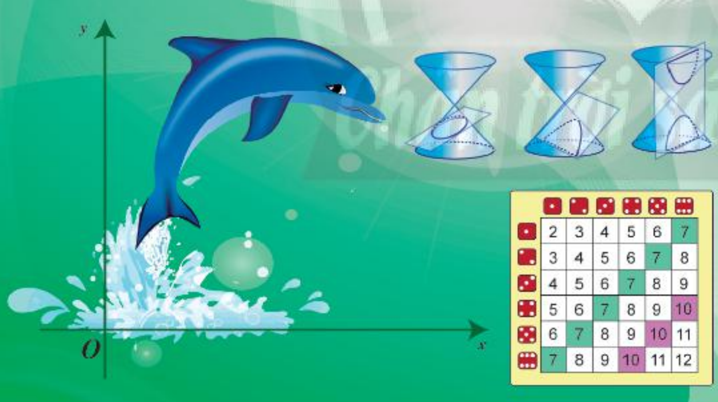
TRẦN ĐỨC HUYÊN (Chủ biên)
NGUYỄN THÀNH ANH – VŨ NHƯ THƯ HƯƠNG
NGÔ HOÀNG LONG – PHẠM THỊ THU THUỶ

Bài tập TOÁN 10

TẬP HAI



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

TRẦN ĐỨC HUYÊN (Chủ biên)
NGUYỄN THÀNH ANH – VŨ NHƯ THƯ HƯƠNG
NGÔ HOÀNG LONG – PHẠM THỊ THU THUỶ

Bài tập TOÁN 10

Chân trời sáng tạo

TẬP HAI

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

LỜI NÓI ĐẦU

Cùng với *Sách giáo khoa Toán 10* và *Sách giáo viên Toán 10* (Bộ sách Chân trời sáng tạo), nhóm tác giả biên soạn **Bài tập Toán 10 (tập một, tập hai)** nhằm giúp học sinh rèn luyện kiến thức và các kĩ năng cơ bản phù hợp với Chương trình Giáo dục phổ thông môn Toán của Bộ Giáo dục và Đào tạo ban hành năm 2018.

Nội dung sách **Bài tập Toán 10** thể hiện tinh thần tích hợp, phát triển phẩm chất và năng lực của học sinh.

Cấu trúc sách tương ứng với *Sách giáo khoa Toán 10* (Bộ sách Chân trời sáng tạo). **Bài tập Toán 10, tập hai** bao gồm bốn chương:

Chương VII. Bất phương trình bậc hai một ẩn.

Chương VIII. Đại số tổ hợp.

Chương IV. Phương pháp toạ độ trong mặt phẳng.

Chương X. Xác suất.

Mỗi chương bao gồm nhiều bài học. Mỗi bài học gồm các phần như sau:

+ KIẾN THỨC CẦN NHỚ;

+ BÀI TẬP MẪU;

+ BÀI TẬP;

Cuối mỗi chương là phần LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ.

Rất mong nhận được sự góp ý của quý thầy, cô giáo và các bạn học sinh để bộ sách ngày càng hoàn thiện hơn.

CÁC TÁC GIẢ

MỤC LỤC

Phần ĐẠI SỐ VÀ MỘT SỐ YẾU TỐ GIẢI TÍCH

Chương VII. BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN

Bài 1. DẤU CỦA TAM THỨC BẬC HAI

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Tam thức bậc hai

Đa thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ với a, b, c là các hệ số, $a \neq 0$ và x là biến số được gọi là ***tam thức bậc hai***.

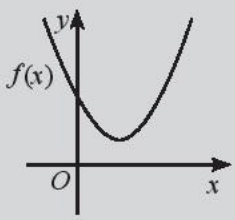
Khi đó ta gọi:

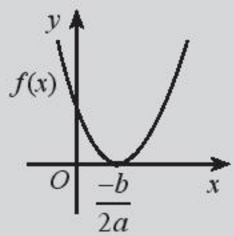
- Nghiệm của phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ là ***nghiệm*** của $f(x)$.
- Biểu thức $\Delta = b^2 - 4ac$ và $\Delta' = \left(\dfrac{b}{2}\right)^2 - ac$ là ***biệt thức*** và ***biệt thức thu gọn*** của $f(x)$.

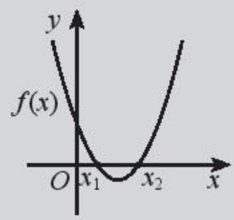
Khi thay x bằng giá trị x_0 vào $f(x_0)$, ta được $f(x_0) = ax_0^2 + bx_0 + c$, gọi là ***giá trị của tam thức bậc hai*** tại x_0.

- Nếu $f(x_0) > 0$ thì ta nói $f(x)$ dương tại x_0;
- Nếu $f(x_0) < 0$ thì ta nói $f(x)$ âm tại x_0;
- Nếu $f(x)$ dương (âm) tại mọi điểm x thuộc một khoảng hoặc một đoạn thì ta nói $f(x)$ dương (âm) trên khoảng hoặc đoạn đó.

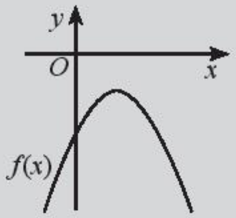
2. Dấu của tam thức bậc hai

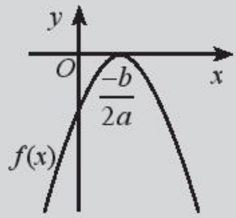
<table>
<tr><td></td><td>$\Delta < 0$ ($\Delta' < 0$)</td><td>$\Delta = 0$ ($\Delta' = 0$)</td><td>$\Delta > 0$ ($\Delta' > 0$)</td></tr>
<tr><td>$a > 0$</td>
<td>

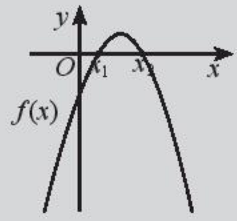
x	$-\infty$ $\quad$ $+\infty$
$f(x)$	$+$
</td>
<td>

x	$-\infty$ $\quad$ $\frac{-b}{2a}$ $\quad$ $+\infty$
$f(x)$	$+$ $\quad$ 0 $\quad$ $+$
</td>
<td>

x	$-\infty$ $\quad$ x_1 $\quad$ x_2 $\quad$ $+\infty$
$f(x)$	$+$ $\quad$ 0 $\quad$ $-$ $\quad$ 0 $\quad$ $+$
</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>$a < 0$</td>
<td>

<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$ $+\infty$</td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td>$-$</td></tr>
</table>
</td>
<td>

<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$ $\frac{-b}{2a}$ $+\infty$</td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td>$-$ 0 $-$</td></tr>
</table>
</td>
<td>

<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$ x_1 x_2 $+\infty$</td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td>$-$ 0 $+$ 0 $-$</td></tr>
</table>
</td>
</tr>
</table>

- $f(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi $a > 0$ và $\Delta < 0$.
- $f(x) \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi $a > 0$ và $\Delta \leq 0$.
- $f(x) < 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi $a < 0$ và $\Delta < 0$.
- $f(x) \leq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi $a < 0$ và $\Delta \leq 0$.
- $f(x)$ không đổi dấu trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $\Delta < 0$.

B. BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Cho tam thức bậc hai $f(x) = 3x^2 + 4x - 7$.

a) Tính biệt thức và nghiệm (nếu có) của $f(x)$.

b) Xác định dấu của $f(x)$ tại $x = 0$ và $x = 3$.

Giải

a) Biệt thức của $f(x)$ là $\Delta = 4^2 - 4.3.(-7) = 100$.

Xét phương trình $f(x) = 0$ hay $3x^2 + 4x - 7 = 0$, ta có $x = -\frac{7}{3}$ hoặc $x = 1$.

Vậy nghiệm của $f(x)$ là $x = -\frac{7}{3}$ hoặc $x = 1$.

b) $f(0) = -7$, nên $f(x)$ âm tại $x = 0$.

$f(3) = 32 > 0$, nên $f(x)$ dương tại $x = 3$.

Bài 2. Tìm các giá trị của tham số m để biểu thức $f(x) = (m^2 - 1)x^2 + 3mx - 6$ là một tam thức bậc hai có $x = 2$ là một nghiệm.

Giải

Ta có $f(x)$ là tam thức bậc hai khi và chỉ khi $m \neq 1$ và $m \neq -1$.

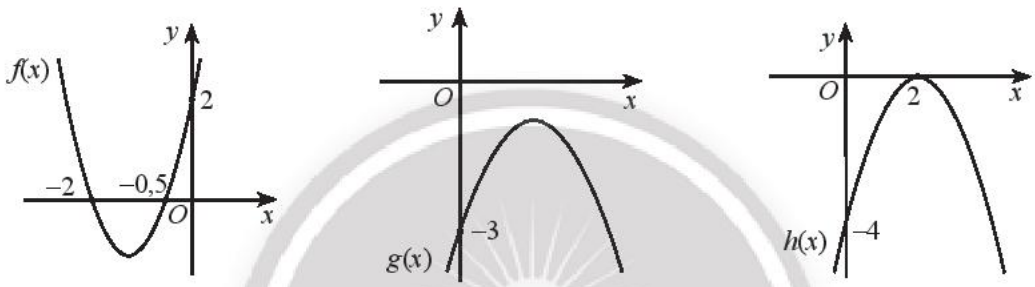
Mặt khác, $x = 2$ là một nghiệm của $f(x)$ khi và chỉ khi $f(2) = 0$

hay $4(m^2 - 1) + 6m - 6 = 0$, tức là $4m^2 + 6m - 10 = 0$.

Do đó $m = 1$ (loại) hoặc $m = -\dfrac{5}{2}$ (nhận). Vậy $m = -\dfrac{5}{2}$.

Bài 3. Dựa vào đồ thị của các hàm số bậc hai được cho trong hình dưới đây, xét dấu của tam thức bậc hai tương ứng:

a) $f(x) = 2x^2 + 5x + 2$; b) $g(x) = -x^2 + 3x - 3$; c) $h(x) = -x^2 + 4x - 4$.



Giải

a) $f(x) > 0$ trên khoảng $(-\infty; -2)$ và $(-0,5; +\infty)$.

$f(x) < 0$ trên khoảng $(-2; -0,5)$.

b) $g(x) < 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

c) $h(x) < 0$ với mọi $x \neq 2$.

Bài 4. Xét dấu của các tam thức bậc hai sau:

a) $f(x) = x^2 - 5x + 8$;

b) $g(x) = -2x^2 + 4x - 2$;

c) $h(x) = 2x^2 + 3x - 14$.

Giải

a) $f(x) = x^2 - 5x + 8$ có $\Delta = -7 < 0$ và $a = 1 > 0$. Do đó $f(x)$ dương với mọi $x \in \mathbb{R}$.

b) $g(x) = -2x^2 + 4x - 2$ có $\Delta = 0$, nghiệm kép là $x_0 = 1$ và $a = -2 < 0$.

Vậy $g(x) < 0$ với mọi $x \neq 1$.

c) $h(x) = 2x^2 + 3x - 14$ có $\Delta = 121 > 0$, hai nghiệm phân biệt $x_1 = -\frac{7}{2}$, $x_2 = 2$ và $a = 2 > 0$.

Ta có bảng xét dấu $h(x)$ như sau:

x	$-\infty$		$-\frac{7}{2}$		2		$+\infty$
$h(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Vậy $h(x)$ dương trong hai khoảng $\left(-\infty; -\frac{7}{2}\right)$ và $(2; +\infty)$; âm trong khoảng $\left(-\frac{7}{2}; 2\right)$.

Bài 5. Cho biểu thức $f(x) = (m + 1)x^2 + 3x - 1$, trong đó m là tham số. Tìm các giá trị của m để:

a) $f(x)$ là một tam thức bậc hai dương với mọi $x \in \mathbb{R}$.

b) $f(x)$ là một tam thức bậc hai không đổi dấu với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Giải

a) $f(x)$ là một tam thức bậc hai dương với mọi $x \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi

$m + 1 > 0$ và $\Delta < 0$.

$m + 1 > 0$ khi và chỉ khi $m > -1$.

$\Delta = 3^2 + 4(m+1) < 0$ khi và chỉ khi $m < -\frac{13}{4}$.

Vậy không có giá trị nào của m thoả mãn bài toán.

b) $f(x)$ là một tam thức bậc hai không đổi dấu với mọi $x \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi $m + 1 \neq 0$ và $\Delta < 0$. Vậy $m < -\frac{13}{4}$.

C. BÀI TẬP

1. Tính biệt thức và nghiệm (nếu có) của các tam thức bậc hai sau. Xác định dấu của chúng tại $x = -2$.

a) $f(x) = -2x^2 + 3x - 4$;

b) $g(x) = 2x^2 + 8x + 8$;

c) $h(x) = 3x^2 + 7x - 10$.

2. Tìm các giá trị của tham số m để:

a) $f(x) = (2m - 8)x^2 + 2mx + 1$ là một tam thức bậc hai;

b) $f(x) = (2m + 3)x^2 + 3x - 4m^2$ là một tam thức bậc hai có $x = 3$ là một nghiệm;

c) $f(x) = 2x^2 + mx - 3$ dương tại $x = 2$.

3. Tìm các giá trị của tham số m để:

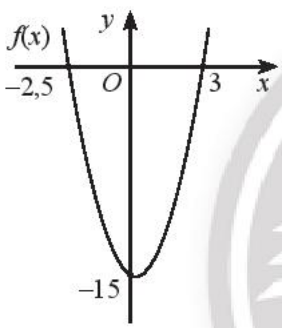
a) $f(x) = (m^2 + 9)x^2 + (m + 6)x + 1$ là một tam thức bậc hai có một nghiệm duy nhất;

b) $f(x) = (m - 1)x^2 + 3x + 1$ là một tam thức bậc hai có hai nghiệm phân biệt;

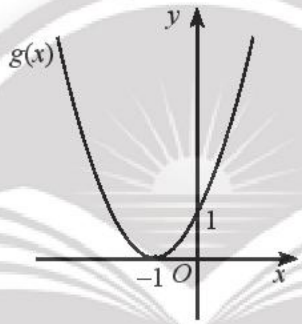
c) $f(x) = mx^2 + (m + 2)x + 1$ là một tam thức bậc hai vô nghiệm.

4. Dựa vào đồ thị của các hàm số bậc hai được cho trong hình dưới đây, xét dấu của tam thức bậc hai tương ứng:

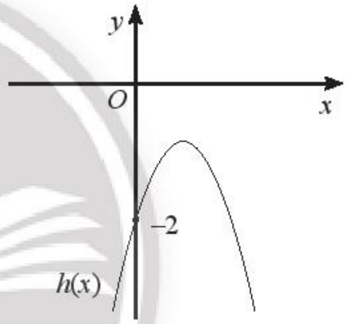
a)



b)



c)



5. Xét dấu của các tam thức bậc hai sau:

a) $f(x) = x^2 - 5x + 4$;

b) $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 2x - 3$;

c) $f(x) = 3x^2 + 6x + 4$;

d) $f(x) = -2x^2 + 3x + 5$;

e) $f(x) = -6x^2 + 3x - 1$;

g) $f(x) = 4x^2 + 12x + 9$.

6. Tìm các giá trị của tham số m để:

a) $f(x) = (m+1)x^2 + 5x + 2$ là tam thức bậc hai không đổi dấu trên $\mathbb{R}$;

b) $f(x) = mx^2 - 7x + 4$ là tam thức bậc hai âm với mọi $x \in \mathbb{R}$;

c) $f(x) = 3x^2 - 4x + (3m - 1)$ là tam thức bậc hai dương với mọi $x \in \mathbb{R}$;

d) $f(x) = (m^2 + 1)x^2 - 3mx + 1$ là tam thức bậc hai âm với mọi $x \in \mathbb{R}$.

7. Chứng minh rằng:

a) $2x^2 + \sqrt{3}x + 1 > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$;

b) $x^2 + x + \frac{1}{4} \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$;

c) $-x^2 < -2x + 3$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

8. Xác định giá trị của các hệ số a, b, c và xét dấu của tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ trong mỗi trường hợp sau:

a) Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ đi qua ba điểm có toạ độ là $(-1; -4)$, $(0; 3)$ và $(1; -14)$;

b) Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ đi qua ba điểm có toạ độ là $(0; -2)$, $(2; 6)$ và $(3; 13)$;

c) $f(-5) = 33$, $f(0) = 3$ và $f(2) = 19$.

Bài 2. GIẢI BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Bất phương trình bậc hai một ẩn x là bất phương trình có một trong các dạng

$$ax^2 + bx + c \leq 0,$$

$$ax^2 + bx + c \geq 0,$$

$$ax^2 + bx + c < 0,$$

$$ax^2 + bx + c > 0,$$

với $a \neq 0$.

Nghiệm của bất phương trình bậc hai là các giá trị của biến x mà khi thay vào bất phương trình ta được bất đẳng thức đúng.

Giải bất phương trình bậc hai là tìm tập hợp các nghiệm của bất phương trình đó.

B. BÀI TẬP MẪU

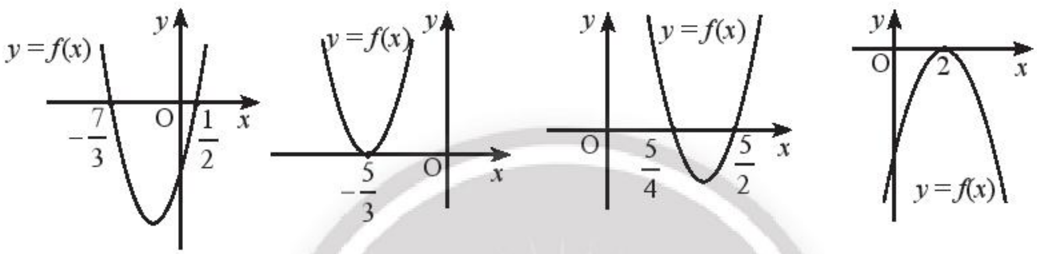
Bài 1. $x = 3$ có là một nghiệm của bất phương trình $x^2 - 4x + 2 > 0$ không?

Giải

Thay $x = 3$ vào bất phương trình ta có $3^2 - 4 . 3 + 2 > 0$, hay $-1 > 0$. Bất đẳng thức này sai, nên $x = 3$ không phải là nghiệm của bất phương trình $x^2 - 4x + 2 > 0$.

Bài 2. Dựa vào đồ thị của hàm số bậc hai tương ứng, hãy xác định tập nghiệm của các bất phương trình bậc hai sau đây:

a) $f(x) < 0$ b) $f(x) > 0$ c) $f(x) \geq 0$ d) $f(x) \geq 0$



Giải

a) $f(x) < 0$ khi và chỉ khi $-\frac{7}{3} < x < \frac{1}{2}$. Tập nghiệm của bất phương trình: $\left(-\frac{7}{3}; \frac{1}{2}\right)$.

b) $f(x) > 0$ khi và chỉ khi $x \neq -\frac{5}{3}$. Tập nghiệm của bất phương trình: $\mathbb{R} \backslash \left\{\frac{-5}{3}\right\}$.

c) $f(x) \geq 0$ khi và chỉ khi $x \leq \frac{5}{4}$ hoặc $x \geq \frac{5}{2}$.

Tập nghiệm của bất phương trình: $\left(-\infty; \frac{5}{4}\right] \cup \left[\frac{5}{2}; +\infty\right)$.

d) $f(x) \geq 0$ khi và chỉ khi $x = 2$. Tập nghiệm của bất phương trình: $\{2\}$.

Bài 3. Giải các bất phương trình bậc hai sau:

a) $3x^2 + 2x - 8 \leq 0$; b) $2x^2 + 13x + 20 > 0$;

c) $3x^2 + x + 1 \leq 0$; d) $-2x^2 - 3x + 1 \leq 0$;

e) $-9x^2 + 24x - 16 \geq 0$; g) $-x^2 + 2x - 5 < 0$.

Giải

a) Tam thức bậc hai $3x^2 + 2x - 8$ có $a = 3 > 0$ và hai nghiệm là $x_1 = -2$ và $x_2 = \frac{4}{3}$, nên $3x^2 + 2x - 8 \le 0$ khi và chỉ khi $-2 \le x \le \frac{4}{3}$.

Vậy bất phương trình có tập nghiệm là $\left[-2; \frac{4}{3}\right]$.

b) Tam thức bậc hai $2x^2 + 13x + 20$ có $a = 2 > 0$ và hai nghiệm là $x_1 = -4$ và $x_2 = -\frac{5}{2}$, nên $2x^2 + 13x + 20 > 0$ khi và chỉ khi $x < -4$ hoặc $x > -\frac{5}{2}$.

Vậy bất phương trình có tập nghiệm $(-\infty; -4) \cup \left(-\frac{5}{2}; +\infty\right)$.

c) Tam thức bậc hai $3x^2 + x + 1$ có $a = 3 > 0$ và $\Delta = -11 < 0$,

nên $3x^2 + x + 1 > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Vậy bất phương trình $3x^2 + x + 1 \le 0$ vô nghiệm.

d) Tam thức bậc hai $-2x^2 - 3x + 1$ có $a = -2 < 0$ và hai nghiệm $x_1 = \frac{-3-\sqrt{17}}{4}$, $x_2 = \frac{-3+\sqrt{17}}{4}$, nên $-2x^2 - 3x + 1 \le 0$ khi và chỉ khi $x \le \frac{-3-\sqrt{17}}{4}$ hoặc $x \ge \frac{-3+\sqrt{17}}{4}$.

Vậy bất phương trình có tập nghiệm là $\left(-\infty; \frac{-3-\sqrt{17}}{4}\right] \cup \left[\frac{-3+\sqrt{17}}{4}; +\infty\right)$.

e) Tam thức bậc hai $-9x^2 + 24x - 16$ có $a = -9 < 0$, $\Delta' = 0$ và nghiệm $x = \frac{4}{3}$ nên $-9x^2 + 24x - 16 < 0$ với mọi $x \ne \frac{4}{3}$.

Vậy bất phương trình $-9x^2 + 24x - 16 \ge 0$ có nghiệm $x = \frac{4}{3}$.

g) Tam thức bậc hai $-x^2 + 2x - 5$ có $a = -1 < 0$ và $\Delta' = -4 < 0$, nên $-x^2 + 2x - 5 < 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Vậy bất phương trình $-x^2 + 2x - 5 < 0$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$.

Bài 4. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y = \sqrt{x^2 - x - 2}$;

b) $y = \frac{1}{\sqrt{-x^2 + 4x - 2}} + \sqrt{x - 1}$.

Giải

a) Hàm số xác định khi và chỉ khi $x^2 - x - 2 \geq 0$, tức là $x \leq -1$ hoặc $x \geq 2$.

Vậy tập xác định của hàm số là $(-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$.

b) Hàm số xác định khi và chỉ khi $-x^2 + 4x - 2 > 0$ và $x - 1 \geq 0$.

$-x^2 + 4x - 2 > 0$ khi và chỉ khi $2 - \sqrt{2} < x < 2 + \sqrt{2}$,

$x - 1 \geq 0$ khi và chỉ khi $x \geq 1$.

Suy ra $1 \leq x < 2 + \sqrt{2}$.

Vậy tập xác định của hàm số là $[1; 2 + \sqrt{2})$.

C. BÀI TẬP

1. $x = 2$ là một nghiệm của bất phương trình nào sau đây?

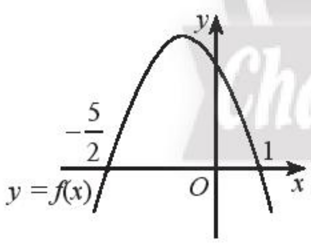
a) $x^2 - 3x + 1 > 0$;

b) $-4x^2 - 3x + 5 \leq 0$;

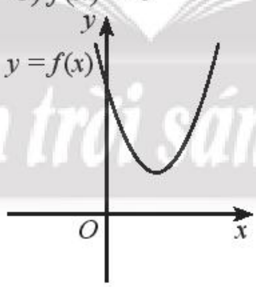
c) $2x^2 - 5x + 2 \leq 0$.

