thẳng AC

c) Các tiếp tuyến của đường tròn (O) tại B và C cắt nhau ở K. Chứng minh rằng ba điểm K, M, N thẳng hàng

Lời giải



a) Ta có AM = AN (tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau) ⇒ △AMN cân tại A

mà sin $\widehat{MAO} = \dfrac{OM}{OA} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \widehat{MAO} = 30^0 \Rightarrow \widehat{MAN} = 60^0$

Suy ra AMN là tam giác đều

b) I là trung điểm của BC ⇒ OI ⊥ BC

Ta có $\widehat{AMO} = \widehat{ANO} = \widehat{AIO} = 90^0 \Rightarrow$ 5 điểm A, M, I, O, N cùng thuộc đường tròn đường kính AO

⇒ tứ giác AION nội tiếp ⇒ $\widehat{AIN} = \widehat{AON}$ mà $\widehat{MTN} = \dfrac{1}{2}\widehat{MON} = \widehat{AON}$

⇒ $\widehat{AIN} = \widehat{MTN}$ ⇒ MT//AC

c) Ta có OI ⊥ BC và OK ⊥ BC (tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau) ⇒ O, I, K thẳng hàng

Gọi H là giao điểm của MN và OA ⇒ OA ⊥ MN tại H (1)

Áp dụng hệ thức lượng cho các tam giác vuông OAN và OCK ta có

$$\begin{cases} OH.OA = ON^2 = R^2 \\ OI.OK = OC^2 = R^2 \end{cases} \Rightarrow OH.OA = OI.OK \Rightarrow \frac{OH}{OI} = \frac{OK}{OA}$$

Kết hợp với góc O chung ⇒ △OHK   △OIA (c-g-c)

$$\Rightarrow \widehat{OHK} = \widehat{OIA} = 90^0$$

Suy ra KH ⊥ OA tại H (2)

Từ (1) và (2) suy ra K, M, N thẳng hàng (đpcm)

Câu 4. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn

$$\frac{1}{x+y}\ \frac{+1}{y+z}\ \frac{+1}{z+x} \geq 2022$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{\sqrt{y^2+3x^2}}{xy}\ \frac{+\sqrt{z^2+3y^2}}{yz}\ \frac{+\sqrt{x^2+3z^2}}{zx}$$

Lời giải

Nhận xét: Với m, n > 0 thì $\frac{1}{m+n} \leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)$

Áp dụng nhận xét ta có

$$2022 \leq \frac{1}{x+y}\ \frac{+1}{y+z}\ \frac{+1}{z+x} \leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\ \frac{+1}{4}\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x}\ \frac{+1}{y}\ \frac{+1}{z} \geq 4044$$

Áp dụng bất đẳng thức Bu-nhi-a Côp-ski ta có

$$\frac{\sqrt{y^2+3x^2}}{xy}\ ¿\ \frac{\sqrt{(y^2+3x^2)(1+3)}}{2xy} \geq \frac{y+3x}{2xy}\ ¿\ \frac{1}{2x}\ \frac{+3}{2y}\ (1)$$

Tương tự: $\frac{\sqrt{z^2+3y^2}}{yz} \geq \frac{1}{2y}\ \frac{+3}{2z}$ (2)

$\frac{\sqrt{x^2+3z^2}}{zx} \geq \frac{1}{2z}\ \frac{+3}{2x}$ (3)

Cộng (1), (2), (3) ⇒ $P \geq 2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \geq 8088$

Dấu "=" xảy ra khi x = y = z = $\frac{1}{1348}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức P bằng 8088 khi x = y = z = $\frac{1}{1348}$

Câu 5. a) Tìm các cặp số nguyên (x; y) thỏa mãn phương tình

$$(x-y-1)(x+1-y)+6xy+y^2(2-x-y)=2(x+1)(y+1)$$

b) Cho 2022 điểm phân biệt $A_1, A_2, \ldots, A_{2022}$ trên mặt phẳng. Chứng minh rằng trên đường tròn có bán kính R = 1 bất kì đều tồn tại điểm M sao cho $MA_1+MA_2+\ldots+MA_{2022}\geq 2022$

Lời giải

a) Ta có $(x-y-1)(x+1-y)+6xy+y^2(2-x-y)=2(x+1)(y+1)$

$\Leftrightarrow (x-y)^2-1+6xy-y^2(x+y-2)=2xy+2(x+y)+2$

$\Leftrightarrow (x+y)^2-2(x+y)-y^2(x+y-2) = 3$

$\Leftrightarrow (x+y-2)(x+y-y^2)=3$

Do x, y nguyên nên dẫn đến các trường hợp sau

TH1) $\begin{cases} x+y-2=1 \\ x+y-y^2=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=3 \\ y^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=0 \end{cases}$

TH2) $\begin{cases} x+y-2=3 \\ x+y-y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=5 \\ y^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3; y=2 \\ x=7; y=-2 \end{array}\right.$

TH3) $\begin{cases} x+y-2=-1 \\ x+y-y^2=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=-1 \\ y^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1; y=2 \\ x=3; y=-2 \end{array}\right.$

TH4) $\begin{cases} x+y-2=-3 \\ x+y-y^2=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=-1 \\ y^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=0 \end{cases}$

Vậy các cặp số nguyên (x; y) thỏa mãn bài toán là (3; 0), (3;2), (7, −2), (−1;2), (3;−2), (−1;0)

b) Gọi M_1M_2 là đường kính của đường tròn bất kỳ có bán kính R = 1 $\Rightarrow M_1M_2$ = 2

Ta có: $M_1A_1 + M_2A_1 \geq M_1M_2 = 2$

$M_1A_2 + M_2A_2 \geq M_1M_2 = 2$

…

$M_1A_{2022} + M_2A_{2022} \geq M_1M_2 = 2$

Suy ra

$(M_1A_1+M_1A_2+\ldots+M_1A_{2022})+(M_2A_1+M_2A_2+\ldots+M_2A_{2022}) \geq 4044$

Suy ra trong 2 tổng $M_1A_1+M_1A_2+\ldots+M_1A_{2022}$ và $M_2A_1+M_2A_2+\ldots+M_2A_{2022}$ có ít nhất 1 tổng $\geq \dfrac{4044}{2} = 2022$

Khi đó ta chọn $M \equiv M_1$ hoặc $M \equiv M_2$

suy ra $MA_1 + MA_2 + ... + MA_{2022} \geq 2022$

Bài toán được chứng minh

------HẾT------