2. Dựa vào đồ thị của hàm số bậc hai đã cho, hãy nêu tập nghiệm của các bất phương trình bậc hai tương ứng.

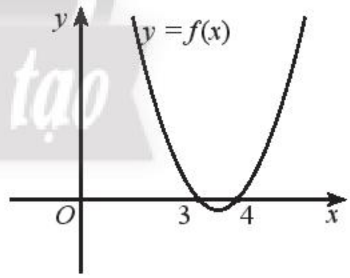
a) $f(x) \geq 0$



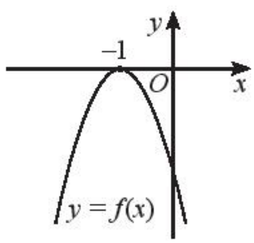
b) $f(x) < 0$



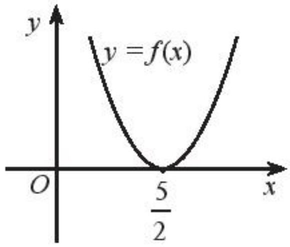
c) $f(x) > 0$



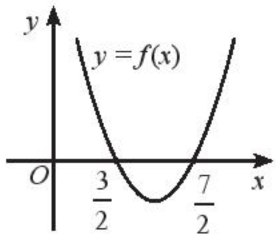
d) $f(x) < 0$



e) $f(x) \leq 0$



g) $f(x) \geq 0$



3. Giải các bất phương trình bậc hai sau:

a) $-9x^2 + 16x + 4 \leq 0$;
b) $6x^2 - 13x - 33 < 0$;
c) $7x^2 - 36x + 5 \leq 0$;
d) $-9x^2 + 6x - 1 \geq 0$;
e) $49x^2 + 56x + 16 > 0$;
g) $-2x^2 + 3x - 2 \leq 0$.

4. Giải các bất phương trình bậc hai sau:

a) $x^2 - 3x < 4$;
b) $0 < 2x^2 - 11x - 6$;
c) $-2(2x + 3)^2 + 4x + 30 \leq 0$;
d) $-3(x^2 - 4x - 1) \leq x^2 - 8x + 28$;
e) $2(x - 1)^2 \geq 3x^2 + 6x + 27$;
g) $2(x + 1)^2 + 9(-x + 2) < 0$.

5. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y = \sqrt{15x^2 + 8x - 12}$;
b) $y = \dfrac{x-1}{\sqrt{-11x^2 + 30x - 16}}$;
c) $y = \dfrac{1}{x-2} - \sqrt{-x^2 + 5x - 6}$;
d) $y = \dfrac{1}{\sqrt{2x+1}} - \sqrt{6x^2 - 5x - 21}$.

6. Tìm giá trị của tham số m để:

a) $x = 3$ là một nghiệm của bất phương trình $(m^2 - 1)x^2 + 2mx - 15 \leq 0$;

b) $x = -1$ là một nghiệm của bất phương trình $mx^2 - 2x + 1 > 0$;

c) $x = \dfrac{5}{2}$ là một nghiệm của bất phương trình $4x^2 + 2mx - 5m \leq 0$;

d) $x = -2$ là một nghiệm của bất phương trình $(2m - 3)x^2 - (m^2 + 1)x \geq 0$;

e) $x = m + 1$ là một nghiệm của bất phương trình $2x^2 + 2mx - m^2 - 2 < 0$.

7. Với giá trị nào của tham số m thì:

a) Phương trình $4x^2 + 2(m - 2)x + m^2 = 0$ có nghiệm;

b) Phương trình $(m + 1)x^2 + 2mx - 4 = 0$ có hai nghiệm phân biệt;

c) Phương trình $mx^2 + (m + 1)x + 3m + 10 = 0$ vô nghiệm;

d) Bất phương trình $2x^2 + (m + 2)x + (2m - 4) \geq 0$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$;

e) Bất phương trình $-3x^2 + 2mx + m^2 \geq 0$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$.

8. Lợi nhuận thu được từ việc sản xuất và bán x sản phẩm thủ công của một cửa hàng là:

$$I(x) = -0{,}1x^2 + 235x - 70\,000,$$

với I được tính bằng nghìn đồng. Với số lượng sản phẩm bán ra là bao nhiêu thì cửa hàng có lãi?

9. Một quả bóng được ném thẳng lên từ độ cao h_0 (m) với vận tốc v_0 (m/s). Độ cao của bóng so với mặt đất (tính bằng mét) sau t (s) được cho bởi hàm số $h(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + h_0$ với $g = 10$ m/s^2 là gia tốc trọng trường.

a) Tính h_0 và v_0 biết độ cao của quả bóng sau 0,5 giây và 1 giây lần lượt là 4,75 m và 5 m.

b) Quả bóng có thể đạt được độ cao trên 4 m không? Nếu có thì trong thời gian bao lâu?

c) Cũng ném từ độ cao h_0 như trên, nếu muốn độ cao của bóng sau 1 giây trong khoảng từ 2 m đến 3 m thì vận tốc ném bóng v_0 cần là bao nhiêu?

Lưu ý: Đáp số làm tròn đến hàng phần trăm.

10. Từ độ cao y_0 mét, một quả bóng được ném lên xiên một góc α so với phương ngang với vận tốc đầu v_0 có phương trình chuyển động

$$y = \frac{-g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2 + (\tan\alpha)x + y_0 \text{ với } g = 10 \text{ m/s}^2.$$

a) Viết phương trình chuyển động của quả bóng nếu $\alpha = 30^\circ$, $y_0 = 2$ m và $v_0 = 7$ m/s.

b) Để ném được quả bóng qua bức tường cao 2,5 m thì người ném phải đứng cách tường bao xa?

Lưu ý: Đáp số làm tròn đến hàng phần trăm.

11. Một hình chữ nhật có chu vi bằng 20 cm. Để diện tích hình chữ nhật lớn hơn hoặc bằng 15 cm^2 thì chiều rộng của hình chữ nhật nằm trong khoảng bao nhiêu?

12. Thiết kế của một chiếc cổng có hình parabol với chiều cao 5 m và khoảng cách giữa hai chân cổng là 4 m.

a) Chọn trục hoành là đường thẳng nối hai chân cổng, gốc toạ độ tại một chân cổng, chân cổng còn lại có hoành độ dương, đơn vị là 1 m. Hãy viết phương trình của vòm cổng.

b) Người ta cần chuyển một thùng hàng hình hộp chữ nhật với chiều cao 3 m. Chiều rộng của thùng hàng tối đa là bao nhiêu để thùng có thể chuyển lọt qua được cổng?

Lưu ý: Đáp số làm tròn đến hàng phần trăm.

Bài 3. PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Giải phương trình dạng $\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{dx^2+ex+f}$

Bước 1: Bình phương hai vế của phương trình để được phương trình

$ax^2+bx+c=dx^2+ex+f$.

Bước 2: Giải phương trình nhận được ở *Bước 1*.

Bước 3: Thử lại các giá trị x tìm được ở *Bước 2* có thoả mãn phương trình đã cho hay không và kết luận nghiệm.

2. Giải phương trình dạng $\sqrt{ax^2+bx+c}=dx+e$

Bước 1: Bình phương hai vế của phương trình để được phương trình

$ax^2+bx+c=(dx+e)^2$.

Bước 2: Giải phương trình nhận được ở *Bước 1*.

Bước 3: Thử lại các giá trị x tìm được ở *Bước 2* có thoả mãn phương trình đã cho hay không và kết luận nghiệm.

B. BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{5x^2-28x-29}=\sqrt{x^2-5x+6}$;

b) $\sqrt{6x^2-22x+14}=\sqrt{4x^2-11x-1}$;

c) $\sqrt{-x^2+x+17}=\sqrt{x^2-12x+2}$.

Giải

a) Bình phương hai vế của phương trình đã cho, ta được:

$$5x^2-28x-29=x^2-5x+6$$

$$\Rightarrow 4x^2-23x-35=0$$

$$\Rightarrow x=7 \text{ hoặc } x=-\frac{5}{4}.$$

Thay lần lượt các giá trị trên vào phương trình đã cho, ta thấy $x = 7$ và $x = -\frac{5}{4}$ thoả mãn.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là 7 và $-\frac{5}{4}$.

b) Bình phương hai vế của phương trình đã cho, ta được:

$$6x^2 - 22x + 14 = 4x^2 - 11x - 1$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 11x + 15 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{5}{2} \text{ hoặc } x = 3.$$

Thay lần lượt các giá trị trên vào phương trình đã cho, ta thấy chỉ có $x = 3$ thoả mãn.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = 3$.

c) Bình phương hai vế của phương trình đã cho, ta được:

$$-x^2 + x + 17 = x^2 - 12x + 2$$

$$\Rightarrow -2x^2 + 13x + 15 = 0$$

$$\Rightarrow x = -1 \text{ hoặc } x = \frac{15}{2}.$$

Thay lần lượt các giá trị trên vào phương trình đã cho, ta thấy chỉ có $x = -1$ thoả mãn.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = -1$.

Bài 2. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{31x^2 + 57x + 2} = 5x + 4$.　　b) $\sqrt{2x^2 - 17x + 52} = -x + 8$.

Giải

a) Bình phương hai vế của phương trình đã cho, ta được:

$$31x^2 + 57x + 2 = (5x + 4)^2$$

$$\Rightarrow 31x^2 + 57x + 2 = 25x^2 + 40x + 16$$

$$\Rightarrow 6x^2 + 17x - 14 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{2}{3} \text{ hoặc } x = -\frac{7}{2}.$$

Thay lần lượt các giá trị trên vào phương trình đã cho, ta thấy chỉ có $x = \frac{2}{3}$ thoả mãn.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = \frac{2}{3}$.

b) Bình phương hai vế của phương trình đã cho, ta được:

$$2x^2 - 17x + 52 = (-x + 8)^2$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 17x + 52 = x^2 - 16x + 64$$

$$\Rightarrow x^2 - x - 12 = 0$$

$\Rightarrow x = -3$ hoặc $x = 4$.

Thay lần lượt các giá trị trên vào phương trình đã cho, ta thấy $x = -3$ và $x = 4$ thoả mãn.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là -3 và 4.

C. BÀI TẬP

1. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{4x^2 + 15x - 19} = \sqrt{5x^2 + 23x - 14}$; b) $\sqrt{8x^2 + 10x - 3} = \sqrt{29x^2 - 7x - 1}$;

c) $\sqrt{-4x^2 - 5x + 8} = \sqrt{2x^2 + 2x - 2}$; d) $\sqrt{5x^2 + 25x + 13} = \sqrt{20x^2 - 9x + 28}$;

e) $\sqrt{-x^2 - 2x + 7} = \sqrt{-x - 13}$.

2. Giải các phương trình sau:

a) $2\sqrt{x^2 + 4x - 7} = \sqrt{-4x^2 + 38x - 43}$;

b) $\sqrt{6x^2 + 7x - 1} - \sqrt{-29x^2 - 41x + 10} = 0$.

3. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{-x^2 + 7x + 13} = 5$; b) $\sqrt{-x^2 + 3x + 7} = 3$;

c) $\sqrt{69x^2 - 52x + 4} = -6x + 4$; d) $\sqrt{-x^2 - 4x + 22} = -2x + 5$;

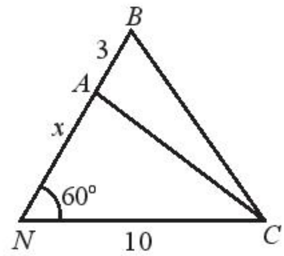
e) $\sqrt{4x + 30} = 2x + 3$; g) $\sqrt{-57x + 139} = 3x - 11$.

4. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{-7x^2 - 60x + 27} + 3(x - 1) = 0$; b) $\sqrt{3x^2 - 9x - 5} + 2x = 5$;

c) $\sqrt{-2x + 8} - x + 6 = x$.

5. Khoảng cách từ nhà An ở vị trí N đến cột điện C là 10 m. Từ nhà, An đi x mét theo phương tạo với NC một góc 60° đến vị trí A sau đó đi tiếp 3 m đến vị trí B như Hình 1.



Hình 1

a) Biểu diễn khoảng cách AC và BC theo x.

b) Tìm x để $AC = \dfrac{8}{9}BC$.

c) Tìm x để khoảng cách $BC = 2AN$.

Lưu ý: Đáp số làm tròn đến hàng phần mười.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG VII

A. TRẮC NGHIỆM

1. Tam thức bậc hai nào có biệt thức $\Delta = 1$ và hai nghiệm là: $x_1 = \dfrac{3}{2}$ và $x_2 = \dfrac{7}{4}$?

A. $8x^2 - 26x + 21$;
B. $4x^2 - 13x + \dfrac{21}{2}$;
C. $4x^2 + 4x - 15$;
D. $2x^2 - 7x + 6$.

2. Tam thức bậc hai nào dương với mọi $x \in \mathbb{R}$?

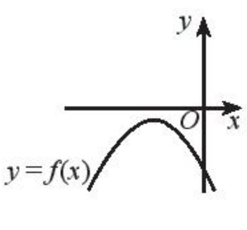
A. $2x^2 - 4x + 2$;
B. $3x^2 + 6x + 2$;
C. $-x^2 + 2x + 3$;
D. $5x^2 - 3x + 1$.

3. Khẳng định nào sau đây đúng với tam thức bậc hai $f(x) = 10x^2 - 3x - 4$?

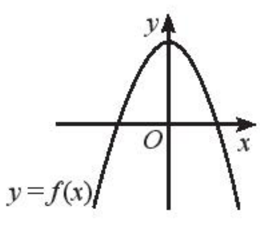
A. $f(x) > 0$ với mọi x không thuộc khoảng $(-1; 1)$;
B. $f(x) < 0$ với mọi x thuộc khoảng $(-1; 1)$;
C. $f(x) \geq 0$ với mọi x thuộc khoảng $\left(-\dfrac{1}{2}; \dfrac{4}{5}\right)$;
D. Các khẳng định trên đều sai.

4. Trong trường hợp nào tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ có $\Delta > 0$ và $a < 0$?

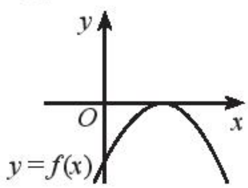
A.



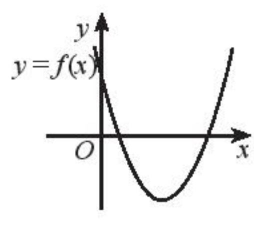
B.



C.

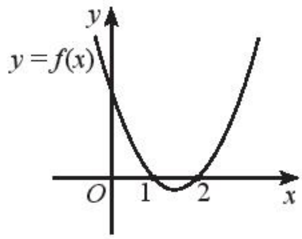


D.



5. Cho đồ thị của hàm số bậc hai $y = f(x)$ như Hình 1. Tập nghiệm của bất phương trình $f(x) \geq 0$ là:

A. $(1; 2)$;
B. $[1; 2]$;
C. $(-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$;
D. $(-\infty; 1] \cup [2; +\infty)$.



Hình 1

6. Bất phương trình nào có tập nghiệm là $(2; 5)$?

A. $x^2 - 7x + 10 > 0$;
B. $x^2 - 7x + 10 < 0$;
C. $x^2 + 13x - 30 > 0$;
D. $x^2 + 13x - 30 < 0$.

7. Tập xác định của hàm số $y = \dfrac{1}{\sqrt{9x^2 - 3x - 2}} + \sqrt{3 - x}$ là:

A. $\left(-\infty; -\dfrac{1}{3}\right) \cup \left(\dfrac{2}{3}; +\infty\right)$;
B. $\left(-\infty; -\dfrac{1}{3}\right) \cup \left(\dfrac{2}{3}; 3\right]$;
C. $\left(-\infty; -\dfrac{1}{3}\right) \cup (3; +\infty)$;
D. $\left(-\dfrac{1}{3}; 3\right]$.

8. Với giá trị nào của tham số m thì phương trình $(2m + 6)x^2 + 4mx + 3 = 0$ có hai nghiệm phân biệt?

A. $m < -\dfrac{3}{2}$ hoặc $m > 3$;
B. $-\dfrac{3}{2} < m < 3$;
C. $m < -3$ hoặc $-3 < m < -\dfrac{3}{2}$ hoặc $m > 3$;
D. $-3 < m < -\dfrac{3}{2}$ hoặc $m > 3$.

9. Giá trị nào là nghiệm của phương trình $\sqrt{x^2 + x + 11} = \sqrt{-2x^2 - 13x + 16}$?

A. $x = -5$;
B. $x = \dfrac{1}{3}$;
C. Cả hai câu A, B đều đúng;
D. Cả hai câu A, B đều sai.

10. Khẳng định nào đúng với phương trình $\sqrt{2x^2 - 3x - 1} = \sqrt{3x^2 - 2x - 13}$?

A. Phương trình có hai nghiệm phân biệt cùng dấu;
B. Phương trình có hai nghiệm phân biệt trái dấu;
C. Phương trình có một nghiệm;
D. Phương trình vô nghiệm.

11. Khẳng định nào đúng với phương trình $\sqrt{5x^2+27x+36} = 2x+5$?

A. Phương trình có một nghiệm;

B. Phương trình vô nghiệm;

C. Tổng các nghiệm của phương trình là -7;

D. Các nghiệm của phương trình đều không bé hơn $-\dfrac{5}{2}$.

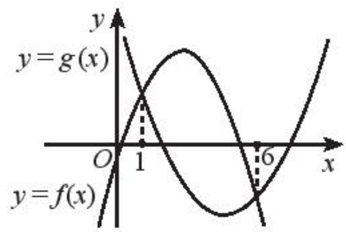
12. Cho đồ thị của hai hàm số bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ và $g(x) = dx^2 + ex + h$ như Hình 2. Khẳng định nào đúng với phương trình $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{dx^2+ex+h}$?

A. Phương trình có hai nghiệm phân biệt là $x = 1$ và $x = 6$;

B. Phương trình có 1 nghiệm là $x = 1$;

C. Phương trình có 1 nghiệm là $x = 6$;

D. Phương trình vô nghiệm.

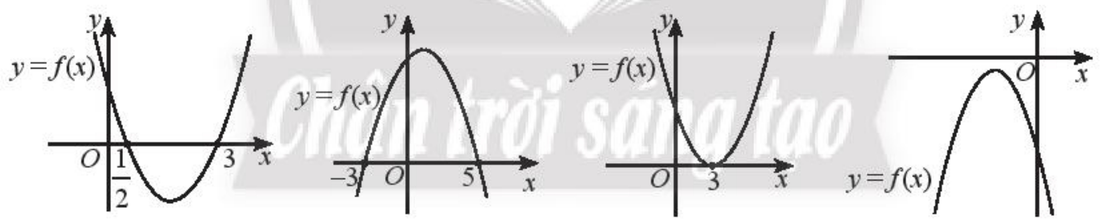


Hình 2

B. TỰ LUẬN

1. Dựa vào đồ thị của hàm số bậc hai $y = f(x)$ sau đây, hãy xét dấu của tam thức bậc hai $f(x)$.

a) b) c) d)



2. Xét dấu của các tam thức bậc hai sau:

a) $f(x) = -7x^2 + 44x - 45$;

b) $f(x) = 4x^2 + 36x + 81$;

c) $f(x) = 9x^2 - 6x + 3$;

d) $f(x) = -9x^2 + 30x - 25$;

e) $f(x) = x^2 - 4x + 3$;

g) $f(x) = -4x^2 + 8x - 7$.

3. Giải các bất phương trình bậc hai sau:

a) $x^2 - 10x + 24 \ge 0$;

b) $-4x^2 + 28x - 49 \le 0$;

c) $x^2 - 5x + 1 > 0$;

d) $9x^2 - 24x + 16 \le 0$;

e) $15x^2 - x - 2 < 0$;

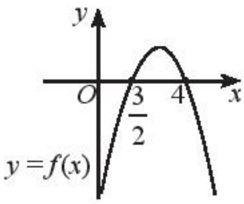
g) $-x^2 + 8x - 17 > 0$;

h) $-25x^2 + 10x - 1 < 0$;

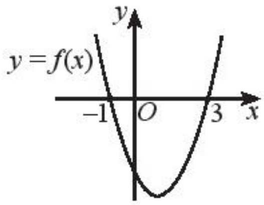
i) $4x^2 + 4x + 7 \le 0$.

4. Dựa vào đồ thị của hàm số bậc hai được cho, hãy giải các bất phương trình sau:

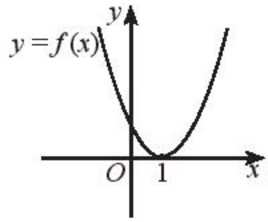
a) $f(x) \geq 0$



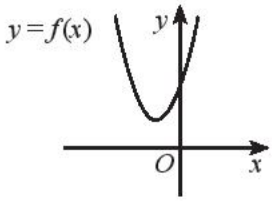
b) $f(x) > 0$



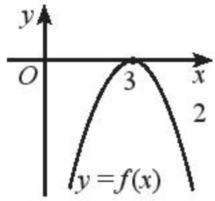
c) $f(x) \leq 0$



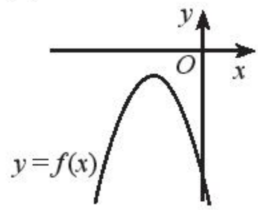
d) $f(x) < 0$



e) $f(x) < 0$



g) $f(x) \leq 0$



5. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{3x^2+7x-1}=\sqrt{6x^2+6x-11}$; b) $\sqrt{x^2+12x+28}=\sqrt{2x^2+14x+24}$;

c) $\sqrt{2x^2-12x-14}=\sqrt{5x^2-26x-6}$; d) $\sqrt{11x^2-43x+25}=-3x+4$;

e) $\sqrt{-5x^2-x+35}=x+5$; g) $\sqrt{11x^2-64x+97}=3x-11$;

6. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y=\sqrt{-x^2+6x-2}$; b) $y=\dfrac{2x}{x-2}+\sqrt{-x^2+3x-2}$.

7. Tìm các giá trị của tham số m để:

a) $f(x)=(m-3)x^2+2mx-m$ là một tam thức bậc hai âm với mọi $x \in \mathbb{R}$;

b) $f(x)=(m-2)x^2+2(m+3)x+5(m-3)$ là một tam thức bậc hai có nghiệm;

c) Phương trình $2x^2+(3m-1)x+2(m+1)=0$ vô nghiệm;

d) Bất phương trình $2x^2+2(m-3)x+3(m^2-3)\geq 0$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$.

8. Người ta thử nghiệm ném một quả bóng trên Mặt Trăng. Nếu quả bóng được ném lên từ độ cao h_0 (m) so với bề mặt của Mặt Trăng với vận tốc v_0 (m/s) thì độ cao của bóng sau t giây được cho bởi hàm số $h(t)=-\dfrac{1}{2}gt^2+v_0t+h_0$ với $g=1{,}625$ m/s^2 là gia tốc trọng trường của Mặt Trăng.

a) Biết độ cao ban đầu của quả bóng vào các thời điểm 8 giây và 12 giây lần lượt là 30 m và 5 m, hãy tìm vận tốc ném; độ cao ban đầu của quả bóng và viết công thức $h(t)$.

b) Quả bóng đạt độ cao trên 29 m trong bao nhiêu giây?

Lưu ý: Đáp số làm tròn đến hàng phần trăm.

9. Một người phát cầu qua lưới từ độ cao y_0 mét, nghiêng một góc α so với phương ngang với vận tốc đầu v_0.

Phương trình chuyển động của quả cầu là:

$$y = \frac{-g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2 + \tan(\alpha)x + y_0 \text{ với } g = 10 \text{ m/s}^2.$$

Viết phương trình chuyển động của quả cầu nếu $\alpha = 45^\circ$, $y_0 = 0{,}3$ m và $v_0 = 7{,}67$ m/s.

b) Để cầu qua được lưới bóng cao 1,5 m thì người phát cầu phải đứng cách lưới bao xa?

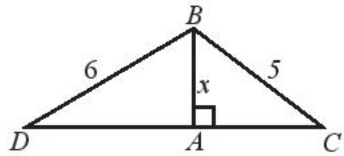
Lưu ý: Đáp số làm tròn đến hàng phần trăm.

10. Cho tam giác ABC và ABD cùng vuông tại A như Hình 3 có $AB = x$; $BC = 5$ và $BD = 6$.

a) Biểu diễn độ dài cạnh AC và AD theo x.

b) Tìm x để chu vi của tam giác ABC là 12.

c) Tìm x để $AD = 2AC$.



Hình 3

LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài 1. DẤU CỦA TAM THỨC BẬC HAI

1. a) $\Delta = -23$, $f(x)$ không có nghiệm và $f(-2) = -18 < 0$ nên $f(x)$ âm tại $x = -2$.

b) $\Delta = 0$, $g(x)$ có nghiệm $x = -2$ và $g(-2) = 0$ nên $g(x)$ không âm, không dương tại $x = -2$.

c) $\Delta = 169$, $h(x)$ có nghiệm $x_1 = -\frac{10}{3}$ và $x_2 = 1$. $h(-2) = -12$ nên $h(x)$ âm tại $x = -2$.

2. a) $f(x)$ là tam thức bậc hai khi và chỉ khi $2m - 8 \neq 0$, hay $m \neq 4$.

b) $f(x)$ là tam thức bậc hai khi và chỉ khi $2m + 3 \neq 0$, tức là $m \neq -\frac{3}{2}$.

$f(x)$ có $x = 3$ là nghiệm khi và chỉ khi $f(3) = 9(2m + 3) + 9 - 4m^2 = 0$, tức là $m = -\frac{3}{2}$ hoặc $m = 6$. Vậy $m = 6$.

c) $f(x)$ dương tại $x = 2$ khi và chỉ khi $f(2) = 2m + 5 > 0$, tức là $m > -\frac{5}{2}$.

3. a) $f(x)$ là tam thức bậc hai khi và chỉ khi $m^2 + 9 \neq 0$, đúng với mọi $m \in \mathbb{R}$.

$f(x)$ có một nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $\Delta = (m + 6)^2 - 4(m^2 + 9) = 0$, tức là $m = 0$ hoặc $m = 4$. Vậy $m = 0$ hoặc $m = 4$.

b) $f(x)$ là tam thức bậc hai khi và chỉ khi $m - 1 \neq 0$ hay $m \neq 1$.

$f(x)$ có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $\Delta = 9 - 4(m - 1) > 0$ hay $m < \frac{13}{4}$.

Vậy $m < \frac{13}{4}$ và $m \neq 1$.

c) $f(x)$ là tam thức bậc hai khi và chỉ khi $m \neq 0$.

$f(x)$ vô nghiệm khi và chỉ khi $\Delta = (m + 2)^2 - 4m < 0$, hay $m^2 + 4 < 0$.

Điều này không xảy ra với bất kì giá trị m nào.

Vậy không có giá trị nào của m thoả mãn yêu cầu.

4. a) $f(x)$ dương trên $(-\infty; -2{,}5)$ và $(3; +\infty)$, âm trên $(-2{,}5; 3)$.

b) $g(x)$ dương với mọi $x \neq -1$.

c) $h(x)$ âm với mọi $x \in \mathbb{R}$.

5. a) $f(x)$ dương trong khoảng $(-\infty; 1)$ và $(4; +\infty)$, âm trong khoảng $(1; 4)$.

b) $f(x)$ âm với mọi $x \neq 3$.

c) $f(x)$ dương với mọi $x \in \mathbb{R}$.

d) $f(x)$ âm trong khoảng $(-\infty; -1)$ và $(2{,}5; +\infty)$, dương trong khoảng $(-1; 2{,}5)$.

e) $f(x)$ âm với mọi $x \in \mathbb{R}$.

g) $f(x)$ dương với mọi $x \neq -\frac{3}{2}$.

6. a) $f(x)$ là tam thức bậc hai không đổi dấu trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $m + 1 \neq 0$ và

$\Delta = 25 - 8(m + 1) < 0$. Vậy $m > \frac{17}{8}$.

b) $f(x)$ là tam thức bậc hai âm với mọi $x \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi $m < 0$ và

$\Delta = 7^2 - 16m < 0$, nghĩa là $m < 0$ và $m > \frac{49}{16}$, vô lí.

Vậy không có giá trị nào của tham số m thoả mãn yêu cầu.

c) Vì $3 > 0$ nên $f(x)$ là tam thức bậc hai dương với mọi $x \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi

$\Delta' = 4 - 3(3m - 1) < 0$, nghĩa là $m > \frac{7}{9}$.

d) Vì $m^2 + 1 > 0$ nên $f(x)$ không thể âm với mọi $x \in \mathbb{R}$. Vậy không có giá trị nào của tham số m thoả mãn yêu cầu.

7. a) Vì tam thức bậc hai $2x^2 + \sqrt{3}x + 1$ có $a = 2 > 0$ và $\Delta = -5 < 0$,

nên $2x^2 + \sqrt{3}x + 1 > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

b) Vì tam thức bậc hai $x^2 + x + \frac{1}{4}$ có $a = 1 > 0$ và $\Delta = 0$, nên $x^2 + x + \frac{1}{4} \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

c) Vì tam thức bậc hai $-x^2 + 2x - 3$ có $a = -1 < 0$ và $\Delta' = -2 < 0$,

nên $-x^2 + 2x - 3 < 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Do đó $-x^2 < -2x + 3$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

8. a) Đồ thị hàm số đi qua điểm có toạ độ $(-1; -4)$ nên ta có: $a - b + c = -4$ (1).

Đồ thị hàm số đi qua điểm có toạ độ $(0; 3)$ nên ta có: $c = 3$ (2).

Đồ thị hàm số đi qua điểm có toạ độ $(1; -14)$ nên ta có: $a + b + c = -14$ (3).

Thay (2) vào phương trình (1) và (3) ta có $\begin{cases} a - b = -7 \\ a + b = -17 \end{cases}$, tức là $a = -12$ và $b = -5$. Vậy $f(x) = -12x^2 - 5x + 3$. Vì tam thức bậc hai $f(x)$ có $a = -12 < 0$ và hai nghiệm $x_1 = -\frac{3}{4}$ và $x_2 = \frac{1}{3}$ nên $f(x)$ dương trong khoảng $\left(-\frac{3}{4}; \frac{1}{3}\right)$ và âm trong các khoảng $\left(-\infty; -\frac{3}{4}\right)$, $\left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$.

b) Đồ thị hàm số đi qua điểm có toạ độ $(0; -2)$ nên ta có: $c = -2$ (1).

Đồ thị hàm số đi qua điểm có toạ độ $(2; 6)$ nên ta có: $4a + 2b + c = 6$ (2).

Đồ thị hàm số đi qua điểm có toạ độ $(3; 13)$ nên ta có: $9a + 3b + c = 13$ (3).

Thay (1) vào phương trình (2) và (3) ta có $\begin{cases} 4a + 2b = 8 \\ 9a + 3b = 15 \end{cases}$, tức là $a = 1$ và $b = 2$.

Vậy $f(x) = x^2 + 2x - 2$.

Vì tam thức bậc hai $f(x)$ có $a = 1 > 0$ và hai nghiệm $x_1 = -1 - \sqrt{3}$ và $x_2 = -1 + \sqrt{3}$ nên $f(x)$ âm trong khoảng $\left(-1 - \sqrt{3}; -1 + \sqrt{3}\right)$ và dương trong các khoảng $\left(-\infty; -1 - \sqrt{3}\right)$ và $\left(-1 + \sqrt{3}; +\infty\right)$.

c) $f(-5) = 33$ nên ta có $25a - 5b + c = 33$ (1).

$f(0) = 3$ nên ta có $c = 3$ (2).

$f(2) = 19$ nên ta có $4a + 2b + c = 19$ (3).

Thay (2) vào phương trình (1) và (3) ta có $\begin{cases} 25a - 5b = 30 \\ 4a + 2b = 16 \end{cases}$, tức là $a = 2$ và $b = 4$.

Vậy $f(x) = 2x^2 + 4x + 3$. Vì tam thức bậc hai $f(x)$ có $a = 2 > 0$ và $\Delta' = -2 < 0$ nên $f(x)$ dương với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Bài 2. GIẢI BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN

1. a) $x = 2$ không là nghiệm của bất phương trình $x^2 - 3x + 1 > 0$

vì $2^2 - 3.2 + 1 = -1 < 0$.

b) $x = 2$ là nghiệm của bất phương trình $-4x^2 - 3x + 5 \leq 0$

vì $-4.2^2 - 3.2 + 5 = -17 < 0$.

c) $x = 2$ là nghiệm của bất phương trình $2x^2 - 5x + 2 \leq 0$

vì $2.2^2 - 5.2 + 2 = 0 \leq 0$.

2. a) $\left[-\dfrac{5}{2};1\right]$; b) $\varnothing$; c) $(-\infty; 3)\cup(4; +\infty)$;

d) $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$; e) $\left\{\dfrac{5}{2}\right\}$; g) $\left(-\infty;\dfrac{3}{2}\right]\cup\left[\dfrac{7}{2};+\infty\right)$.

3. a) $x \leq -\dfrac{2}{9}$ hoặc $x \geq 2$; b) $-\dfrac{3}{2} < x < \dfrac{11}{3}$; c) $\dfrac{1}{7} \leq x \leq 5$;

d) $x = \dfrac{1}{3}$; e) $x \in \mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{-4}{7}\right\}$; g) $x \in \mathbb{R}$.

4. a) $-1 < x < 4$; b) $x < -\dfrac{1}{2}$ hoặc $x > 6$;

c) $x \leq -3$ hoặc $x \geq \dfrac{1}{2}$; d) $x \in \mathbb{R}$;

e) $x = -5$; g) Vô nghiệm.

5. a) Hàm số xác định khi và chỉ khi $15x^2 + 8x - 12 \geq 0$, tức là $x \leq -\dfrac{6}{5}$ hoặc $x \geq \dfrac{2}{3}$.

Vậy tập xác định của hàm số là $\left(-\infty;-\dfrac{6}{5}\right]\cup\left[\dfrac{2}{3};+\infty\right)$.

b) Hàm số xác định khi và chỉ khi $-11x^2 + 30x - 16 > 0$, tức là $\dfrac{8}{11} < x < 2$.

Vậy tập xác định của hàm số là $\left(\dfrac{8}{11};2\right)$.

c) Hàm số xác định khi và chỉ khi $x - 2 \neq 0$ và $-x^2 + 5x - 6 \geq 0$.

$x - 2 \neq 0$ khi và chỉ khi $x \neq 2$; $-x^2 + 5x - 6 \geq 0$ khi và chỉ khi $2 \leq x \leq 3$.

Vậy $2 < x \leq 3$. Tập xác định của hàm số là $(2; 3]$.

d) Hàm số xác định khi và chỉ khi $2x + 1 > 0$ và $6x^2 - 5x - 21 \geq 0$.

$2x + 1 > 0$ khi và chỉ khi $x > -\dfrac{1}{2}$.

$6x^2 - 5x - 21 \geq 0$ khi và chỉ khi $x \leq -\dfrac{3}{2}$ hoặc $x \geq \dfrac{7}{3}$.

Vậy $x \geq \dfrac{7}{3}$. Tập xác định của hàm số là $\left[\dfrac{7}{3};+\infty\right)$.

6. a) $x = 3$ là một nghiệm của bất phương trình $(m^2 - 1)x^2 + 2mx - 15 \leq 0$ khi và chỉ khi $9(m^2 - 1) + 6m - 15 \leq 0$, hay $9m^2 + 6m - 24 \leq 0$, tức là $-2 \leq m \leq \dfrac{4}{3}$.

Vậy $-2 \leq m \leq \dfrac{4}{3}$.

b) $x = -1$ là một nghiệm của bất phương trình $mx^2 - 2x + 1 > 0$ khi và chỉ khi $m + 3 > 0$, hay $m > -3$. Vậy $m > -3$.

c) $x = \dfrac{5}{2}$ là một nghiệm của bất phương trình $4x^2 + 2mx - 5m \leq 0$ khi và chỉ khi

$4 . \left(\dfrac{5}{2}\right)^2 + 2m . \dfrac{5}{2} - 5m \leq 0$, hay $25 \leq 0$, bất đẳng thức này sai với mọi $m \in \mathbb{R}$.

Vậy không có giá trị m nào thoả mãn yêu cầu.

d) $x = -2$ là một nghiệm của bất phương trình $(2m - 3)x^2 - (m^2 + 1)x \geq 0$ khi và chỉ khi $4(2m - 3) + 2(m^2 + 1) \geq 0$, hay $2m^2 + 8m - 10 \geq 0$, tức là $m \leq -5$ hoặc $m \geq 1$. Vậy $m \leq -5$ hoặc $m \geq 1$.

e) $x = m + 1$ là một nghiệm của bất phương trình $2x^2 + 2mx - m^2 - 2 < 0$ khi và chỉ khi $2(m + 1)^2 + 2m(m + 1) - m^2 - 2 < 0$,

hay $3m^2 + 6m < 0$, tức là $-2 < m < 0$. Vậy $-2 < m < 0$.

7. a) Phương trình có nghiệm khi và chỉ khi

$\Delta' = (m - 2)^2 - 4m^2 = -3m^2 - 4m + 4 \geq 0$, tức là $-2 \leq m \leq \dfrac{2}{3}$. Vậy $-2 \leq m \leq \dfrac{2}{3}$.

b) Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $m + 1 \neq 0$ và

$\Delta' = m^2 + 4m + 4 > 0$.

$m + 1 \neq 0$ khi và chỉ khi $m \neq -1$.

$m^2 + 4m + 4 > 0$ khi và chỉ khi $m \neq -2$.

Vậy $m \neq -1$ và $m \neq -2$.

c) Nếu $m = 0$ thì phương trình trở thành $x + 10 = 0$, có nghiệm $x = -10$.

Do đó $m = 0$ không thoả mãn yêu cầu.

Nếu $m \neq 0$ thì phương trình vô nghiệm khi và chỉ khi

$\Delta = (m + 1)^2 - 4m(3m + 10) < 0$ hay $-11m^2 - 38m + 1 < 0$.

Vậy $m < \dfrac{-19 - 2\sqrt{93}}{11}$ và $m > \dfrac{-19 + 2\sqrt{93}}{11}$.

d) Vì $a = 2 > 0$ nên bất phương trình có tập nghiệm là $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $\Delta \leq 0$, hay $(m + 2)^2 - 8(2m - 4) \leq 0$, tức là $m^2 - 12m + 36 \leq 0$.

Giải bất phương trình này ta có $m = 6$. Vậy $m = 6$.

e) Vì $a = -3 < 0$ và $\Delta' = 4m^2 > 0$ nên bất phương trình không thể có tập nghiệm là $\mathbb{R}$.

Vậy không có giá trị nào của m thoả mãn yêu cầu.

8. Cửa hàng có lãi khi và chỉ khi $I(x) > 0$ hay $-0,1x^2 + 235x - 70\,000 > 0$, tức là $350 < x < 2\,000$.

Vậy khi sản xuất và bán ra từ 351 đến 1 999 sản phẩm thì cửa hàng có lãi.

9. a) Ta có $h(t) = -5t^2 + v_0 t + h_0$.

Độ cao của quả bóng tại thời điểm sau khi ném 0,5 giây và 1 giây lần lượt là 4,75 m và 5 m, ta được: $\begin{cases} 0,5v_0 + h_0 = 6 \\ v_0 + h_0 = 10 \end{cases}$ tức là $\begin{cases} v_0 = 8 \\ h_0 = 2 \end{cases}$.

Vậy $h(t) = -5t^2 + 8t + 2$.

b) Bóng cao trên 4 m khi và chỉ khi $h(t) = -5t^2 + 8t + 2 > 4$, hay $\dfrac{4 - \sqrt{6}}{5} < t < \dfrac{4 + \sqrt{6}}{5}$.

Vậy bóng đạt độ cao trên 4 m trong khoảng thời gian ít hơn 0,98 giây.

c) Độ cao của quả bóng sau 1 giây trong khoảng từ 2 m đến 3 m khi và chỉ khi $2 < h(1) = -5 + v_0 + 2 < 3$, tức là $5 < v_0 < 6$ (m/s).

Vậy vận tốc ném cần nằm trong khoảng từ 5 m/s đến 6 m/s.

10. a) $y = -0,14x^2 + 0,58x + 2$.

b) Với x là khoảng cách từ người ném đến tường thì bóng ném được qua tường khi và chỉ khi $y(x) > 2,5$, hay $-0,14x^2 + 0,58x - 0,5 > 0$, tức là $1,22 < x < 2,92$ (m).

Vậy người ném bóng cần đứng cách tường trong khoảng từ trên 1,22 m đến dưới 2,92 m.

11. Gọi x (cm) là chiều rộng của hình chữ nhật. Khi đó chiều dài của hình chữ nhật là $10 - x$ (cm).

Ta có $0 < x \leq 10 - x$, hay $0 < x \leq 5$ (cm) (1).

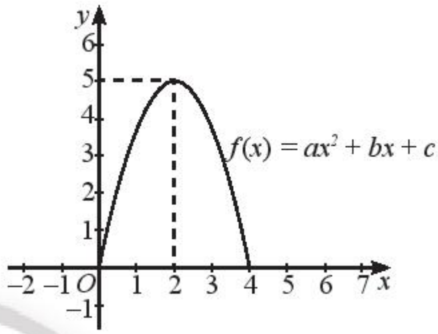
Diện tích của hình chữ nhật là $S = x(10 - x)$.

Ta có $x(10 - x) \geq 15$ khi và chỉ khi $x^2 + 10x - 15 \geq 0$, hay $x \leq -5 - 2\sqrt{10}$ hoặc $x \geq -5 + 2\sqrt{10}$.

So với điều kiện (1), ta có $-5 + 2\sqrt{10} \leq x \leq 5$.

Vậy chiều rộng của hình chữ nhật nằm trong khoảng từ 1,33 cm đến 5 cm.

12. a) Đặt gốc toạ độ tại một chân cổng như hình, ta viết phương trình $y = ax^2 + bx + c$ của đường viền cổng.



Ta có một chân cổng có toạ độ (0; 0) nên ta có:
$c = 0$ (1).

Ta có một chân cổng có toạ độ (4; 0) nên ta có:
$16a + 4b + c = 0$ (2).

Ta có đỉnh cổng có toạ độ (2; 5) nên ta có:
$4a + 2b + c = 5$. (3).

Thay (1) vào (2) và (3) ta có hệ phương trình: $\begin{cases} 16a + 4b = 0 \\ 4a + 2b = 5. \end{cases}$

Do đó $a = -1,25$; $b = 5$ và $c = 0$.

Vậy phương trình của vòm cổng là $y = -1,25x^2 + 5x$.

b) Ta xác định các hoành độ x mà tại đó vòm cổng cao hơn thùng hàng bằng cách giải bất phương trình $y = -1,25x^2 + 5x \geq 3$.

Ta có $-1,25x^2 + 3,2x \geq 3$ khi và chỉ khi $0,74 \leq x \leq 3,26$.

Vậy chiều rộng tối đa của thùng hàng là $3,26 - 0,74 = 2,52$ (m).

Bài 3. PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

1. a) Bình phương hai vế của phương trình đã cho, ta được:

$$4x^2 + 15x - 19 = 5x^2 + 23x - 14$$

$$\Rightarrow x^2 + 8x + 5 = 0$$

$$\Rightarrow x = -4 + \sqrt{11} \text{ hoặc } x = -4 - \sqrt{11}.$$

Thay lần lượt các giá trị trên vào phương trình đã cho, ta thấy chỉ có $-4 - \sqrt{11}$ thoả mãn. Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $-4 - \sqrt{11}$.

b) Bình phương hai vế của phương trình đã cho, ta được:

$$8x^2 + 10x - 3 = 29x^2 - 7x - 1$$

$$\Rightarrow -21x^2 + 17x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{7} \text{ hoặc } x = \frac{2}{3}.$$

Thay lần lượt các giá trị trên vào phương trình đã cho, ta thấy chỉ có $x = \frac{2}{3}$ thoả mãn.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = \frac{2}{3}$.

c) $x = -2$ và $x = \frac{5}{6}$. d) $x = \frac{3}{5}$ và $x = \frac{5}{3}$. e) Phương trình vô nghiệm.

2. a) $x = \frac{3}{2}$. b) $x = \frac{1}{5}$ và $x = -\frac{11}{7}$.

3. a) $x = 3$ và $x = 4$. b) $x = 1$ và $x = 2$. c) $x = -\frac{6}{11}$ và $x = \frac{2}{3}$.

d) $x = \frac{1}{5}$. e) $x = \frac{3}{2}$. g) Phương trình vô nghiệm.

4. a) $x = -3$ và $x = \frac{3}{8}$.

b) Ta có: $\sqrt{3x^2 - 9x - 5} + 2x = 5$

$$\Rightarrow \sqrt{3x^2 - 9x - 5} = 5 - 2x \qquad (1).$$

Bình phương hai vế của phương trình (1), ta được:

$$3x^2 - 9x - 5 = (-2x + 5)^2$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 9x - 5 = 4x^2 - 20x + 25$$

$$\Rightarrow -x^2 + 11x - 30 = 0$$

$$\Rightarrow x = 5 \text{ hoặc } x = 6.$$

Thay lần lượt các giá trị trên vào phương trình đã cho, ta thấy $x = 5$ và $x = 6$ không thoả mãn.

Vậy phương trình vô nghiệm.

c) Ta có: $\sqrt{-2x + 8} - x + 6 = x$

$$\Rightarrow \sqrt{-2x + 8} = 2x - 6 \qquad (1).$$

Bình phương hai vế của phương trình (1), ta được:

$$-2x + 8 = (2x - 6)^2$$

$$\Rightarrow -2x + 8 = 4x^2 - 24x + 36$$

$$\Rightarrow 4x^2 - 22x + 28 = 0$$

$$\Rightarrow x = 2 \text{ hoặc } x = \frac{7}{2}.$$

Thay lần lượt các giá trị trên vào phương trình đã cho, ta thấy chỉ có $x=\frac{7}{2}$ thoả mãn.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x=\frac{7}{2}$.

5. a) Vì x là khoảng cách AN nên $x \geq 0$.

$$AC=\sqrt{AN^2+NC^2-2AN.\,NC.\cos 60^\circ}=\sqrt{x^2+100-10x}$$

$$BC=\sqrt{BN^2+NC^2-2BN.\,NC.\,\cos 60^\circ}=\sqrt{(x+3)^2+100-10(x+3)}$$

$$=\sqrt{x^2-4x+79}.$$

b) Ta có $AC=\frac{8}{9}BC$

$\Rightarrow \sqrt{x^2-10x+100}=\frac{8}{9}\sqrt{x^2-4x+79}$

$\Rightarrow 81(x^2-10x+100)=64(x^2-4x+79)$

$\Rightarrow 17x^2-554x+3\,044=0$

$\Rightarrow x \approx 25{,}6$ hoặc $x \approx 7$.

Vậy $x \approx 25{,}6$ hoặc $x \approx 7$.

c) Ta có $BC = 2AN$

$\Rightarrow \sqrt{x^2-4x+79}=2x$

$\Rightarrow x^2-4x+79=4x^2$

$\Rightarrow 3x^2+4x-79=0$

$\Rightarrow x \approx 4{,}5$ hoặc $x \approx -5{,}8$.

Mà vì $x \geq 0$ nên ta có $x \approx 4{,}5$.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG VII

A. TRẮC NGHIỆM

1. B	**2.** D	**3.** D	**4.** B	**5.** D	**6.** B
7. B	**8.** C	**9.** C	**10.** B	**11.** A	**12.** B

B. TỰ LUẬN

1. a) $f(x)$ dương trong hai khoảng $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$ và $(3; +\infty)$, âm trong khoảng $\left(\frac{1}{2}; 3\right)$.

b) $f(x)$ dương trong khoảng $(-3; 5)$, âm trong hai khoảng $(-\infty; -3)$ và $(5; +\infty)$.

c) $f(x)$ dương với mọi $x \neq 3$.

d) $f(x)$ âm với mọi $x \in \mathbb{R}$.

2. a) $f(x)$ dương trong khoảng $\left(\frac{9}{7}; 5\right)$, âm trong hai khoảng $\left(-\infty; \frac{9}{7}\right)$ và $(5; +\infty)$.

b) $f(x)$ dương với mọi $x \neq -\frac{9}{2}$.

c) $f(x)$ dương với mọi $x \in \mathbb{R}$.

d) $f(x)$ âm với mọi $x \neq \frac{5}{3}$.

e) $f(x)$ dương trong hai khoảng $(-\infty; 1)$ và $(3; +\infty)$, âm trong khoảng $(1; 3)$.

g) $f(x)$ âm với mọi $x \in \mathbb{R}$.

3. a) $x \leq 4$ hoặc $x \geq 6$.

b) $x \in \mathbb{R}$.

c) $x < \frac{5-\sqrt{21}}{2}$ hoặc $x > \frac{5+\sqrt{21}}{2}$.

d) $x = \frac{4}{3}$.

e) $-\frac{1}{3} < x < \frac{2}{5}$.

g) Vô nghiệm.

h) $x \neq \frac{1}{5}$.

i) Vô nghiệm.

4. a) $\frac{3}{2} \leq x \leq 4$.

b) $x < -1$ hoặc $x > 3$.

c) $x = 1$.

d) Vô nghiệm.

e) $x \neq 3$.

g) $x \in \mathbb{R}$.

5. a) Bình phương hai vế của phương trình đã cho, ta được:

$$3x^2 + 7x - 1 = 6x^2 + 6x - 11$$

$$\Rightarrow -3x^2 + x + 10 = 0$$

$$\Rightarrow x = -\frac{5}{3} \text{ hoặc } x = 2.$$

Thay lần lượt các giá trị trên vào phương trình đã cho, ta thấy chỉ có $x = 2$ thoả mãn.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = 2$.

b) Bình phương hai vế của phương trình đã cho, ta được:

$$x^2 + 12x + 28 = 2x^2 + 14x + 24$$

$$\Rightarrow -x^2 - 2x + 4 = 0$$

$$\Rightarrow x = -1 - \sqrt{5} \text{ hoặc } x = -1 + \sqrt{5}.$$

Thay lần lượt các giá trị trên vào phương trình đã cho, ta thấy chỉ có $x = -1 + \sqrt{5}$ thoả mãn.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = -1 + \sqrt{5}$.

c) Bình phương hai vế của phương trình đã cho, ta được:

$$2x^2 - 12x - 14 = 5x^2 - 26x - 6$$

$$\Rightarrow -3x^2 + 14x - 8 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{2}{3} \text{ hoặc } x = 4.$$

Thay lần lượt các giá trị trên vào phương trình đã cho, ta thấy $x = \frac{2}{3}$ và $x = 4$ không thoả mãn.

Vậy phương trình vô nghiệm.

d) Bình phương hai vế của phương trình đã cho, ta được:

$$11x^2 - 43x + 25 = (-3x + 4)^2$$

$$\Rightarrow 11x^2 - 43x + 25 = 9x^2 - 24x + 16$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 19x + 9 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2} \text{ hoặc } x = 9.$$

Thay lần lượt các giá trị trên vào phương trình đã cho, ta thấy chỉ có $x = \frac{1}{2}$ thoả mãn.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = \frac{1}{2}$.

e) Bình phương hai vế của phương trình đã cho, ta được:

$$-5x^2 - x + 35 = (x + 5)^2$$

$$\Rightarrow -5x^2 - x + 35 = x^2 + 10x + 25$$

$$\Rightarrow -6x^2 - 11x + 10 = 0$$

$$\Rightarrow x = -\frac{5}{2} \text{ hoặc } x = \frac{2}{3}.$$

Thay lần lượt các giá trị trên vào phương trình đã cho, ta thấy $x = -\frac{5}{2}$ và $x = \frac{2}{3}$ thoả mãn.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = -\frac{5}{2}$ và $x = \frac{2}{3}$.

g) Bình phương hai vế của phương trình đã cho, ta được:

$$11x^2 - 64x + 97 = (3x - 11)^2$$
$$\Rightarrow 11x^2 - 64x + 97 = 9x^2 - 66x + 121$$
$$\Rightarrow 2x^2 + 2x - 24 = 0$$
$$\Rightarrow x = 3 \text{ hoặc } x = -4.$$

Thay lần lượt các giá trị trên vào phương trình đã cho, ta thấy $x = 3$ và $x = -4$ không thoả mãn.

Vậy phương trình vô nghiệm.

6. a) Hàm số xác định khi và chỉ khi $-x^2 + 6x - 2 \geq 0$, tức là $3-\sqrt{7} \leq x \leq 3+\sqrt{7}$.

Vậy tập xác định của hàm số đã cho là $\left[3-\sqrt{7}; 3+\sqrt{7}\right]$.

b) Hàm số xác định khi và chỉ khi $-x^2 + 3x - 2 \geq 0$ và $x \neq 2$, tức là $1 \leq x < 2$.

Vậy $1 \leq x < 2$. Tập xác định của hàm số đã cho là $[1; 2)$.

7. a) $f(x)$ là một tam thức bậc hai âm với mọi $x \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi $m - 3 < 0$ và $\Delta' < 0$.

$m - 3 < 0$ khi và chỉ khi $m < 3$.

$\Delta' = m^2 + m(m - 3) < 0$ khi và chỉ khi $0 < m < \frac{3}{2}$. Vậy $0 < m < \frac{3}{2}$.

b) $f(x)$ là một tam thức bậc hai có nghiệm khi và chỉ khi $m - 2 \neq 0$ và $\Delta' \geq 0$.

$m - 2 \neq 0$ khi và chỉ khi $m \neq 2$.

$\Delta' = (m + 3)^2 - 5(m - 3)(m - 2) \geq 0$ khi và chỉ khi $-4m^2 + 31m - 21 \geq 0$, tức là $\frac{3}{4} \leq m \leq 7$. Vậy $\frac{3}{4} \leq m < 2$ và $2 < m \leq 7$.

c) Phương trình vô nghiệm khi và chỉ khi $\Delta = (3m - 1)^2 - 16(m + 1) < 0$,

hay $9m^2 - 22m - 15 < 0$, tức là $-\frac{5}{9} < m < 3$. Vậy $-\frac{5}{9} < m < 3$.

d) Bất phương trình có tập nghiệm là $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi

$\Delta' = (m - 3)^2 - 6(m^2 - 3) < 0$, hay $-5m^2 - 6m + 27 < 0$, tức là $m < -3$ hoặc $m > \frac{9}{5}$.

Vậy $m < -3$ hoặc $m > \frac{9}{5}$.

8. a) Ta có $h(t) = -0,8125t^2 + v_0t + h_0$, $h(8) = 30$ và $h(12) = 5$.

Do đó $\begin{cases} -52 + 8v_0 + h_0 = 30 \\ -117 + 12v_0 + h_0 = 5 \end{cases}$ hay $\begin{cases} v_0 = 10 \\ h_0 = 2. \end{cases}$

Vậy $h(t) = -0,8125t^2 + 10t + 2$.

b) Quả bóng đạt độ cao trên 29 m khi và chỉ khi $-0,8125t^2 + 10t + 2 > 29$, hay $4 < t < 8,31$. Vậy quả bóng ở độ cao trên 29 m trong khoảng $8,31 - 4 = 4,31$ giây.

9. a) $y = -0,17x^2 + x + 0,3$.

b) Với x là khoảng cách từ người phát cầu đến lưới thì cầu phát được qua lưới khi và chỉ khi $y(x) > 1,5$ hay $-0,17x^2 + x + 0,3 > 1,5$ tức là $1,68 < x < 4,20$ (m).

Vậy người phát cầu cần đứng cách lưới trong khoảng từ 1,68 m đến 4,20 m.

10. Vì x là độ dài của cạnh AB nên $x > 0$.

a) $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{25 - x^2}$;

$AD = \sqrt{BD^2 - AB^2} = \sqrt{36 - x^2}$.

b) Giải phương trình $AB + AC + BC = 12$

$\Rightarrow x + 5 + \sqrt{25 - x^2} = 12 \Rightarrow \sqrt{25 - x^2} = 7 - x$

$\Rightarrow 25 - x^2 = (7 - x)^2$

$\Rightarrow x = 4$ hoặc $x = 3$.

Thay lần lượt các giá trị trên vào phương trình $AB + AC + BC = 12$ ta thấy $x = 4$ hoặc $x = 3$ thoả mãn. Vậy $x = 3$ hoặc $x = 4$ để chu vi tam giác ABC là 12.

c) Giải phương trình $AD = 2AC$:

$\sqrt{36 - x^2} = 2\sqrt{25 - x^2} \Rightarrow 36 - x^2 = 4(25 - x^2)$

$\Rightarrow x = -\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$ hoặc $x = \dfrac{8\sqrt{3}}{3}$.

Thay lần lượt các giá trị trên vào phương trình $AD = 2AC$ ta thấy $x = -\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$ hoặc $x = \dfrac{8\sqrt{3}}{3}$ thoả mãn.

Vì $x > 0$ nên $x = \dfrac{8\sqrt{3}}{3}$. Vậy $x = \dfrac{8\sqrt{3}}{3}$ để $AD = 2AC$.

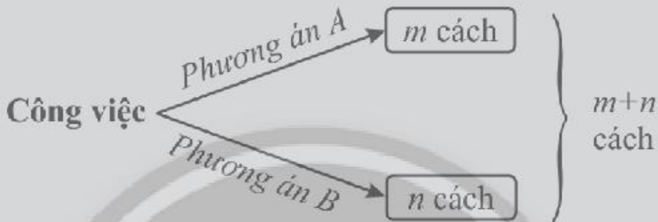
Chương VIII. ĐẠI SỐ TỔ HỢP

Bài 1. QUY TẮC CỘNG VÀ QUY TẮC NHÂN

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Quy tắc cộng

Giả sử một công việc có thể được thực hiện theo phương án A hoặc B. Phương án A có m cách thực hiện, phương án B có n cách thực hiện không trùng với bất kì cách nào của phương án A. Khi đó, công việc có thể thực hiện theo $m + n$ cách.

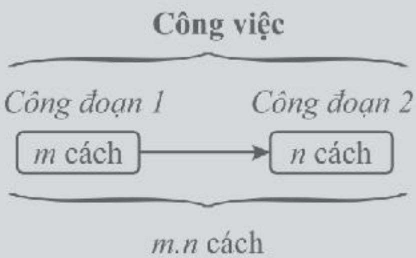


Tổng quát:

Giả sử một công việc có thể được thực hiện theo k phương án. Phương án thứ nhất có m_1 cách thực hiện; phương án thứ hai có m_2 cách thực hiện; ...; phương án thứ k có m_k cách thực hiện. Hơn nữa, mỗi cách thực hiện của phương án này không trùng với bất kì cách nào của phương án khác. Khi đó, có thể thực hiện công việc theo $m_1 + m_2 + \cdots + m_k$ cách.

2. Quy tắc nhân

Giả sử một công việc được chia thành hai công đoạn. Công đoạn thứ nhất có m cách thực hiện và ứng với mỗi cách đó có n cách thực hiện công đoạn thứ hai. Khi đó, công việc có thể thực hiện theo $m\ .\ n$ cách.



Tổng quát:

Giả sử một công việc nào đó bao gồm k công đoạn. Công đoạn thứ nhất có n_1 cách thực hiện; công đoạn thứ hai có n_2 cách thực hiện, ...; công đoạn thứ k có n_k cách thực hiện. Khi đó, có thể hoàn thành công việc theo $n_1 . n_2 .....n_k$ cách.

B. BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Trên giá sách có 6 cuốn sách Ngữ Văn khác nhau, 7 cuốn sách Toán khác nhau và 8 cuốn sách Tiếng Anh khác nhau. Từ giá sách này,

a) có bao nhiêu cách lấy một cuốn sách?

b) có bao nhiêu cách lấy ba cuốn sách, mỗi môn một cuốn?

c) có bao nhiêu cách lấy hai cuốn sách từ hai môn khác nhau?

Giải

a) Công việc lấy ra một cuốn sách có ba phương án thực hiện:

Phương án 1: Lấy một quyển sách Ngữ Văn, có 6 cách thực hiện.

Phương án 2: Lấy một quyển sách Toán, có 7 cách thực hiện.

Phương án 3: Lấy một quyển sách Tiếng Anh, có 8 cách thực hiện.

Theo quy tắc cộng, có $6 + 7 + 8 = 21$ cách chọn một cuốn sách từ giá sách.

b) Để chọn ba cuốn sách, mỗi môn một cuốn, ta thực hiện thành ba công đoạn.

Công đoạn 1: Chọn một cuốn sách Ngữ Văn, có 6 cách thực hiện.

Công đoạn 2: Chọn một cuốn sách Toán, có 7 cách thực hiện.

Công đoạn 3: Chọn một cuốn sách Tiếng Anh, có 8 cách thực hiện.

Từ đó, theo quy tắc nhân, có $6 . 7 . 8 = 336$ cách chọn ba cuốn sách, mỗi môn một cuốn.

c) Để chọn hai cuốn sách từ hai môn khác nhau, ta có ba phương án thực hiện.

Phương án 1: Chọn một cuốn sách Ngữ Văn và một cuốn sách Toán, ta có $6 . 7 = 42$ cách thực hiện phương án này.

Phương án 2: Chọn một cuốn sách Ngữ Văn và một cuốn sách Tiếng Anh, có $6 . 8 = 48$ cách thực hiện phương án này.

Phương án 3: Chọn một cuốn sách Toán và một cuốn sách Tiếng Anh, có $7 . 8 = 56$ cách thực hiện phương án này.

Mỗi cách thực hiện của phương án này đều không trùng với cách thực hiện nào của phương án khác, nên theo quy tắc cộng, số cách chọn hai cuốn sách từ hai môn khác nhau là $42 + 48 + 56 = 146$ (cách).

Bài 2. Tung một con xúc xắc ba lần liên tiếp và ghi lại kết quả (chẳng hạn, 2 – 5 – 4 nếu số chấm xuất hiện lần lượt là 2, 5 và 4). Có tất cả bao nhiêu kết quả khác nhau có thể xảy ra?

Hình 1

Giải

Có thể coi việc tung con xúc xắc ba lần liên tiếp là công việc gồm ba công đoạn, mỗi công đoạn là một lần tung. Mỗi lần tung đều có 6 khả năng khác nhau xảy ra (số chấm xuất hiện là 1; 2; …; 6). Do đó, theo quy tắc nhân, ta có $6 . 6 . 6 = 216$ kết quả khác nhau có thể xảy ra.

Bài 3. Dùng sáu chữ số 0; 1; 2; 3; 4; 5 có thể lập được bao nhiêu

a) mật khẩu có bốn chữ số khác nhau?

b) số tự nhiên có bốn chữ số khác nhau?

c) số tự nhiên lẻ có bốn chữ số khác nhau?

Giải

a) Kí hiệu mật khẩu cần lập là $abcd$, trong đó a, b, c, d là các chữ số khác nhau từ sáu chữ số đã cho. Coi việc chọn mật khẩu là một công việc gồm bốn công đoạn.

Công đoạn 1: Chọn chữ số a từ sáu chữ số đã cho, có 6 cách chọn.

Công đoạn 2: Chọn chữ số b từ năm chữ số còn lại, có 5 cách chọn.

Công đoạn 3: Chọn chữ số c từ bốn chữ số còn lại, có 4 cách chọn.

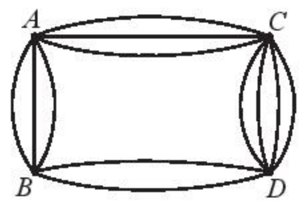
Công đoạn 4: Chọn chữ số d từ ba chữ số còn lại, có 3 cách chọn.

Từ đó, theo quy tắc nhân, có thể lập được $6 . 5 . 4 . 3 = 360$ mật khẩu theo yêu cầu.

b) Kí hiệu số tự nhiên cần lập là $\overline{abcd}$, trong đó a, b, c, d là các chữ số khác nhau từ sáu chữ số đã cho, $a \neq 0$. Đầu tiên, có 5 cách chọn chữ số a. Tiếp theo, có 5 cách chọn chữ số b từ các chữ số còn lại. Tiếp tục, có 4 cách chọn chữ số c và 3 cách chọn chữ số d. Từ đó, theo quy tắc nhân, có $5 . 5 . 4 . 3 = 300$ số tự nhiên có bốn chữ số khác nhau lập từ các chữ số đã cho.

c) Kí hiệu số tự nhiên lẻ có bốn chữ số khác nhau như câu b. Đầu tiên, có 3 cách chọn chữ số d từ ba chữ số lẻ 1; 3; 5. Tiếp theo, có 4 cách chọn chữ số a từ 4 chữ số khác 0 còn lại. Tiếp theo, có 4 cách chọn chữ số c từ 4 số còn lại. Cuối cùng, có 3 cách chọn chữ số b từ các chữ số còn lại. Từ đó, theo quy tắc nhân, có $3 . 4 . 4 . 3 = 144$ số tự nhiên lẻ có bốn chữ số khác nhau lập từ các chữ số đã cho.

Bài 4. Trong một công viên, có các con đường nối bốn địa điểm A, B, C, và D như Hình 2. Có bao nhiêu cách chọn một đường đi từ A đến D? Chỉ tính các đường đi qua mỗi địa điểm nhiều nhất một lần.



Hình 2

Giải

Có hai phương án để đi từ A đến D.

Phương án 1: Đi từ A qua B rồi đến D. Có 3 cách chọn đường đi từ A đến B, có 2 cách chọn đường đi từ B đến D. Theo quy tắc nhân, có $3 \,.\, 2 = 6$ cách chọn đường đi từ A qua B rồi đến D.

Phương án 2: Đi từ A qua C rồi đến D. Có 3 cách chọn đường đi từ A đến C, có 4 cách chọn đường đi từ C đến D. Theo quy tắc nhân, có $3 \,.\, 4 = 12$ cách chọn đường đi từ A qua C rồi đến D.

Áp dụng quy tắc cộng, có $6 + 12 = 18$ cách chọn đường đi từ A đến D.

C. BÀI TẬP

1. Trong một cái hộp có chứa 8 quả bóng màu trắng đánh số từ 1 đến 8; 10 quả bóng màu xanh đánh số từ 1 đến 10; 12 quả bóng màu cam đánh số từ 1 đến 12. Từ hộp này, có bao nhiêu cách

a) chọn ra một quả bóng?

b) chọn ra ba quả bóng có màu khác nhau đôi một?

c) chọn ra hai quả bóng có màu khác nhau?

2. Có ba cái hộp, hộp thứ nhất chứa 2 quả cầu dán nhãn A, B; Hộp thứ hai chứa 3 quả cầu dán nhãn a, b, c; Hộp thứ ba có 2 quả cầu dán nhãn 1, 2. Từ mỗi hộp lấy ra ngẫu nhiên một quả cầu.

a) Hãy vẽ sơ đồ hình cây để thể hiện tất cả các kết quả có thể xảy ra.

b) Có bao nhiêu kết quả có thể xảy ra?

3. Ba lớp của một trường đang lên kế hoạch để đi dã ngoại, mỗi lớp có thể chọn một trong năm địa điểm. Có bao nhiêu kết quả có thể xảy ra về cách chọn địa điểm của ba lớp?

4. Mã xác thực (OTP – One Time Password) do một ngân hàng gửi vào điện thoại của khách hàng cho mỗi lần giao dịch là một dãy 6 kí tự từ các chữ số từ 0 đến 9. Có thể tạo ra bao nhiêu mã xác thực khác nhau như vậy?

Hình 3

5. Tung một đồng xu 5 lần liên tiếp và ghi lại kết quả (ví dụ dùng kí hiệu SSNSN để chỉ kết quả 5 lần tung lần lượt là sấp, sấp, ngửa, sấp, ngửa). Có bao nhiêu kết quả khác nhau có thể xảy ra?

6. Mã số nhân viên của một công ty có 4 kí tự, gồm một chữ cái đầu tiên (từ 6 chữ cái A, B, C, D, E, F) và tiếp theo là 3 chữ số (từ các chữ số 0; 1; …; 9). Công ty có thể tạo ra bao nhiêu mã số nhân viên theo cách này?

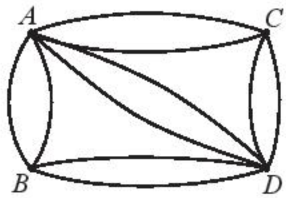
Hình 4

7. Có các con đường nối bốn ngôi làng A, B, C, D như trong Hình 5. Có bao nhiêu cách chọn đường đi khác nhau

a) từ A qua B rồi đến D?

b) từ A đến D?

Lưu ý: Mỗi đường đi qua mỗi ngôi làng nhiều nhất một lần.



Hình 5

8. Tung đồng thời hai con xúc xắc khác nhau và ghi lại số chấm xuất hiện trên mỗi con xúc xắc. Có bao nhiêu kết quả có thể xảy ra mà tổng số chấm xuất hiện trên hai mặt là bội của 5?

Hình 6

9. Sử dụng 5 chữ số 0; 1; 2; 3; 4 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên

a) có ba chữ số khác nhau?

b) có 3 chữ số khác nhau và bé hơn 300?

c) có các chữ số khác nhau và bé hơn 100?

10. Một khoá tổ hợp với đĩa quay có 40 vạch số (xem Hình 7). Mật mã của khoá là một dãy gồm 3 số, kí hiệu là $a - b - c$, mỗi số là một số tự nhiên từ 0 đến 39. Để mở khoá, cần quay mặt số ngược chiều kim đồng hồ cho đến khi điểm mốc gặp vạch số a lần thứ ba, rồi quay mặt số theo chiều ngược lại cho đến khi điểm mốc gặp vạch số b lần thứ hai, cuối cùng quay mặt số ngược chiều kim đồng hồ cho đến khi điểm mốc gặp vạch số c lần đầu tiên. Nếu a, b, c phải khác nhau đôi một, thì có bao nhiêu cách chọn mật mã cho khoá tổ hợp trên?

Hình 7

Bài 2. HOÁN VỊ, CHỈNH HỢP VÀ TỔ HỢP

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Hoán vị

Khi sắp xếp n phần tử của một tập hợp theo một thứ tự, ta được một ***hoán vị*** của n phần tử đó.

Số các hoán vị của n phần tử ($n \geq 1$) bằng $P_n = n(n-1)(n-2) \ldots 2.1$.

2. Chỉnh hợp

Cho tập hợp A có n phần tử ($n \geq 1$) và số nguyên k với $1 \leq k \leq n$.

Mỗi cách lấy k phần tử của A và sắp xếp chúng theo một thứ tự gọi là một ***chỉnh hợp*** chập k của n phần tử đó.

Số các chỉnh hợp chập k của n phần tử ($1 \leq k \leq n$) bằng

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

3. Tổ hợp

Mỗi tập con gồm k phần tử ($1 \leq k \leq n$) của một tập hợp gồm n phần tử được gọi là một ***tổ hợp*** chập k của n phần tử đó.

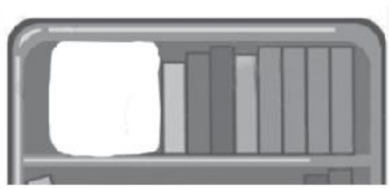
Số các tổ hợp chập k của n phần tử ($1 \leq k \leq n$) bằng $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

B. BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Có 5 cuốn sách Toán học khác nhau và 3 cuốn sách Sinh học khác nhau.

a) Có bao nhiêu cách xếp các cuốn sách này thành một dãy trên giá sách?

b) Nếu yêu cầu thêm các cuốn sách cùng môn phải được xếp cạnh nhau thì có bao nhiêu cách xếp?



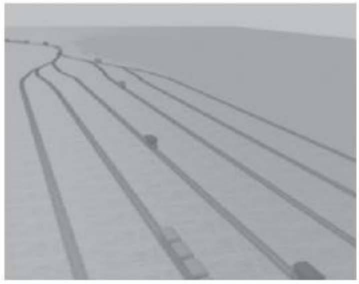
Hình 1

Giải

a) Mỗi cách sắp xếp 8 cuốn sách thành một dãy trên giá là một hoán vị của 8 cuốn sách này. Do đó, có $8! = 40\,320$ cách sắp xếp.

b) Có 5! cách sắp xếp 5 cuốn sách Toán học cạnh nhau để thành một dãy. Có 3! cách sắp xếp 3 cuốn sách Sinh học cạnh nhau để thành một dãy. Có 2! cách sắp xếp 2 dãy trên cạnh nhau để thành một dãy mới. Từ đó, áp dụng quy tắc nhân, số cách sắp xếp các cuốn sách trên thành một dãy sao cho các sách cùng môn được xếp cạnh nhau là 5!3!2! = 1 440 (cách xếp).

Bài 2. Một ga tàu hoả có 6 đường nhánh, mỗi nhánh chỉ đỗ được một đoàn tàu. Hiện các đường nhánh đều đang trống và có 3 đoàn tàu sắp vào ga. Có bao nhiêu cách bố trí nhánh đỗ cho 3 đoàn tàu?



Hình 2

Giải

Mỗi cách chọn 3 đường nhánh và bố trí nhánh đỗ cho 3 đoàn tàu là một chỉnh hợp chập 3 của 6 đường nhánh. Do đó, số cách bố trí là $A_6^3 = 6 \,.\, 5 \,.\, 4 = 120$ (cách).

Bài 3. Một bệnh viện có 12 bác sĩ nội khoa và 10 bác sĩ ngoại khoa. Bệnh viện cần cử 5 bác sĩ tham gia vào đội y tế cứu trợ thiên tai.

a) Cần cử 3 bác sĩ nội khoa và 2 bác sĩ ngoại khoa. Có bao nhiêu lựa chọn?

b) Cần cử ít nhất 2 bác sĩ nội khoa và ít nhất 2 bác sĩ ngoại khoa. Có bao nhiêu lựa chọn?

Giải

a) Mỗi cách chọn 3 trong 12 bác sĩ nội khoa là một tổ hợp chập 3 của 12 bác sĩ này. Do đó, có C_{12}^3 cách chọn 3 trong 12 bác sĩ nội khoa. Có C_{10}^2 cách chọn 2 trong 10 bác sĩ ngoại khoa. Áp dụng quy tắc nhân, số cách cử 5 bác sĩ trong đó có 3 bác sĩ nội khoa và 2 bác sĩ ngoại khoa là: $C_{12}^3 C_{10}^2 = 220 \,.\, 45 = 9\,900$ (cách).

b) Có hai phương án thực hiện.

Phương án 1: Chọn 2 bác sĩ nội khoa và 3 bác sĩ ngoại khoa, có $C_{12}^2 C_{10}^3$ cách chọn.

Phương án 2: Chọn 3 bác sĩ nội khoa và 2 bác sĩ ngoại khoa, có $C_{12}^3 C_{10}^2$ cách chọn.

Áp dụng quy tắc cộng, số cách cử 5 bác sĩ trong đó có ít nhất 2 bác sĩ nội khoa và ít nhất 2 bác sĩ ngoại khoa là: $C_{12}^2 C_{10}^3 + C_{12}^3 C_{10}^2 = 66 \,.\, 120 + 220 \,.\, 45 = 17820$ (cách).

Bài 4. Trong một lô 100 sản phẩm, có 97 chính phẩm (sản phẩm đạt tiêu chuẩn) và 3 thứ phẩm (sản phẩm không đạt tiêu chuẩn). Từ 100 sản phẩm này, có bao nhiêu cách lấy ra 3 sản phẩm mà

a) 3 sản phẩm được lấy bất kì?

b) trong đó có 2 chính phẩm và 1 thứ phẩm?

c) trong đó có ít nhất một thứ phẩm?

Giải

a) Mỗi cách lấy 3 sản phẩm từ 100 sản phẩm là một tổ hợp chập 3 của 100 sản phẩm. Do đó, số cách lấy 3 sản phẩm bất kì là $C_{100}^{3} = 161\,700$ (cách).

b) Có C_{97}^{2} cách lấy 2 chính phẩm từ 97 chính phẩm. Có C_{3}^{1} cách lấy 1 thứ phẩm từ 3 thứ phẩm. Từ đó, áp dụng quy tắc nhân, số cách lấy 2 chính phẩm và 1 thứ phẩm là $C_{97}^{2}C_{3}^{1} = 4656 \,.\, 3 = 13968$ (cách).

c) Trong 3 sản phẩm lấy ra có ít nhất 1 thứ phẩm trong 3 trường hợp sau đây.

Trường hợp 1: Có đúng 1 thứ phẩm.

Trường hợp này có $C_{97}^{2}C_{3}^{1} = 4656 \,.\, 3 = 13968$ cách lấy, như đã tính ở trên.

Trường hợp 2: Có đúng 2 thứ phẩm.

Trường hợp này có $C_{97}^{1}C_{3}^{2} = 97 \,.\, 3 = 291$ cách lấy.

Trường hợp 3: Có đúng 3 thứ phẩm.

Trường hợp này có $C_{3}^{3} = 1$ cách lấy.

Áp dụng quy tắc cộng, số cách lấy 3 sản phẩm có ít nhất 1 thứ phẩm là

$$13\,968 + 291 + 1 = 14260 \text{ (cách)}.$$

Cách khác: Có thể giải bài toán bằng cách tìm phần bù. Số cách lấy 3 sản phẩm đều là chính phẩm là C_{97}^{3}. Từ đó, số cách lấy 3 sản phẩm trong đó có ít nhất một thứ phẩm là $C_{100}^{3} - C_{97}^{3} = 161\,700 - 147\,440 = 14\,260$ (cách).

Bài 5. Từ các chữ số 1; 2; 3; 4; 5; 6 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên:

a) Có bốn chữ số khác nhau?

b) Có bốn chữ số khác nhau và chia hết cho 5?

c) Có bốn chữ số khác nhau và lớn hơn 4 500?

Giải

a) Để lập số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau từ 6 chữ số đã cho, ta chọn 4 trong 6 chữ số đó và sắp xếp theo một thứ tự. Do đó, có thể coi mỗi số đó là một chỉnh hợp chập 4 của 6 chữ số đó. Do đó, có $A_{6}^{4} = 6 \,.\, 5 \,.\, 4 \,.\, 3 = 360$ số như vậy.

b) Để số lập được chia hết cho 5, chữ số tận cùng của nó phải chia hết cho 5. Vậy chữ số tận cùng là 5. Có A_5^3 cách chọn 3 trong 5 chữ số còn lại để viết các chữ số còn lại. Một số chia hết cho 5 thì $A_5^3 = 5\,.\,4\,.\,3 = 60$.

c) Kí hiệu $\overline{abcd}$ là số tự nhiên có bốn chữ số thoả mãn yêu cầu.

Vì $m > 4500$ nên $a \geq 4$

Trường hợp 1: $a = 4$. Khi đó, để $m > 4500$ điều kiện cần và đủ là $b \geq 5$. Có hai cách chọn chữ số b (5 hoặc 6). Có A_4^2 cách chọn hai chữ số còn lại.

Do đó, trường hợp này có $2A_4^2 = 2\,.\,4\,.\,3 = 24$ số thoả mãn yêu cầu.

Trường hợp 2: $a \geq 5$. Khi đó, đương nhiên $m > 4500$. Có hai cách chọn chữ số a (5 hoặc 6). Có A_5^3 cách chọn ba chữ số còn lại.

Do đó, trường hợp này có $2A_5^3 = 2\,.\,5\,.\,4\,.\,3 = 120$ số thoả mãn yêu cầu.

Áp dụng quy tắc cộng, có $24 + 120 = 144$ số tự nhiên thoả mãn yêu cầu.

C. BÀI TẬP

1. Sau khi biên soạn 9 câu hỏi trắc nghiệm, cô giáo có thể tạo ra bao nhiêu đề kiểm tra khác nhau bằng cách đảo thứ tự các câu hỏi đó.

2. Cô giáo đã biên soạn 10 câu hỏi trắc nghiệm. Từ 10 câu hỏi này, cô giáo chọn ra 6 câu hỏi và sắp xếp theo thứ tự để tạo nên một đề trắc nghiệm. Cô giáo có thể tạo bao nhiêu đề kiểm tra trắc nghiệm khác nhau?

3. Một giải đấu có 4 đội bóng A, B, C và D tham gia. Các đội đấu vòng tròn một lượt để tính điểm và xếp hạng.

a) Có tất cả bao nhiêu trận đấu?

b) Có tất cả bao nhiêu khả năng có thể xảy ra về đội vô địch và á quân?

c) Có bao nhiêu khả năng về bảng xếp hạng sau khi giải đấu kết thúc? Biết rằng không có hai đội nào đồng hạng.

4. Cho 7 điểm trong mặt phẳng.

a) Có bao nhiêu đoạn thẳng có hai điểm đầu mút là 2 trong 7 điểm đã cho?

b) Có bao nhiêu vectơ có điểm đầu và điểm cuối là 2 trong 7 điểm đã cho?

5. Chọn 4 trong 6 giống hoa khác nhau và trồng trên 4 mảnh đất khác nhau để thử nghiệm. Có bao nhiêu cách thực hiện khác nhau?

6. Một tổ công nhân 9 người làm vệ sinh cho một toà nhà lớn. Cần phân công 3 người lau cửa sổ, 4 người lau sàn và 2 người lau cầu thang. Tổ có bao nhiêu cách phân công?

7. Chọn 4 trong số 3 học sinh nam và 5 học sinh nữ tham gia một cuộc thi.

a) Nếu chọn 2 nam và 2 nữ thì có bao nhiêu cách chọn?

b) Nếu trong số học sinh được chọn nhất thiết phải có học sinh nam A và học sinh nữ B thì có bao nhiêu cách chọn?

c) Nếu phải có ít nhất một trong hai học sinh *A* và *B* được chọn, thì có bao nhiêu cách chọn?

d) Nếu trong 4 học sinh được chọn phải có cả học sinh nam và học sinh nữ thì có bao nhiêu cách chọn?

8. Lấy hai số bất kì từ 1; 3; 5; 7; 9 và lấy hai số bất kì từ 2; 4; 6; 8, để lập các số tự nhiên có bốn chữ số khác nhau.

a) Lập được bao nhiêu số như vậy?

b) Trong số đó, có bao nhiêu số có chữ số hàng nghìn và hàng đơn vị là chữ số lẻ?

9. Cần sắp xếp thứ tự 8 tiết mục văn nghệ cho buổi biểu diễn văn nghệ của trường. Ban tổ chức dự kiến xếp 4 tiết mục ca nhạc ở vị trí thứ 1, thứ 2, thứ 5 và thứ 8; 2 tiết mục múa ở vị trí thứ 3 và thứ 6; 2 tiết mục hài ở vị trí thứ 4 và thứ 7. Có bao nhiêu cách xếp khác nhau?

Bài 3. NHỊ THỨC NEWTON

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Với $n = 4$: $(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.

Với $n = 5$: $(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$.

Chú ý: Các hệ số trong khai triển nhị thức Newton với $n = 0; 1; 2; 3; \ldots$ tạo thành tam giác Pascal.

$n = 0$						1					
$n = 1$					1		1				
$n = 2$				1		2		1			
$n = 3$			1		3		3		1		
$n = 4$		1		4		6		4		1	
$n = 5$	1		5		10		10		5		1
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

B. BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Sử dụng công thức nhị thức Newton, hãy khai triển:

a) $\left(2x-\frac{1}{x}\right)^4$; b) $\left(x+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^5$.

Giải

a) $\left(2x-\frac{1}{x}\right)^4=(2x)^4+4(2x)^3\left(-\frac{1}{x}\right)+6(2x)^2\left(-\frac{1}{x}\right)^2+4(2x)\left(-\frac{1}{x}\right)^3+\left(-\frac{1}{x}\right)^4$;

$=16x^4-32x^2+24-\frac{8}{x^2}+\frac{1}{x^4}$.

b) $\left(x+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^5=x^5+5x^4\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)+10x^3\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2+10x^2\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^3+5x\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^4+\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^5$;

$=x^5+5x^3\sqrt{x}+10x^2+10\sqrt{x}+\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2\sqrt{x}}$.

Bài 2. Tìm hệ số của x^4 trong khai triển biểu thức $(2x+1)(x-1)^5$.

Giải

Áp dụng công thức nhị thức Newton, ta có

$$(x-1)^5=x^5-5x^4+10x^3-10x^2+5x-1 \quad (*).$$

Khi nhân biểu thức $2x+1$ với biểu thức bên phải của (*), ta được hệ số của x^4 bằng $2 . 10+1 . (-5)=15$.

Vậy hệ số của x^4 trong khai triển biểu thức $(2x+1)(x-1)^5$ bằng 15.

Nhận xét: Nếu tìm tất cả các số hạng của khai triển, ta được

$$\begin{aligned}(2x+1)(x-1)^5&=(2x+1)(x^5-5x^4+10x^3-10x^2+5x-1)\\&=2x^6-9x^5+15x^4-10x^3+3x-1.\end{aligned}$$

Từ đó, cũng tìm được hệ số của x^4 bằng 15.

Bài 3. Khai triển biểu thức $(a+bx)^4$, viết các số hạng theo thứ tự bậc của x tăng dần, nhận được biểu thức gồm hai số hạng đầu tiên là $16-96x$. Hãy tìm giá trị của a và b.

Giải

Áp dụng công thức nhị thức Newton, ta có:

$$\begin{aligned}(a+bx)^4&=a^4+4a^3bx+6a^2(bx)^2+4a(bx)^3+(bx)^4\\&=a^4+4a^3bx+6a^2b^2x^2+4ab^3x^3+b^4x^4.\end{aligned}$$

Theo giả thiết, ta có: $\begin{cases} a^4 = 16 \\ 4a^3b = -96 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -3 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a = -2 \\ b = 3. \end{cases}$

Vậy $a = 2$, $b = -3$ hoặc $a = -2$, $b = 3$.

Bài 4. Khai triển và rút gọn biểu thức $(1 + x)^5 + (1 - x)^5$.

Sử dụng kết quả đó, tính gần đúng $A = 1,05^5 + 0,95^5$.

Giải

$$(1 + x)^5 = 1 + 5x + 10x^2 + 10x^3 + 5x^4 + x^5 \quad (1).$$

$$(1 - x)^5 = 1 - 5x + 10x^2 - 10x^3 + 5x^4 - x^5 \quad (2).$$

Từ (1) và (2) ta có: $(1 + x)^5 + (1 - x)^5 = 2 + 20x^2 + 10x^4$.

Áp dụng công thức trên ta có:

$A = 1,05^5 + 0,95^5 = (1 + 0,05)^5 + (1 - 0,05)^5 = 2 + 20 \,.\, (0,05)^2 + 10 \,.\, (0,05)^4$

$\approx 2 + 20 \,.\, 0,0025$ (do $(0,05)^4$ rất bé)

$= 2 + 0,05 = 2,05$.

Vậy $A \approx 2,05$.

C. BÀI TẬP

1. Khai triển các biểu thức sau:

a) $(x + 3y)^4$; b) $(3 - 2x)^5$; c) $\left(x - \dfrac{2}{x}\right)^5$; d) $\left(3\sqrt{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^4$.

2. Khai triển và rút gọn biểu thức $(x - 2)(2x + 1)^4$.

3. Tìm giá trị tham số a để trong khai triển $(a + x)(1 + x)^4$ có một số hạng là $22x^2$.

4. Biết rằng trong khai triển $(ax - 1)^5$, hệ số của x^4 gấp bốn lần hệ số của x^2. Hãy tìm giá trị của tham số a.

5. Biết rằng trong khai triển của $\left(ax + \dfrac{1}{x}\right)^4$, số hạng không chứa x là 24. Hãy tìm giá trị của tham số a.

6. Cho biểu thức $A = (2 + x)^4 + (2 - x)^4$

a) Khai triển và rút gọn biểu thức A;

b) Sử dụng kết quả ở câu a, tính gần đúng $A = 2,05^4 + 1,95^4$.

7. Bạn An có 4 cái bánh khác nhau từng đôi một. An có bao nhiêu cách chọn ra một số cái bánh (tính cả trường hợp không chọn cái nào) để mang theo trong buổi dã ngoại?

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG VIII

A. TRẮC NGHIỆM

1. Một nhóm có 4 học sinh, mỗi học sinh chọn một trong ba lớp môn thể thao: bóng đá, bóng rổ và cầu lông. Có bao nhiêu kết quả khác nhau về sự chọn của các học sinh trong nhóm?

A. 3^4; B. 4^3; C. $3!$; D. $4!$.

2. $90 . 91 . ... . 100$ bằng:

A. A_{100}^{9}; B. A_{100}^{10}; C. A_{100}^{11}; D. A_{100}^{12}.

3. Một tập hợp có 10 phần tử. Tập hợp này có bao nhiêu tập hợp con có 3 phần tử?

A. $3!$; B. $10 . 9 . 8$; C. 10^3; D. $\frac{10!}{3!7!}$.

4. Một tập hợp có 5 phần tử. Tập hợp này có bao nhiêu tập hợp con có nhiều nhất 2 phần tử?

A. $1 + C_5^1 + C_5^2$; B. $C_5^0 C_5^1 C_5^2$; C. $C_5^1 C_5^2$; D. $1 + 2! + 3!$.

5. Trong khai triển $\left(\sqrt{x} - 2\right)^5$, hệ số của x^4 bằng:

A. -5; B. 5; C. -10; D. 10.

B. TỰ LUẬN

1. Một bài kiểm tra có 6 câu hỏi trắc nghiệm, mỗi câu có 4 phương án chọn. Nếu chọn một cách tuỳ ý một phương án cho mỗi câu hỏi thì có bao nhiêu cách hoàn thành bài kiểm tra?

2. Chợ Bến Thành có 4 cổng ra vào. Một người đi chợ ở chợ này thì,

a) có bao nhiêu cách vào và ra chợ?

b) có bao nhiêu cách vào và ra chợ bằng hai cổng khác nhau?

3. Chọn 3 cuốn từ 6 cuốn sách khác nhau và đưa cho 3 bạn cùng lớp, mỗi bạn 1 cuốn. Có bao nhiêu cách thực hiện việc này?

4. Từ một danh sách gồm 9 người, người ta bầu ra một uỷ ban gồm một chủ tịch, một phó chủ tịch và 3 uỷ viên. Có bao nhiêu khả năng có thể về kết quả bầu uỷ ban này?

5. Trên một trạm quan sát, có sẵn 4 lá cờ màu khác nhau (đỏ, xanh, vàng, cam). Mỗi khi muốn báo một tín hiệu, chiến sĩ thông tin lấy 2 hoặc 3 trong số 4 lá cờ đó và cắm thành một hàng trên nóc của trạm. Bao nhiêu tín hiệu khác nhau có thể được tạo ra?

6. Giả sử $(2x + 1)^4 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$. Hãy tính:

a) $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4$;

b) $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$.

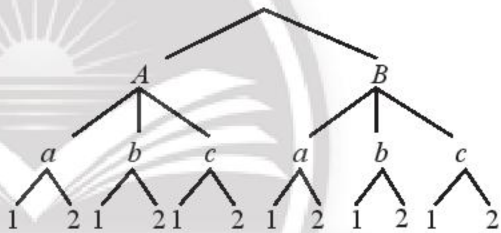
LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài 1. QUY TẮC CỘNG VÀ QUY TẮC NHÂN

1. a) $8 + 10 + 12 = 30$; b) $8 . 10 . 12 = 960$; c) $8 . 10 + 8 . 12 + 10 . 12 = 296$.

2. a) Sơ đồ hình cây như Hình 1.

b) $2 . 3 . 2 = 12$ cách.



Hình 1

3. Mỗi lớp có 5 cách chọn địa điểm. Theo quy tắc nhân, số cách chọn địa điểm của ba lớp là $5 . 5 . 5 = 125$.

4. Có 10 cách chọn chữ số cho mỗi kí tự của mã xác nhận. Do đó theo quy tắc nhân, số mã xác nhận có thể tạo ra là $10^6 = 1\,000\,000$.

5. Có thể coi việc tung đồng xu 5 lần liên tiếp là công việc gồm 5 công đoạn. Mỗi công đoạn có 2 phương án thực hiện, tương ứng đồng xu xuất hiện sấp hay ngửa. Do đó, theo quy tắc nhân, có $2 . 2 . 2 . 2 . 2 = 32$ kết quả có thể của việc tung đồng xu 5 lần liên tiếp.

6. Có 6 cách chọn chữ cái cho kí tự đầu tiên.

Với 3 kí tự tiếp theo, mỗi kí tự có 10 cách chọn từ 10 chữ số 0, 1, 2, …, 9.

Theo quy tắc nhân, công ty có thể tạo ra $6 . 10 . 10 . 10 = 6\,000$ mã số nhân viên.

7. a) $2 . 2 = 4$; b) $2 . 2 + 2 . 2 + 2 = 10$.

8. Ta viết (a, b) để kí hiệu kết quả số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc lần lượt là a và b. Ta có $2 \leq a + b \leq 12$ nên $a + b$ là bội của 5 khi $a + b = 5$ hoặc $a + b = 10$.

Trường hợp $a + b = 5$ gồm các kết quả: (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1). Trường hợp này có 4 kết quả.

Trường hợp $a + b = 10$ bao gồm các kết quả: (4, 6), (5, 5), (6, 4). Trường hợp này có 3 kết quả.

Vậy có $4 + 3 = 7$ kết quả có thể xảy ra mà tổng số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc là bội của 5.

9. a) Kí hiệu số có 3 chữ số khác nhau cần lập là $\overline{abc}$, trong đó a, b, c là các chữ số khác nhau từ các chữ số đã cho, $a \neq 0$. Đầu tiên, có 4 cách chọn chữ số a. Tiếp theo, có 4 cách chọn chữ số b, 3 cách chọn chữ số c. Từ đó, có $4 . 4 . 3 = 48$ số tự nhiên thoả mãn yêu cầu.

b) Kí hiệu số m như trên. Để $m < 300$, điều kiện cần và đủ là $a < 3$. Khi đó, có 2 cách chọn chữ số a từ hai chữ số 1 và 2. Tiếp theo, có 4 cách chọn chữ số b, 3 cách chọn chữ số c. Từ đó, có $2 . 4 . 3 = 24$ số tự nhiên thoả mãn yêu cầu.

c) Kí hiệu n là số tự nhiên lập được từ các chữ số đã cho, $n < 100$. Có 2 trường hợp như sau.

Trường hợp 1: n có một chữ số. Có 5 số như vậy từ 5 chữ số đã cho.

Trường hợp 2: n có hai chữ số, dạng $\overline{ab}$. Có 4 cách chọn chữ số a, 4 cách chọn chữ số b. Từ đó, có $4 . 4 = 16$ số n như vậy.

Áp dụng quy tắc cộng, có $5 + 16 = 21$ số tự nhiên thoả mãn yêu cầu.

10. Có 40 cách chọn số a từ các số từ 0 đến 39. Tiếp theo, có 39 cách chọn số b từ 39 số còn lại. Cuối cùng, có 38 cách chọn số c từ 38 số còn lại. Áp dụng quy tắc nhân, ta có $40 . 39 . 38 = 59\,280$ cách chọn mật mã cho khoá.

Bài 2. HOÁN VỊ, TỔ HỢP VÀ CHỈNH HỢP

1. Mỗi cách sắp xếp thứ tự để tạo một đề ta được một hoán vị của 9 câu hỏi. Do đó, số đề khác nhau có thể tạo ra là $9! = 362\,880$.

2. Mỗi đề được tạo ra là một chỉnh hợp chập 6 của 10 câu hỏi. Do đó, số đề có thể được tạo ra là $A_{10}^{6} = \dfrac{10!}{4!} = 151\,200$.

3. a) Cứ hai đội bất kì thì có một trận đấu. Do đó, số trận đấu của giải bằng số tổ hợp chập 2 của 4 đội, tức bằng $C_4^2 = \frac{4!}{2!2!} = 6$.

b) Mỗi kết quả của giải đấu về đội vô địch và á quân là một chỉnh hợp chập 2 của 4 đội. Do đó, số kết quả này bằng $A_4^2 = 4.3 = 12$.

c) Mỗi kết quả về bảng xếp hạng của giải đấu là một hoán vị của 4 đội. Do đó, số kết quả có thể xảy ra là $P_4 = 4! = 24$.

4. a) Mỗi đoạn thẳng tương ứng với một tổ chợp chập 2 của 7 điểm.

Số đoạn thẳng bằng $C_7^2 = 21$.

b) Mỗi vectơ tương ứng với một chỉnh hợp chập 2 của 7 điểm.

Số vectơ bằng $A_7^2 = 42$.

5. Mỗi cách chọn 4 trong 6 giống hoa khác nhau và trồng trên 4 mảnh đất khác nhau là một chỉnh hợp chập 4 của 6 giống hoa. Do đó, số cách thực hiện là $A_6^4 = \frac{6!}{4!} = 360$.

6. Có C_9^3 cách chọn 3 trong 9 người để lau cửa sổ. Tiếp theo, có C_6^4 cách chọn 4 trong 6 người còn lại để lau sàn. Cuối cùng, có C_2^2 cách chọn 2 người trong 2 người còn lại để lau cầu thang.

Áp dụng quy tắc nhân, ta có $C_9^3 C_6^4 C_2^2 = 84.15.1 = 1\,260$ cách phân công.

7. a) Chọn 2 trong 3 học sinh nam, rồi chọn 2 trong 5 học sinh nữ.

Ta có: $C_3^2 C_5^2 = 3.10 = 30$.

b) Sau khi đã có A và B, chọn 2 trong 6 học sinh còn lại. Ta có $C_6^2 = 15$.

c) Chia thành 3 phương án: có cả A và B; chỉ có A; chỉ có B.

Nên ta có: $C_6^2 + C_6^3 + C_6^3 = 15 + 20 + 20 = 55$.

d) Chia thành 3 phương án: có 1 học sinh nam; có 2 học sinh nam; có 3 học sinh nam.

Nên ta có: $C_3^1 C_5^3 + C_3^2 C_5^2 + C_3^3 C_5^1 = 3.10 + 3.10 + 1.5 = 65$.

8. a) Chia thành 3 công đoạn. *Công đoạn 1:* Chọn 2 trong 5 chữ số lẻ. *Công đoạn 2:* Chọn 2 trong 4 chữ số chẵn. *Công đoạn 3:* Sắp xếp 4 chữ số chọn được. Nên ta có: $C_5^2 C_4^2 P_4 = 10.6.24 = 1440$.

b) Chia thành 2 công đoạn.

Công đoạn 1: Chọn 2 trong 5 chữ số lẻ và sắp xếp vào 2 vị trí hàng nghìn và hàng đơn vị.

Công đoạn 2: Chọn 2 trong 4 chữ số chẵn và sắp xếp vào 2 vị trí hàng trăm và hàng chục.

Nên ta có: $A_5^2 A_4^2 = 20.12 = 240.$

9. Chia thành 3 công đoạn. *Công đoạn 1:* Sắp xếp 4 tiết mục ca nhạc vào 4 vị trí (1, 2, 5 và 8). *Công đoạn 2:* Sắp xếp 2 tiết mục múa vào 2 vị trí (3 và 6). *Công đoạn 3:* Sắp xếp 2 tiết mục hài vào 2 vị trí (4 và 7).

Đáp số: $4!2!2! = 96$.

Bài 3. NHỊ THỨC NEWTON

1. a) $x^4 + 12x^3y + 54x^2y^2 + 108xy^3 + 81y^4$;

b) $-32x^5 + 240x^4 - 720x^3 + 1080x^2 - 810x + 243$;

c) $x^5 - 10x^3 + 40x - \dfrac{80}{x} + \dfrac{80}{x^3} - \dfrac{32}{x^5}$;

d) $81x^2 - 108x + 54 - \dfrac{12}{x} + \dfrac{1}{x^2}$.

2. Đầu tiên khai triển $(2x + 1)^4$ rồi tính tích của $x - 2$ với biểu thức khai triển đó.

Nên ta có: $(x - 2)(2x + 1)^4 = 16x^5 - 40x^3 - 40x^2 - 15x - 2$.

3. Khai triển $(1 + x)^4$, rồi nhân với $a + x$ ta được:

$$(a + x)(1 + x)^4 = x^5 + (a + 4)x^4 + (4a + 6)x^3 + (6a + 4)x^2 + (4a + 1)x + a.$$

Từ đó, để trong khai triển trên có số hạng $22x^2$, phải có $6a + 4 = 22$ hay $a = 3$.

4. Áp dụng công thức nhị thức Newton, ta có:

$$\begin{aligned}(ax - 1)^5 &= (ax)^5 + 5(ax)^4(-1) + 10(ax)^3(-1)^2 + 10(ax)^2(-1)^3 + 5(ax)(-1)^4 + (-1)^5\\ &= a^5x^5 - 5a^4x^4 + 10a^3x^3 - 10a^2x^2 + 5ax - 1.\end{aligned}$$

Theo giả thiết, ta có: $\dfrac{-5a^4}{-10a^2} = 4$ hay $a^2 = 8$ suy ra $a = 2\sqrt{2}$ hoặc $a = -2\sqrt{2}$.

5. $\left(ax + \dfrac{1}{x}\right)^4 = a^4x^4 + 4a^3x^2 + 6a^2 + \dfrac{4a}{x^2} + \dfrac{1}{x^4}$.

Theo giả thiết, ta có: $6a^2 = 24$ hay $a^2 = 4$ suy ra $a = 2$ hoặc $a = -2$.

6. Đầu tiên, khai triển và rút gọn để nhận được:

$$(2 + x)^4 + (2 - x)^4 = 2x^4 + 48x^2 + 32.$$

Từ đó, $A = (2 + 0,05)^4 + (2 - 0,05)^4 = 2 \,.\, 0,05^4 + 48 \,.\, 0,05^2 + 32$

$\approx 48 \,.\, 0,05^2 + 32 = 32,12.$

7. Số cách chọn của An bằng số tập hợp con của tập hợp A gồm 4 cái bánh của An, tức bằng $C_4^0 + C_4^1 + C_4^2 + C_4^3 + C_4^4 = (1 + 1)^4 = 2^4 = 16.$

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG VIII

A. TRẮC NGHIỆM

1. A	**2.** C	**3.** D	**4.** A	**5.** C

B. TỰ LUẬN

1. $4^6 = 4\,096.$

2. a) Có 4 cách chọn cổng để vào chợ. Ứng với mỗi cách đó, có 4 cách chọn cổng để đi ra. Do đó, có $4 \,.\, 4 = 16$ cách vào và ra chợ.

b) Có 4 cách chọn cổng để vào chợ. Ứng với mỗi cách đó, có 3 cách chọn cổng để đi ra khác với cổng đã đi vào. Do đó, có $4 \,.\, 3 = 12$ cách vào và ra chợ theo hai cổng khác nhau.

3. $A_6^3 = 120.$

4. $9 \,.\, 8 \,.\, C_7^3 = 9 \,.\, 8 \,.\, 35 = 2520.$

5. Xét hai trường hợp: cắm 2 lá cờ và cắm 3 lá cờ.

Nên ta có: $A_4^2 + A_4^3 = 12 + 24 = 36.$

6. a) Thay $x = 1$ vào hai vế của công thức khai triển đã cho, ta nhận được $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = (2 \,.\, 1 + 1)^4 = 3^4 = 81.$

b) Thay $x = 0$ vào hai vế của công thức khai triển đã cho, ta nhận được $a_0 = 1.$

Từ đó, $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 - a_0 = 81 - 1 = 80.$

Phần HÌNH HỌC VÀ ĐO LƯỜNG

Chương IX. PHƯƠNG PHÁP TOẠ ĐỘ TRONG MẶT PHẲNG

Bài 1. TOẠ ĐỘ CỦA VECTƠ

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Toạ độ của vectơ đối với một hệ trục toạ độ

Trục toạ độ

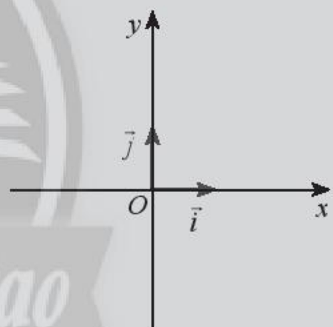
Trục toạ độ (gọi tắt là ***trục***) là một đường thẳng trên đó đã xác định một điểm O (gọi là điểm gốc) và một vectơ $\vec{e}$ có độ dài bằng 1 gọi là vectơ đơn vị của trục.

Hình 1

Ta kí hiệu trục đó là $(O; \vec{e})$.

Hệ trục toạ độ

Hệ trục toạ độ $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$ gồm hai trục $\left(O; \vec{i}\right)$ và $\left(O; \vec{j}\right)$ vuông góc với nhau. Điểm gốc O chung của hai trục gọi là ***gốc toạ độ***. Trục $\left(O; \vec{i}\right)$ được gọi là ***trục hoành*** và kí hiệu là Ox, trục $\left(O; \vec{j}\right)$ được gọi là ***trục tung*** và kí hiệu là Oy. Các vectơ $\vec{i}$ và $\vec{j}$ là các vectơ đơn vị trên Ox và Oy.

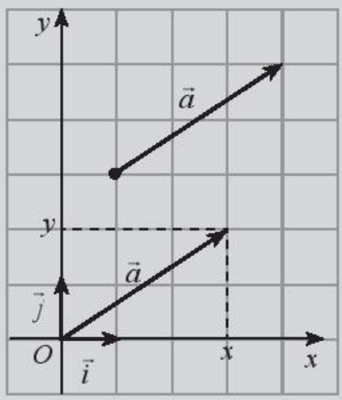


Hình 2

Hệ trục toạ độ $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$ còn được kí hiệu là Oxy.

Toạ độ của một vectơ

Trong mặt phẳng Oxy, cặp số $(x; y)$ trong biểu diễn $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$ được gọi là toạ độ của vectơ $\vec{a}$, kí hiệu $\vec{a} = (x; y)$, x gọi là ***hoành độ***, y gọi là ***tung độ*** của vectơ $\vec{a}$.



Hình 3

Chú ý: $\vec{a} = (x; y) \Leftrightarrow \vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

Nếu cho $\vec{a} = (x; y)$ và $\vec{b} = (x'; y')$ thì $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y'. \end{cases}$

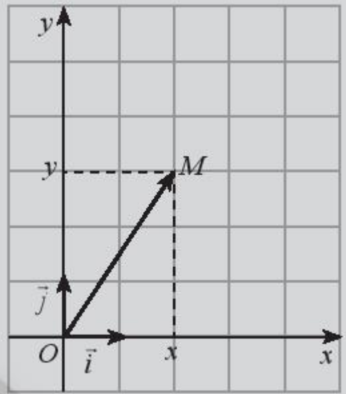
Toạ độ của một điểm

Trong mặt phẳng toạ độ, cho một điểm M tuỳ ý. Toạ độ của vectơ $\overrightarrow{OM}$ được gọi là ***toạ độ của điểm** M*.

Nhận xét:

Nếu $\overrightarrow{OM} = (x; y)$ thì cặp số $(x; y)$ là toạ độ của điểm M, kí hiệu $M(x; y)$, x gọi là ***hoành độ***, y gọi là ***tung độ*** của điểm M.

$M = (x; y) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$.



Hình 4

Chú ý: Hoành độ của điểm M còn được kí hiệu là x_M, tung độ của điểm M còn được kí hiệu là y_M.

Khi đó ta viết $M(x_M; y_M)$.

2. Biểu thức toạ độ của các phép toán vectơ

Cho hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2)$, $\vec{b} = (b_1; b_2)$ và số thực k. Ta có các công thức sau:

$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1; a_2 + b_2)$; $\quad \vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1; a_2 - b_2)$;

$k\vec{a} = (ka_1; ka_2)$; $\quad \vec{a}.\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$.

3. Áp dụng của toạ độ vectơ

Liên hệ giữa toạ độ của điểm và toạ độ của vectơ trong mặt phẳng

Cho hai điểm $A(x_A; y_A)$ và $B(x_B; y_B)$. Ta có: $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A)$.

Toạ độ trung điểm của đoạn thẳng và trọng tâm của tam giác

Cho hai điểm $A(x_A; y_A)$ và $B(x_B; y_B)$. Toạ độ trung điểm $M(x_M; y_M)$ của đoạn thẳng AB là:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2},\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2}.$$

Cho tam giác ABC có $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$, $C(x_C; y_C)$. Toạ độ trọng tâm $G(x_G; y_G)$ của tam giác ABC là:

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3},\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}.$$

Ứng dụng biểu thức toạ độ của các phép toán vectơ

Cho hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2)$, $\vec{b} = (b_1; b_2)$ và hai điểm $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$. Ta có:

- $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 = 0$;
- $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương $\Leftrightarrow a_1b_2 - a_2b_1 = 0$;
- $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$;
- $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$;
- $\cos(\vec{a}; \vec{b}) = \dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|} = \dfrac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}.\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$ ($\vec{a}$, $\vec{b}$ khác $\vec{0}$).

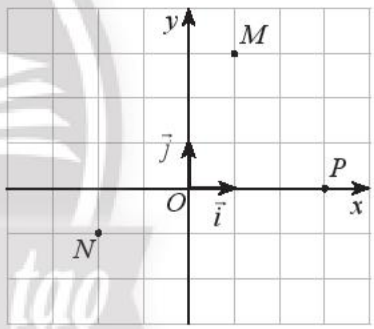
B. BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Trong mặt phẳng Oxy, cho ba điểm M, N, P được biểu diễn như Hình 5.

a) Tìm toạ độ của các điểm M, N, P.

b) Hãy biểu thị các vectơ $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{ON}$, $\overrightarrow{OP}$ qua hai vectơ $\vec{i}$ và $\vec{j}$.

c) Tìm toạ độ các vectơ $\overrightarrow{PM}$, $\overrightarrow{PN}$, $\overrightarrow{PO}$, $\overrightarrow{NM}$.



Hình 5

Giải

a) Theo Hình 5 ta có toạ độ các điểm M, N, P lần lượt là: $M(1; 3)$, $P(3; 0)$, $N(-2; -1)$.

b) Ta có: $\overrightarrow{OM} = \vec{i} + 3\vec{j}$; $\overrightarrow{ON} = -2\vec{i} - \vec{j}$; $\overrightarrow{OP} = 3\vec{i} + 0\vec{j}$.

c) Ta có: $\overrightarrow{PM} = (x_M - x_P; y_M - y_P) = (1 - 3; 3 - 0) = (-2; 3)$;

$\overrightarrow{PN} = (x_N - x_P; y_N - y_P) = (-2 - 3; -1 - 0) = (-5; -1)$;

$\overrightarrow{PO} = (x_O - x_P; y_O - y_P) = (0 - 3; 0 - 0) = (-3; 0)$;

$\overrightarrow{NM} = (x_M - x_N; y_M - y_N) = (1 - (-2); 3 - (-1)) = (3; 4)$.

Bài 2. Cho hai vectơ $\vec{a} = (3; 4)$, $\vec{b} = (-1; 5)$.

a) Tìm toạ độ của vectơ: $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}-\vec{b}$, $10\vec{a}$, $-2\vec{b}$.

b) Tính các tích vô hướng: $\vec{a}\,.\,\vec{b}$, $(-2\vec{a})\,.\,(5\vec{b})$.

Giải

a) Ta có:

$\vec{a}+\vec{b} = (3 + (-1); 4 + 5) = (2; 9)$; $\vec{a}-\vec{b} = (3 - (-1); 4 - 5) = (4; -1)$;

$10\vec{a} = (10\,.\,3; 10\,.\,4) = (30; 40)$; $-2\vec{b} = (-2\,.\,(-1); -2\,.\,5) = (2; -10)$.

b) Ta có:

$\vec{a}\,.\,\vec{b} = 3\,.\,(-1) + 4\,.\,5 = -3 + 20 = 17$;

$-2\vec{a} = (-6; -8)$ và $5\vec{b} = (-5; 25)$ nên

$$(-2\vec{a})\,.\,(5\vec{b}) = (-6)\,.\,(-5) + (-8)\,.\,25 = 30 - 200 = -170.$$

Bài 3. Cho ba vectơ $\vec{m} = (-6; 1)$, $\vec{n} = (0; 2)$, $\vec{p} = (1; 1)$. Tìm toạ độ của các vectơ:

a) $\vec{m}+\vec{n}-\vec{p}$.

b) $(\vec{m}\,.\,\vec{n})\vec{p}$.

Giải

a) Ta có: $\vec{m}+\vec{n}-\vec{p} = (-6 + 0 - 1; 1 + 2 - 1) = (-7; 2)$.

b) Ta có: $(\vec{m}\,.\,\vec{n})\vec{p} = (-6\,.\,0 + 1\,.\,2)\vec{p} = 2\vec{p} = (2; 2)$.

Bài 4. Cho tam giác DEF có toạ độ các đỉnh là $D(2; 2)$, $E(6; 2)$ và $F(2; 6)$.

a) Tìm toạ độ trung điểm M của cạnh EF.

b) Tìm toạ độ trọng tâm G của tam giác DEF.

Giải

a) Ta có: $x_M = \dfrac{x_E + x_F}{2} = \dfrac{6+2}{2} = 4$, $y_M = \dfrac{y_E + y_F}{2} = \dfrac{2+6}{2} = 4$.

Vậy toạ độ trung điểm M của cạnh EF là $M(4; 4)$.

b) Ta có: $x_G = \dfrac{x_D + x_E + x_F}{3} = \dfrac{2+6+2}{3} = \dfrac{10}{3}$, $y_G = \dfrac{y_D + y_E + y_F}{3} = \dfrac{2+2+6}{3} = \dfrac{10}{3}$.

Vậy toạ độ trọng tâm G của tam giác DEF là $G\left(\dfrac{10}{3}; \dfrac{10}{3}\right)$.

Bài 5. Cho tam giác ABC có toạ độ các đỉnh là $A(2; 2)$, $B(6; 3)$ và $C(5; 5)$.

a) Tìm toạ độ điểm H là chân đường cao của tam giác ABC kẻ từ A.

b) Tính độ dài ba cạnh của tam giác ABC và số đo của góc C.

Giải

a) Xét điểm $H(x; y)$, ta có: $\overrightarrow{AH} = (x-2; y-2)$, $\overrightarrow{BH} = (x-6; y-3)$, $\overrightarrow{BC} = (-1; 2)$.

$H(x; y)$ là chân đường cao của tam giác ABC kẻ từ A nên ta có:

$\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow (x-2).(-1) + (y-2).2 = 0 \Leftrightarrow -x + 2y - 2 = 0$ (1).

Hai vectơ $\overrightarrow{BH}$, $\overrightarrow{BC}$ cùng phương $\Leftrightarrow (x-6).2 - (y-3).(-1) = 0$

$\Leftrightarrow 2x + y - 15 = 0$ (2).

Từ (1) và (2) ta được hệ phương trình: $\begin{cases} -x + 2y - 2 = 0 \\ 2x + y - 15 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{28}{5} \\ y = \dfrac{19}{5}. \end{cases}$

Vậy $H\left(\dfrac{28}{5}; \dfrac{19}{5}\right)$.

b) Ta có: $\overrightarrow{AB} = (4; 1)$, $\overrightarrow{CB} = (1; -2)$, $\overrightarrow{CA} = (-3; -3)$.

Suy ra: $AB = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17}$, $BC = \left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$,

$AC = \left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$.

$\cos\widehat{C} = \cos\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right) = \dfrac{\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}}{CA.CB} = \dfrac{(-3).1 + (-3).(-2)}{3\sqrt{2}.\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{10}}{10}$.

Vậy $\widehat{C} \approx 71°34'$.

C. BÀI TẬP

Các bài toán sau đây xét trong mặt phẳng Oxy.

1. Cho hai vectơ $\vec{a} = (1; 2)$, $\vec{b} = (3; 0)$.

a) Tìm toạ độ của vectơ $2\vec{a} + 3\vec{b}$.

b) Tính các tích vô hướng: $\vec{a}.\vec{b}$, $(3\vec{a}).(2\vec{b})$.

2. Cho ba vectơ $\vec{m} = (1; 1)$, $\vec{n} = (2; 2)$, $\vec{p} = (-1; -1)$. Tìm toạ độ của các vectơ:

a) $\vec{m} + 2\vec{n} - 3\vec{p}$;

b) $(\vec{p}.\vec{n})\vec{m}$.

3. Cho tam giác MNP có toạ độ các đỉnh là $M(3; 3)$, $N(7; 3)$ và $P(3; 7)$.

a) Tìm toạ độ trung điểm E của cạnh MN.

b) Tìm toạ độ trọng tâm G của tam giác MNP.

4. Cho tam giác ABC có toạ độ các đỉnh là $A(1; 3)$, $B(3; 1)$ và $C(6; 4)$.

a) Tính độ dài ba cạnh của tam giác ABC và số đo của góc B.

b) Tìm toạ độ tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

5. Cho năm điểm $A(2; 0)$, $B(0; -2)$, $C(3; 3)$, $D(-2; -2)$, $E(1; -1)$. Trong các điểm đã cho, hãy tìm điểm:

a) Thuộc trục hoành;

b) Thuộc trục tung;

c) Thuộc đường phân giác của góc phần tư thứ nhất.

6. Cho điểm $M(4; 5)$. Tìm toạ độ:

a) Điểm H là hình chiếu vuông góc của điểm M trên trục Ox;

b) Điểm M' đối xứng với M qua trục Ox;

c) Điểm K là hình chiếu vuông góc của điểm M trên trục Oy;

d) Điểm M'' đối xứng với M qua trục Oy;

e) Điểm C đối xứng với M qua gốc O.

7. Cho ba điểm $A(1; 1)$, $B(2; 4)$, $C(4; 4)$.

a) Tìm toạ độ điểm D sao cho $ABCD$ là một hình bình hành.

b) Tìm toạ độ giao điểm hai đường chéo của hình bình hành $ABCD$.

8. Cho tam giác ABC có toạ độ các đỉnh là $A(1; 1)$, $B(7; 3)$, $C(4; 7)$ và cho các điểm $M(2; 3)$, $N(3; 5)$.

a) Chứng minh bốn điểm A, M, N, C thẳng hàng.

b) Chứng minh trọng tâm của các tam giác ABC và MNB trùng nhau.

9. Cho bốn điểm $M(6; -4)$, $N(7; 3)$, $P(0; 4)$, $Q(-1; -3)$. Chứng minh rằng tứ giác $MNPQ$ là hình vuông.

10. Tính góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ trong các trường hợp sau:

a) $\vec{a} = (1; -4)$, $\vec{b} = (5; 3)$;

b) $\vec{a} = (4; 3)$, $\vec{b} = (6; 0)$;

c) $\vec{a} = \left(2; 2\sqrt{3}\right)$, $\vec{b} = \left(-3; \sqrt{3}\right)$.

11. Cho điểm $A(1; 4)$. Gọi B là điểm đối xứng với điểm A qua gốc toạ độ O. Tìm toạ độ của điểm C có tung độ bằng 3, sao cho tam giác ABC vuông tại C.

12. Cho vectơ $\vec{a} = (2; 2)$. Hãy tìm toạ độ một vectơ đơn vị $\vec{e}$ cùng hướng với vectơ $\vec{a}$.

Bài 2. ĐƯỜNG THẲNG TRONG MẶT PHẲNG TOẠ ĐỘ

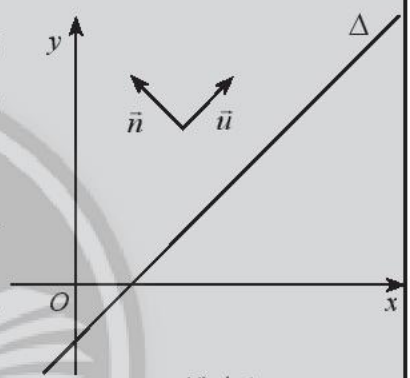
A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Phương trình đường thẳng

Vectơ chỉ phương và vectơ pháp tuyến của đường thẳng

Vectơ $\vec{u}$ được gọi là ***vectơ chỉ phương*** của đường thẳng Δ nếu $\vec{u} \neq \vec{0}$ và giá của $\vec{u}$ song song hoặc trùng với Δ.

Vectơ $\vec{n}$ được gọi là ***vectơ pháp tuyến*** của đường thẳng Δ nếu $\vec{n} \neq \vec{0}$ và $\vec{n}$ vuông góc với vectơ chỉ phương của Δ.



Hình 1

Chú ý:

• Nếu đường thẳng Δ có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (a; b)$ thì Δ sẽ nhận $\vec{u} = (b; -a)$ hoặc $\vec{u} = (-b; a)$ là một vectơ chỉ phương.

• Nếu $\vec{u}$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ thì $k\vec{u}$ $(k \neq 0)$ cũng là vectơ chỉ phương của Δ.

• Nếu $\vec{n}$ là vectơ pháp tuyến của đường thẳng Δ thì $k\vec{n}$ $(k \neq 0)$ cũng là vectơ pháp tuyến của Δ.

Phương trình tham số của đường thẳng

Trong mặt phẳng Oxy, ta gọi: $\begin{cases} x = x_0 + tu_1 \\ y = y_0 + tu_2 \end{cases}$ (với $u_1^2 + u_2^2 > 0$, $t \in \mathbb{R}$)

là ***phương trình tham số*** của đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(x_0; y_0)$ có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (u_1; u_2)$.

Chú ý: Cho t một giá trị cụ thể thì ta xác định được một điểm trên đường thẳng Δ và ngược lại.

Phương trình tổng quát của đường thẳng

Trong mặt phẳng Oxy, mỗi đường thẳng đều có ***phương trình tổng quát*** dạng

$$ax + by + c = 0,$$

với a và b không đồng thời bằng 0.

Chú ý:

• Mỗi phương trình $ax + by + c = 0$ (a và b không đồng thời bằng 0) đều xác định một đường thẳng có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (a; b)$.

• Khi cho phương trình đường thẳng $ax + by + c = 0$, ta hiểu a và b không đồng thời bằng 0.

2. Vị trí tương đối của hai đường thẳng

Nếu $\vec{n}_1$ và $\vec{n}_2$ cùng phương thì Δ_1 và Δ_2 song song hoặc trùng nhau. Lấy một điểm P tuỳ ý trên Δ_1.

• Nếu $P \in \Delta_2$ thì $\Delta_1 \equiv \Delta_2$.

• Nếu $P \notin \Delta_2$ thì $\Delta_1 // \Delta_2$.

Nếu $\vec{n}_1$ và $\vec{n}_2$ không cùng phương thì Δ_1 và Δ_2 cắt nhau tại một điểm $M(x_0; y_0)$ với $(x_0; y_0)$ là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0. \end{cases}$$

Chú ý:

a) Nếu $\vec{n}_1 . \vec{n}_2 = 0$ thì $\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$, suy ra $\Delta_1 \perp \Delta_2$.

b) Để xét hai vectơ $\vec{n}_1(a_1; b_1)$ và $\vec{n}_2(a_2; b_2)$ cùng phương hay không cùng phương, ta xét biểu thức $a_1b_2 - a_2b_1$:

• Nếu $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ thì hai vectơ cùng phương.

• Nếu $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ thì hai vectơ không cùng phương.

Trong trường hợp tất cả các hệ số a_1, a_2, b_1, b_2 đều khác 0, ta có thể xét hai trường hợp:

• Nếu $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$ thì hai vectơ cùng phương.

• Nếu $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ thì hai vectơ không cùng phương.

3. Góc giữa hai đường thẳng

Khái niệm góc giữa hai đường thẳng

Hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 cắt nhau tạo thành bốn góc.

• Nếu Δ_1 không vuông góc với Δ_2 thì góc nhọn trong bốn góc đó được gọi là ***góc giữa hai đường thẳng*** Δ_1 và Δ_2.

• Nếu Δ_1 vuông góc với Δ_2 thì ta nói góc giữa Δ_1 và Δ_2 bằng $90°$.

Công thức tính góc giữa hai đường thẳng

Cho hai đường thẳng Δ_1: $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ $(a_1^2 + b_1^2 > 0)$, Δ_2: $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ $(a_2^2 + b_2^2 > 0)$ có vectơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n}_1$ và $\vec{n}_2$.

Ta có công thức: $\cos(\Delta_1, \Delta_2) = \dfrac{|a_1a_2 + b_1b_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}.\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$.

Chú ý:

Ta đã biết hai đường thẳng vuông góc khi và chỉ khi chúng có hai vectơ pháp tuyến vuông góc. Do đó:

• Nếu Δ_1 và Δ_2 lần lượt có phương trình $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ và $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ thì ta có: $(\Delta_1, \Delta_2) = 90° \Leftrightarrow a_1a_2 + b_1b_2 = 0$.

• Nếu Δ_1 và Δ_2 lần lượt có phương trình $y = k_1x + m_1$ và $y = k_2x + m_2$ thì ta có: $(\Delta_1, \Delta_2) = 90° \Leftrightarrow k_1.k_2 = -1$.

Nói cách khác, hai đường thẳng có tích hệ số góc bằng -1 *thì vuông góc với nhau.*

4. Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng

Trong mặt phẳng Oxy, cho đường thẳng Δ có phương trình $ax + by + c = 0$ $(a^2 + b^2 > 0)$ và điểm $M_0(x_0; y_0)$. ***Khoảng cách*** từ điểm M_0 đến đường thẳng Δ, kí hiệu là $d(M_0; \Delta)$ được tính bởi công thức:

$$d(M_0, \Delta) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

B. BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Viết phương trình tham số và phương trình tổng quát của đường thẳng d trong các trường hợp sau:

a) Đường thẳng d đi qua điểm $A(5; 4)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1; 3)$;

b) Đường thẳng d đi qua điểm $B(1; 2)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (-1; 4)$;

c) Đường thẳng d đi qua hai điểm $C(2; 2)$, $D(4; 6)$.

Giải

a) Đường thẳng d đi qua điểm $A(5; 4)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1; 3)$ nên ta có phương trình tham số của d là:

$$\begin{cases} x = 5 + t \\ y = 4 + 3t. \end{cases}$$

Đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1; 3)$ nên có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (3; -1)$.

Phương trình tổng quát của d là: $3(x - 5) - (y - 4) = 0 \Leftrightarrow 3x - y - 11 = 0$.

b) Đường thẳng d đi qua điểm $B(1; 2)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (-1; 4)$ nên có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (4; 1)$. Phương trình tham số của d là:

$$\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 2 + t. \end{cases}$$

Phương trình tổng quát của d là: $-(x - 1) + 4(y - 2) = 0 \Leftrightarrow x - 4y + 7 = 0$.

c) Đường thẳng d đi qua hai điểm $C(2; 2)$, $D(4; 6)$ nên có vectơ chỉ phương $\vec{u} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}(2; 4) = (1; 2)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (2; -1)$.

Phương trình tham số của d là: $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 2 + 2t. \end{cases}$

Phương trình tổng quát của d là: $2(x - 2) - (y - 2) = 0 \Leftrightarrow 2x - y - 2 = 0$.

Bài 2. Viết phương trình tổng quát của các đường thẳng là đồ thị các hàm số bậc nhất sau:

a) d_1: $y = x + 4$; b) d_2: $y = -\frac{2}{3}x + 1$; c) d_3: $y = -x$.

Giải

a) Ta có $y = x + 4 \Leftrightarrow x - y + 4 = 0$.

Vậy phương trình tổng quát của d_1 là $x - y + 4 = 0$.

b) Ta có $y = -\dfrac{2}{3}x + 1 \Leftrightarrow 2x + 3y - 3 = 0$.

Vậy phương trình tổng quát của d_2 là $2x + 3y - 3 = 0$.

c) Ta có $y = -x \Leftrightarrow x + y = 0$.

Vậy phương trình tổng quát của d_3 là $x + y = 0$.

Bài 3. Cho đường thẳng d có phương trình $4x + 2y + 1 = 0$. Xét vị trí tương đối của d với mỗi đường thẳng sau:

a) Δ_1: $x - 2y + 4 = 0$; b) Δ_2: $2x + y - 9 = 0$; c) Δ_3: $\begin{cases} x = -\dfrac{1}{4} - t \\ y = 2t. \end{cases}$

Giải

a) d và Δ_1 có vectơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n}_1 = (4; 2)$ và $\vec{n}_2 = (1; -2)$.

Ta có: $a_1b_2 - a_2b_1 = 4 \,.\, (-2) - 2 \,.\, 1 = -10 \neq 0$, suy ra $\vec{n}_1$ và $\vec{n}_2$ là hai vectơ không cùng phương. Vậy d và Δ_1 cắt nhau tại một điểm M.

Giải hệ phương trình $\begin{cases} 4x + 2y + 1 = 0 \\ x - 2y + 4 = 0 \end{cases}$ ta được $M\left(-1; \dfrac{3}{2}\right)$.

b) d và Δ_2 có vectơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n}_1 = (4; 2)$ và $\vec{n}_2 = (2; 1)$.

Ta có $\dfrac{4}{2} = \dfrac{2}{1}$ suy ra $\vec{n}_1$ và $\vec{n}_2$ là hai vectơ cùng phương. Vậy d và Δ_2 song song hoặc trùng nhau. Lấy điểm $N\left(0; -\dfrac{1}{2}\right)$ thuộc d, thay toạ độ của N vào phương trình Δ_2, ta được $2 \,.\, 0 - \dfrac{1}{2} - 9 \neq 0$, suy ra N không thuộc Δ_2. Vậy $d \,//\, \Delta_2$.

c) Ta có Δ_3: $\begin{cases} x = -\dfrac{1}{4} - t \\ y = 2t. \end{cases}$

Suy ra: phương trình tổng quát của Δ_3: $2x + y + \dfrac{1}{2} = 0$.

d và Δ_3 có vectơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n}_1 = (4; 2)$ và $\vec{n}_2 = (2; 1)$. Ta có $\dfrac{4}{2} = \dfrac{2}{1}$ suy ra $\vec{n}_1$ và $\vec{n}_2$ là hai vectơ cùng phương. Vậy d và Δ_3 song song hoặc trùng nhau.

Lấy điểm $P\left(-\dfrac{1}{4}; 0\right)$ thuộc d, thay toạ độ của P vào phương trình tổng quát của Δ_3, ta được $2\left(-\dfrac{1}{4}\right) + 0 + \dfrac{1}{2} = 0$, suy ra N thuộc Δ_3. Vậy $d \equiv \Delta_3$.

Bài 4. Tính số đo của góc giữa hai đường thẳng d_1 và d_2 trong các trường hợp sau:

a) d_1: $x + 2y - 2\,023 = 0$ và d_2: $6x + 2y + 2\,024 = 0$;

b) d_1: $5x - 3y + 9 = 0$ và d_2: $3x + 5y + 101 = 0$;

c) d_1: $4x + 3y + 5 = 0$ và d_2: $8x + 6y + 2\,025 = 0$.

Giải

a) Ta có: $\cos(d_1, d_2) = \dfrac{|1.6 + 2.2|}{\sqrt{1^2 + 2^2}.\sqrt{6^2 + 2^2}} = \dfrac{10}{\sqrt{200}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Suy ra $(d_1, d_2) = 45^\circ$.

b) Ta có: $a_1.a_2 + b_1.b_2 = 5.3 - 3.5 = 0$, suy ra $(d_1, d_2) = 90^\circ$.

c) d_1 và d_2 có vectơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n}_1 = (4;3)$ và $\vec{n}_2 = (8;6)$. Ta có $\dfrac{4}{8} = \dfrac{3}{6}$, suy ra $\vec{n}_1$ và $\vec{n}_2$ là hai vectơ cùng phương.

Vậy d_1 và d_2 song song hoặc trùng nhau. Do đó $(d_1, d_2) = 0^\circ$.

Bài 5. Tính khoảng cách từ các điểm $A(4; 5)$, $B(2; 0)$ đến đường thẳng

$$\Delta: 6x - 8y - 13 = 0.$$

Giải

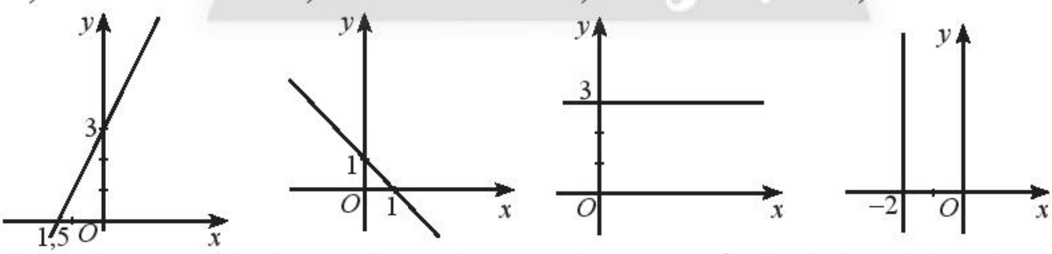
Ta có: $d(A, \Delta) = \dfrac{|6.4 - 8.5 - 13|}{\sqrt{6^2 + 8^2}} = \dfrac{29}{10} = 2{,}9$; $d(B, \Delta) = \dfrac{|6.2 - 8.0 - 13|}{\sqrt{6^2 + 8^2}} = \dfrac{1}{10} = 0{,}1$.

C. BÀI TẬP

Các bài toán sau đây được xét trong mặt phẳng Oxy.

1. Tìm các giá trị của tham số a, b, c để phương trình $ax + by + c = 0$ có thể biểu diễn được các đường thẳng trong hình dưới đây.

a) b) c) d)



2. Lập phương trình tổng quát và phương trình tham số của đường thẳng d trong mỗi trường hợp sau:

a) d đi qua điểm $M(2; 2)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (4; 7)$;

b) d đi qua điểm $N(0; 1)$ và có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (-5; 3)$;

c) d đi qua $A(-2; -3)$ và có hệ số góc $k = 3$;

d) d đi qua hai điểm $P(1; 1)$ và $Q(3; 4)$.

3. Cho tam giác ABC, biết $A(1; 4)$, $B(0; 1)$ và $C(4; 3)$.

a) Lập phương trình tổng quát của đường thẳng BC.

b) Lập phương trình tham số của đường trung tuyến AM.

c) Lập phương trình tổng quát của đường cao AH.

4. Lập phương trình tổng quát của đường thẳng Δ trong mỗi trường hợp sau:

a) Δ đi qua $M(3; 3)$ và song song với đường thẳng $x + 2y - 2\,022 = 0$;

b) Δ đi qua $N(2; -1)$ và vuông góc với đường thẳng $3x + 2y + 99 = 0$.

5. Xét vị trí tương đối của các cặp đường thẳng d_1 và d_2 sau đây:

a) d_1: $2x + y + 9 = 0$ và d_2: $2x + 3y - 9 = 0$;

b) d_1: $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - 2t \end{cases}$ và d_2: $2x + y + 10 = 0$;

c) d_1: $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 8 - 5t \end{cases}$ và d_2: $5x - y + 3 = 0$.

6. Cho đường thẳng d có phương trình tham số: $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t. \end{cases}$

Tìm giao điểm của d với đường thẳng Δ: $x + y - 2 = 0$.

7. Tìm số đo của góc giữa hai đường thẳng d_1 và d_2 trong các trường hợp sau:

a) d_1: $5x - 3y + 1 = 0$ và d_2: $10x - 6y - 7 = 0$;

b) d_1: $7x - 3y + 7 = 0$ và d_2: $3x + 7y - 10 = 0$;

c) d_1: $2x - 4y + 9 = 0$ và d_2: $6x - 2y - 2\,023 = 0$.

8. Tính khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng Δ trong các trường hợp sau:

a) $M(2; 3)$ và Δ: $8x - 6y + 7 = 0$;

b) $M(0; 1)$ và Δ: $4x + 9y - 20 = 0$;

c) $M(1; 1)$ và Δ: $3y - 5 = 0$;

d) $M(4; 9)$ và Δ: $x - 25 = 0$.

9. Tìm c để đường thẳng Δ: $4x - 3y + c = 0$ tiếp xúc với đường tròn (C) có tâm $J(1; 2)$ và bán kính $R = 3$.

10. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng:

Δ: $6x + 8y - 11 = 0$ và Δ': $6x + 8y - 1 = 0$.

11. Một trạm viễn thông S có toạ độ $(5; 1)$. Một người đang ngồi trên chiếc xe khách chạy trên đoạn cao tốc có dạng một đường thẳng Δ có phương trình $12x + 5y - 20 = 0$. Tính khoảng cách ngắn nhất giữa người đó và trạm viễn thông S. Biết rằng mỗi đơn vị độ dài tương ứng với 1 km.

Bài 3. ĐƯỜNG TRÒN TRONG MẶT PHẲNG TOẠ ĐỘ

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

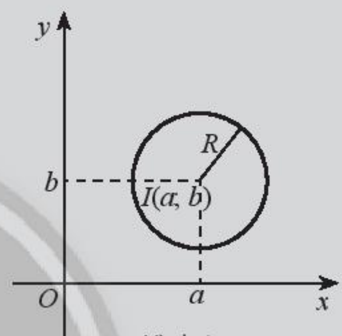
1. Phương trình đường tròn

Phương trình $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ ***phương trình đường tròn*** tâm $I(a; b)$ bán kính R.

Nhận xét: Ta có $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2-2ax-2by+(a^2+b^2-R^2)=0.$$

Vậy phương trình đường tròn $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ có thể được viết dưới dạng $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$, trong đó $c=a^2+b^2-R^2$.



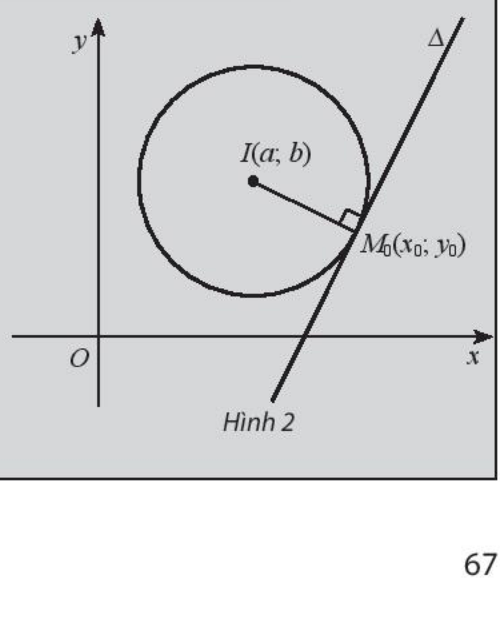
Hình 1

Ngược lại, phương trình $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ là phương trình của đường tròn (C) khi và chỉ khi $a^2+b^2-c>0$. Khi đó đường tròn (C) có tâm $I(a; b)$ và bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2-c}$.

2. Phương trình tiếp tuyến của đường tròn

Phương trình tiếp tuyến của đường tròn tâm $I(a; b)$ tại điểm $M_0(x_0; y_0)$ nằm trên đường tròn là:

$$(a-x_0)(x-x_0)+(b-y_0)(y-y_0)=0.$$



Hình 2

B. BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Viết phương trình đường tròn (C) trong các trường hợp sau:

a) (C) có tâm $I(3; 2)$, bán kính $R = 7$;

b) (C) tâm $J(-1; -1)$, bán kính $R = 5$.

Giải

a) Đường tròn (C) tâm $I(3; 2)$, bán kính $R = 7$ có phương trình

$$(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 49;$$

b) Đường tròn (C) tâm $J(-1; -1)$, bán kính $R = 5$ có phương trình

$$(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 25.$$

Bài 2. Phương trình nào trong các phương trình sau đây là phương trình đường tròn? Tìm toạ độ tâm và bán kính của đường tròn đó.

a) $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0$;

b) $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 6 = 0$;

c) $x^2 + y^2 - 4x - 8y + 5 = 0$;

d) $2x^2 + 2y^2 + 6x + 8y - 2 = 0$.

Giải

a) $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0$ (1).

Phương trình (1) có dạng $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ với $a = 1$; $b = 2$; $c = -20$

Ta có $a^2 + b^2 - c = 1 + 4 + 20 = 25 > 0$.

Vậy (1) là phương trình đường tròn tâm $I(1; 2)$, bán kính $R = 5$.

b) $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 6 = 0$ (2).

Phương trình (2) có dạng $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ với $a = -1$; $b = 2$; $c = 6$.

Ta có $a^2 + b^2 - c = 1 + 4 - 6 = -1 < 0$.

Vậy (2) không phải là phương trình đường tròn.

c) $x^2 + y^2 - 4x - 8y + 5 = 0$ (3).

Phương trình (3) có dạng $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ với $a = 2$; $b = 4$; $c = 5$.

Ta có $a^2 + b^2 - c = 4 + 16 - 5 = 15 > 0$.

Vậy (3) là phương trình đường tròn tâm $I(2; 4)$, bán kính $R = \sqrt{15}$.

d) $2x^2 + 2y^2 + 6x + 8y - 2 = 0$ (4).

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 3x + 4y - 1 = 0$ (*).

Phương trình (*) có dạng $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ với $a = -\dfrac{3}{2}$; $b = -2$; $c = -1$.

Ta có $a^2 + b^2 - c = \frac{9}{4} + 4 + 1 = \frac{29}{4} > 0$. Vậy (4) là phương trình đường tròn tâm $I\left(-\frac{3}{2}; -2\right)$, bán kính $R = \frac{\sqrt{29}}{2}$.

Bài 3. Viết phương trình tiếp tuyến d với đường tròn (C): $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 25$ tại điểm $M(5; 6)$.

Giải

Ta có: $(5-1)^2 + (6-3)^2 = 25$, nên điểm M thuộc đường tròn (C).

Đường tròn (C): $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 25$ có tâm $I(1; 3)$

Phương trình tiếp tuyến d với (C) tại $M(5; 6)$ là:

$(1-5)(x-5) + (3-6)(y-6) = 0$

$\Leftrightarrow 4x + 3y - 38 = 0$.

Bài 4. Một nông trại tưới nước theo phương pháp vòi phun xoay vòng trung tâm như Hình 3. Cho biết tâm một vòi phun được đặt tại toạ độ $(12; -9)$ và vòi có thể phun xa tối đa 36 m. Hãy viết phương trình đường tròn biểu diễn tập hợp các điểm xa nhất mà vòi nước có thể phun tới.

Hình 3

Giải

Tập hợp các điểm xa nhất mà vòi nước có thể phun tới là đường tròn có tâm $I(12; -9)$ và bán kính $R = 36$ nên có phương trình:

$$(x-12)^2 + (y+9)^2 = 36^2.$$

C. BÀI TẬP

1. Phương trình nào trong các phương trình sau đây là phương trình đường tròn? Tìm toạ độ tâm và bán kính của đường tròn đó.

a) $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 9 = 0$;

b) $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 1 = 0$;

c) $x^2 + y^2 + 8x + 4y + 2\,022 = 0$;

d) $3x^2 + 2y^2 + 5x + 7y - 1 = 0$.

2. Lập phương trình đường tròn (C) trong các trường hợp sau:

a) (C) có tâm $O(0; 0)$ và có bán kính $R = 9$;

b) (C) có đường kính AB với $A(1; 1)$ và $B(3; 5)$;

c) (C) có tâm $M(2; 3)$ và tiếp xúc với đường thẳng $3x - 4y + 9 = 0$;

d) (C) có tâm $I(3; 2)$ và đi qua điểm $B(7; 4)$.

3. Lập phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác có toạ độ các đỉnh là:

a) $A(1; 4)$, $B(0; 1)$, $C(4; 3)$; b) $O(0; 0)$, $P(16; 0)$, $R(0; 12)$.

4. Lập phương trình đường tròn tiếp xúc với hai trục toạ độ Ox, Oy và đi qua điểm $A(2; 1)$.

5. Cho đường tròn (C) có phương trình $x^2 + y^2 - 6x - 2y - 15 = 0$.

a) Chứng tỏ rằng điểm $A(0; 5)$ thuộc đường tròn (C);

b) Viết phương trình tiếp tuyến với (C) tại điểm $A(0; 5)$;

c) Viết phương trình tiếp tuyến với (C) song song với đường thẳng $8x + 6y + 99 = 0$.

6. Một cái cổng hình bán nguyệt rộng 6,8 m, cao 3,4 m. Mặt đường dưới cổng được chia thành hai làn cho xe ra vào.

a) Viết phương trình mô phỏng cái cổng;

b) Một chiếc xe tải rộng 2,4 m và cao 2,5 m đi đúng làn đường quy định có thể đi qua cổng được hay không?

Bài 4. BA ĐƯỜNG CONIC TRONG MẶT PHẲNG TOẠ ĐỘ

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

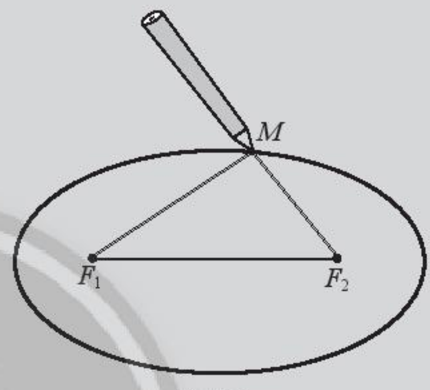
1. Elip

Nhận biết elip

Cho hai điểm cố định F_1, F_2 và một độ dài không đổi $2a$ lớn hơn F_1F_2. ***Elip*** (E) là tập hợp các điểm M trong mặt phẳng sao cho $F_1M + F_2M = 2a$.

Các điểm F_1 *và* F_2 gọi là các ***tiêu điểm*** của elip.

Độ dài $F_1F_2 = 2c$ gọi là ***tiêu cự*** của elip $(a > c)$.

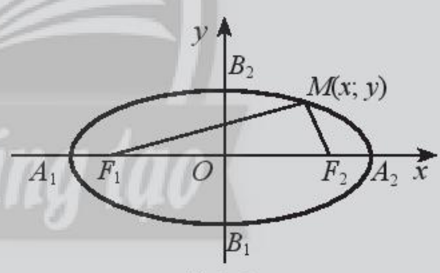


Hình 1

Phương trình chính tắc của Elip

Cho elip (E) có hai tiêu điểm là F_1, F_2. Chọn hệ trục toạ độ Oxy sao cho $F_1(-c; 0)$ và $F_2(c; 0)$.

Phương trình $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, trong đó $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ gọi là ***phương trình chính tắc*** của elip.



Hình 2

Chú ý:

• (E) cắt Ox tại hai điểm $A_1(-a; 0)$, $A_2(a; 0)$ và cắt Oy tại hai điểm $B_1(0; -b)$, $B_2(0; b)$.

• Các điểm A_1, A_2, B_1, B_2 gọi là các ***đỉnh*** của elip.

• Đoạn thẳng A_1A_2 gọi là ***trục lớn***, đoạn thẳng B_1B_2 gọi là ***trục nhỏ*** của elip.

• Giao điểm O của hai trục là ***tâm đối xứng*** của elip.

• Nếu $M(x, y) \in (E)$ thì $|x| \le a$, $|y| \le b$.

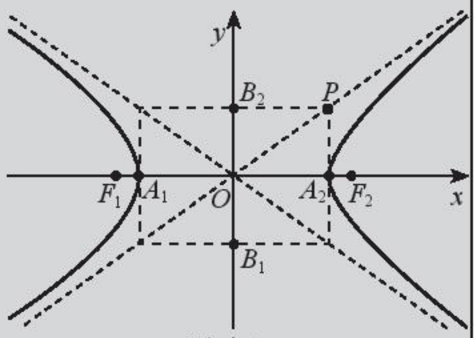
2. Hypebol

Nhận biết hypebol

Cho hai điểm cố định F_1, F_2 và một độ dài không đổi $2a$ nhỏ hơn F_1F_2. ***Hypebol*** là tập hợp các điểm M trong mặt phẳng sao cho $|F_1M - F_2M| = 2a$.

Các điểm F_1 và F_2 gọi là các ***tiêu điểm*** của hypebol.

Độ dài $F_1F_2 = 2c$ gọi là ***tiêu cự*** của hypebol ($c > a$).



Hình 3

Phương trình chính tắc của Hypebol

Hypebol (H) có hai tiêu điểm là F_1, F_2. Chọn hệ trục toạ độ sao cho $F_1(-c; 0)$ và $F_2(c; 0)$. Phương trình $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ trong đó $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ là ***phương trình chính tắc*** của hypebol.

Chú ý:

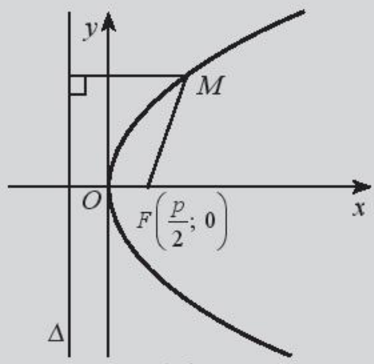
- (H) cắt Ox tại hai điểm $A_1(-a; 0)$ và $A_2(a; 0)$. Nếu vẽ hai điểm $B_1(0; -b)$ và $B_2(0; b)$ vào hình chữ nhật OA_2PB_2 thì $\sqrt{a^2 + b^2} = c$.
- Các điểm A_1, A_2 gọi là các ***đỉnh*** của hypebol.
- Đoạn thẳng A_1A_2 gọi là ***trục thực***, đoạn thẳng B_1B_2 gọi là ***trục ảo*** của hypebol.
- Giao điểm O của hai trục là ***tâm đối xứng*** của hypebol.
- Nếu $M(x; y) \in (H)$ thì $x \le -a$ hoặc $x \ge a$.

3. Parabol

Nhận biết parabol

Cho một điểm cố định F và một đường thẳng Δ cố định không đi qua F. Parabol (P) là tập hợp các điểm M cách đều F và Δ.

F gọi là ***tiêu điểm*** và Δ gọi là ***đường chuẩn*** của parabol (P).



Hình 4

Phương trình chính tắc của parabol

Parabol (P) với tiêu điểm $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$ và đường chuẩn Δ: $x + \frac{p}{2} = 0$, có **phương trình chính tắc:** $y^2 = 2px$.

Chú ý:

- O gọi là ***đỉnh*** của parabol (P).
- Ox gọi là ***trục đối xứng*** của parabol (P).
- p gọi là ***tham số tiêu*** của parabol (P).
- Nếu $M(x; y) \in (P)$ thì $x \geq 0$ và $M'(x; -y) \in (P)$.

B. BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Viết phương trình chính tắc của elip (E) có tiêu cự $2c = 18$ và độ dài trục lớn $2a = 24$.

Giải

Ta có: $2c = 18$; $2a = 24$ suy ra $c = 9$, $a = 12$ và $b^2 = a^2 - c^2 = 12^2 - 9^2 = 63$.

Vậy phương trình chính tắc của (E) là $\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{63} = 1$.

Bài 2. Viết phương trình chính tắc của hypebol có tiêu cự $2c = 26$ và độ dài trục thực $2a = 24$.

Giải

Ta có: $2c = 26$; $2a = 24$ suy ra $c = 13$, $a = 12$ và $b^2 = c^2 - a^2 = 13^2 - 12^2 = 25$.

Vậy phương trình chính tắc của hypebol là $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = 1$.

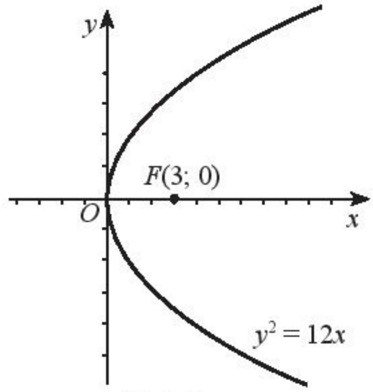
Bài 3. Viết phương trình của parabol (P) có tiêu điểm $F(3; 0)$.

Giải

Parabol (P) có tiêu điểm $F(3; 0)$ nên ta có:

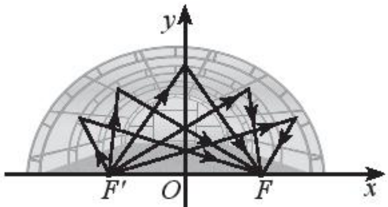
$\frac{p}{2} = 3$, suy ra $p = 6$

Vậy (P) có phương trình $y^2 = 12x$.



Hình 5

Bài 4. Một mái vòm nhà hát có mặt cắt là hình nửa elip. Cho biết khoảng cách giữa hai tiêu điểm là $F'F = 50$ m và chiều dài của đường đi của một tia sáng từ F' đến mái vòm rồi phản chiếu về F là 100 m. Viết phương trình chính tắc của elip đó.



Hình 6

Giải

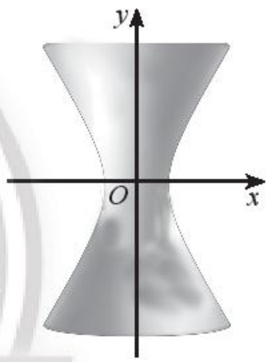
Ta có $F'F = 2c = 50$, suy ra $c = 25$.

Tổng khoảng cách $F'M + FM = 2a = 100$, suy ra $a = 50$.

Ta có $b^2 = a^2 - c^2 = 50^2 - 25^2 = 1\,875$.

Vậy elip có phương trình $\dfrac{x^2}{2500} + \dfrac{y^2}{1875} = 1$.

Bài 5. Một tháp triển lãm có mặt cắt hình hypebol có phương trình $\dfrac{x^2}{18^2} - \dfrac{y^2}{36^2} = 1$. Cho biết chiều cao của tháp là 100 m và khoảng cách từ nóc tháp đến tâm đối xứng của hypebol bằng khoảng cách từ tâm đối xứng đến đáy. Tính bán kính nóc và bán kính đáy của tháp.



Hình 7

Giải

Do tính đối xứng của hypebol nên ta có hai bán kính của nóc và đáy tháp đều bằng r. Do điểm $M(r; 50)$ nằm trên hypebol nên thay toạ độ của điểm M vào phương trình của hypebol ta có:

$$\frac{r^2}{18^2} - \frac{50^2}{36^2} = 1 \Rightarrow r = 18\sqrt{1 + \frac{50^2}{36^2}} \approx 31 \text{ (m)}.$$

Vậy bán kính của nóc và đáy của tháp bằng 31 m.

Bài 6. Cổng chào của một thành phố dạng hình parabol có chiều cao $h = 25$ m và khoảng cách giữa hai chân cổng là $d = 120$ m. Hãy viết phương trình parabol của cổng chào.


Hình 8

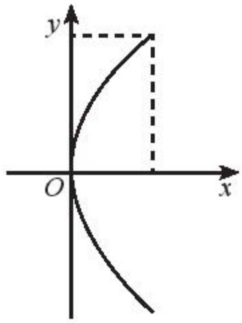
Giải

Ta chọn hệ toạ độ như Hình 9. Gọi parabol có Phương trình của parabol có dạng: $y^2 = 2px$.

Ta có $M(25; 60)$ là toạ độ một điểm tại chân cổng chào.Thay toạ độ điểm M vào phương trình (P) ta có:

$$60^2 = 2p.25 \Rightarrow p = \frac{60^2}{50} = 72.$$

Vậy phương trình của (P) là $y^2 = 144x$.



Hình 9

C. BÀI TẬP

1. Viết phương trình chính tắc của:

a) Elip có trục lớn bằng 12 và trục nhỏ bằng 8;

b) Hypebol có tiêu cự $2c = 18$ và độ dài trục thực $2a = 14$;

c) Parabol có tiêu điểm $F(5; 0)$.

2. Viết phương trình chính tắc của các đường conic dưới đây. Gọi tên và tìm toạ độ các tiêu điểm của chúng.

a) (C_1): $7x^2 + 13y^2 = 1$; b) (C_2): $25x^2 - 9y^2 = 225$; c) (C_3): $x = 2y^2$.

3. Để cắt một bảng hiệu quảng cáo hình elip có trục lớn là 1 m và trục nhỏ là 0,6 m từ một tấm ván ép hình chữ nhật có kích thước 1 m × 0,6 m, người ta vẽ hình elip đó lên tấm ván ép như hướng dẫn sau:

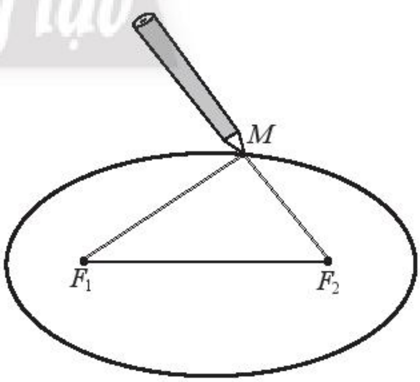
Chuẩn bị:

– Hai cái đinh, một vòng dây kín không đàn hồi, bút chì.

Thực hiện:

– Xác định vị trí (hai tiêu điểm của elip) và ghim hai cái đinh lên hai điểm đó trên tấm ván.

– Quàng vòng dây qua hai chiếc đinh và kéo căng tại một điểm M nào đó. Tựa đầu bút chì vào trong vòng dây tại điểm M rồi di chuyển sao cho dây luôn luôn căng. Đầu bút chì vạch lên tấm bìa một đường mà ta gọi là đường elip. (Xem minh hoạ trong Hình 10).



Hình 10

Phải ghim hai cái đinh cách các mép tấm ván ép bao nhiêu và lấy vòng dây có độ dài là bao nhiêu?

4. Thang leo gợn sóng cho trẻ em trong công viên có hai khung thép cong hình nửa elip cao 100 cm và khoảng cách giữa hai chân là 240 cm.

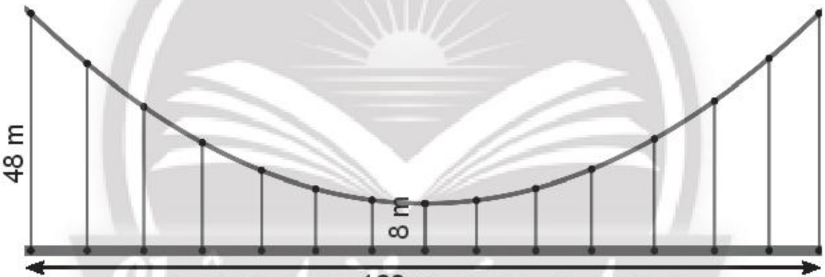
a) Hãy chọn hệ toạ độ thích hợp và viết phương trình chính tắc của elip nói trên.

b) Tính khoảng cách thẳng đứng từ một điểm cách chân khung 20 cm lên đến khung thép.

Hình 11

5. Một tháp làm nguội của một nhà máy có mặt cắt là hình hypebol có phương trình $\frac{x^2}{30^2} - \frac{y^2}{50^2} = 1$. Biết chiều cao của tháp là 120 m và khoảng cách từ nóc tháp đến tâm đối xứng của hypebol bằng $\frac{1}{2}$ khoảng cách từ tâm đối xứng đến đáy. Tính bán kính nóc và bán kính đáy của tháp.

6. Một cái cầu có dây cáp treo hình parabol, cầu dài 120 m và được nâng đỡ bởi những thanh thẳng đứng treo từ cáp xuống, thanh dài nhất là 48 m, thanh ngắn nhất là 8 m (Hình 12). Tính chiều dài của thanh cách điểm giữa cầu 20 m.



Hình 12

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG IX

A. TRẮC NGHIỆM

1. Cho hai vectơ $\vec{a} = (4; 3)$ và $\vec{b} = (1; 7)$. Góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là:

A. 90°; B. 60°; C. 45°; D. 30°.

2. Cho hai điểm $M = (1; -2)$ và $N = (-3; 4)$. Khoảng cách giữa hai điểm M và N là:

A. 4; B. 6; C. $3\sqrt{6}$; D. $2\sqrt{13}$.

3. Tam giác ABC có $A = (-1; 1)$; $B = (1; 3)$ và $C = (1; -1)$.

Trong các phát biểu sau đây, phát biểu nào đúng?

A. ABC là tam giác có ba cạnh bằng nhau;

B. ABC là tam giác có ba góc đều nhọn;

C. ABC là tam giác cân tại B (có $BA = BC$);

D. ABC là tam giác vuông cân tại A.

4. Cho phương trình tham số của đường thẳng d: $\begin{cases} x = 5 + t \\ y = -9 - 2t. \end{cases}$

Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình tổng quát của (d)?

A. $2x + y - 1 = 0$; B. $2x + 3y + 1 = 0$;

C. $x + 2y + 2 = 0$; D. $x + 2y - 2 = 0$.

5. Đường thẳng đi qua điểm $M(1; 0)$ và song song với đường thẳng d: $4x + 2y + 1 = 0$ có phương trình tổng quát là:

A. $4x + 2y + 3 = 0$; B. $2x + y + 4 = 0$;

C. $2x + y - 2 = 0$; D. $x - 2y + 3 = 0$.

6. Bán kính của đường tròn tâm $I(0; -2)$ và tiếp xúc với đường thẳng Δ: $3x - 4y - 23 = 0$ là:

A. 15; B. 5; C. $\dfrac{3}{5}$; D. 3.

7. Cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 + 2x + 4y - 20 = 0$. Trong các mệnh đề sau đây, phát biểu nào **sai**?

A. (C) có tâm $I(1; 2)$; B. (C) có bán kính $R = 5$;

C. (C) đi qua điểm $M(2; 2)$; D. (C) không đi qua điểm $A(1; 1)$.

8. Phương trình tiếp tuyến tại điểm $M(3; 4)$ với đường tròn (C):
$x^2 + y^2 - 2x - 4y - 3 = 0$ là:

A. $x + y - 7 = 0$; B. $x + y + 7 = 0$;

C. $x - y - 7 = 0$; D. $x + y - 3 = 0$.

9. Phương trình chính tắc của elip có hai đỉnh là $(-3; 0)$, $(3; 0)$ và hai tiêu điểm là $(-1; 0)$, $(1; 0)$ là:

A. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{1}=1$; B. $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{9}=1$;

C. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1$; D. $\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{9}=1$.

10. Phương trình chính tắc của hypebol có hai đỉnh là $(-4; 0)$, $(4; 0)$ và hai tiêu điểm là $(-5; 0)$, $(5; 0)$ là:

A. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{25}=1$; B. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$;

C. $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9}=1$; D. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1$.

11. Phương trình chính tắc của parabol có tiêu điểm $(2; 0)$ là:

A. $y^2 = 8x$; B. $y^2 = 4x$; C. $y^2 = 2x$; D. $y = 2x^2$.

12. Elip với độ dài hai trục là 20 và 12 có phương trình chính tắc là:

A. $\frac{x^2}{40}+\frac{y^2}{12}=1$; B. $\frac{x^2}{1600}+\frac{y^2}{144}=1$;

C. $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$; D. $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{36}=1$.

B. TỰ LUẬN

1. Trong mặt phẳng Oxy cho ba điểm $A(2; 2)$, $B(1; 3)$, $C(-1; 1)$.

a) Chứng minh $OABC$ là một hình chữ nhật;

b) Tìm toạ độ tâm I của hình chữ nhật $OABC$.

2. Tìm góc giữa hai đường thẳng d_1 và d_2.

a) $d_1 : 5x - 9y + 2\,019 = 0$ và $d_2 : 9x + 5y + 2\,020 = 0$;

b) $d_1: \begin{cases} x = 9 + 9t \\ y = 7 + 18t \end{cases}$ và $d_2 : 4x - 12y + 13 = 0$;

c) $d_1: \begin{cases} x = 11 - 5t \\ y = 13 + 9t \end{cases}$ và $d_2 : \begin{cases} x = 13 + 10t' \\ y = 11 - 18t'. \end{cases}$

3. Cho tam giác ABC với toạ độ ba đỉnh là $A(1; 1)$; $B(3; 1)$; $C(1; 3)$.
Tính độ dài đường cao AH.

4. Tính bán kính của đường tròn tâm $J(1; 0)$ và tiếp xúc với đường thẳng
d: $8x - 6y + 22 = 0$.

5. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng:
Δ: $ax + by + c = 0$ và Δ': $ax + by + d = 0$ (biết Δ // Δ').

6. Tìm tâm và bán kính của các đường tròn có phương trình:

a) $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 225$;

b) $x^2 + (y - 7)^2 = 5$;

c) $x^2 + y^2 - 10x - 24y = 0$.

7. Lập phương trình đường tròn trong các trường hợp sau:

a) Có tâm $I(2; 2)$ và bán kính bằng 7;

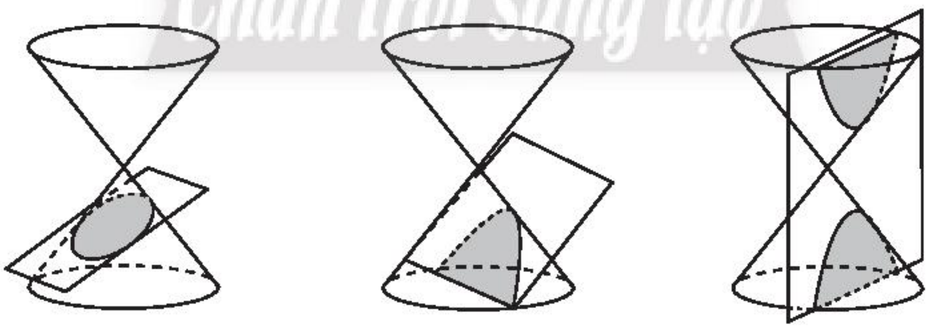
b) Có tâm $J(0; -3)$ và đi qua điểm $M(-2; -7)$;

c) Đi qua hai điểm $A(2; 2)$, $B(6; 2)$ và có tâm nằm trên đường thẳng $x - y = 0$;

d) Đi qua gốc toạ độ và cắt hai trục toạ độ tại các điểm có hoành độ là 8, tung độ là 6.

8. Viết phương trình tiếp tuyến với đường tròn (C): $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 25$ tại điểm $A(4; 5)$.

9. Gọi tên các đường conic sau:



a) b) c)

10. Tìm toạ độ các tiêu điểm, toạ độ các đỉnh, độ dài trục lớn và trục nhỏ của các elip sau:

a) $\dfrac{x^2}{169} + \dfrac{y^2}{25} = 1$; b) $x^2 + 4y^2 = 1$.

11. Viết phương trình chính tắc của elip thoả mãn các điều kiện sau:

a) Độ dài trục lớn 26, độ dài trục nhỏ 10;

b) Độ dài trục lớn 10, tiêu cự 6.

12. Tìm toạ độ các tiêu điểm, toạ độ các đỉnh, độ dài trục thực và trục ảo của các hypebol sau:

a) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{144} = 1$; b) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

13. Viết phương trình chính tắc của hypebol thoả mãn các điều kiện sau:

a) Đỉnh (–6; 0) và (6; 0); tiêu điểm (–10; 0) và (10; 0);

b) Độ dài trục thực là 10, độ dài trục ảo là 20.

14. Tìm toạ độ tiêu điểm, phương trình đường chuẩn của các parabol sau:

a) $y^2 = 4x$; b) $y^2 = 2x$; c) $y^2 = -6x$.

15. Viết phương trình chính tắc của parabol thoả mãn các điều kiện:

a) Tiêu điểm (8; 0);

b) Khoảng cách từ tiêu điểm đến đường chuẩn bằng 4.

16. Một nhà mái vòm có mặt cắt hình nửa elip cao 6 m rộng 16 m.

a) Hãy chọn hệ toạ độ thích hợp và viết phương trình của elip nói trên;

b) Tính khoảng cách thẳng đứng từ một điểm cách chân vách 4 m lên đến mái vòm.

17. Cho biết Mặt Trăng chuyển động quanh Trái Đất theo quỹ đạo là elip (E) với Trái Đất là một tiêu điểm. Cho biết độ dài hai trục của (E) là 768 800 km và 767 619 km. Viết phương trình chính tắc của elip (E).

18. Gương phản chiếu của một đèn pha có mặt cắt là một parabol (P) với tim bóng đèn đặt ở tiêu điểm F. Chiều rộng giữa hai mép gương là 50 cm, chiều sâu của gương là 40 cm. Viết phương trình chính tắc của (P).

19. Màn hình của rađa tại trạm điều khiển không lưu được thiết lập hệ toạ độ Oxy với vị trí trạm có toạ độ $O(0; 0)$ và rađa có bán kính hoạt động là 600 km. Một máy bay khởi hành từ sân bay lúc 8 giờ. Cho biết sau t giờ máy bay có toạ độ:

$$\begin{cases} x = 1 + 180t \\ y = 1 - 180t. \end{cases}$$

a) Tìm toạ độ máy bay lúc 9 giờ;

b) Tính khoảng cách giữa máy bay và trạm điều khiển không lưu;

c) Lúc mấy giờ máy bay ra khỏi tầm hoạt động của rađa?

LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài 1. TOẠ ĐỘ CỦA VECTƠ

1. a) Ta có:

$2\vec{a}+3\vec{b}=(2\,.\,1+3\,.\,3;\,2\,.\,2+3\,.\,0)=(11;\,4)$.

b) Ta có:

$\vec{a}\,.\,\vec{b}=1\,.\,3+2\,.\,0=3$;

$3\vec{a}=(3;\,6)$ và $2\vec{b}=(6;\,0)$ nên $(3\vec{a}).(2\vec{b})=3\,.\,6+6\,.\,0=18$.

2. a) Ta có: $\vec{m}+2\vec{n}-3\vec{p}=(1+2\,.\,2-3\,(-1);\,1+2\,.\,2-3\,(-1))=(8;\,8)$.

b) Ta có $(\vec{p}\,.\,\vec{n})\vec{m}=[-1\,.\,2+(-1)\,.\,2]\vec{m}=-4\vec{m}=(-4;\,-4)$.

3. a) Ta có: $x_E=\dfrac{x_M+x_N}{2}=\dfrac{3+7}{2}=5$, $y_E=\dfrac{y_M+y_N}{2}=\dfrac{3+3}{2}=3$.

Vậy $E(5;\,3)$.

b) Ta có:

$$x_G=\frac{x_M+x_N+x_P}{3}=\frac{3+7+3}{3}=\frac{13}{3},\ y_G=\frac{y_M+y_N+y_P}{3}=\frac{3+3+7}{3}=\frac{13}{3}.$$

Vậy $G\left(\dfrac{13}{3};\dfrac{13}{3}\right)$.

4. a) Ta có $\overrightarrow{BA}=(-2;\,2)$; $\overrightarrow{BC}=(3;\,3)$; $\overrightarrow{AC}=(5;\,1)$;

$AB=2\sqrt{2}$; $BC=3\sqrt{2}$; $AC=\sqrt{26}$;

$\overrightarrow{BA}\,.\,\overrightarrow{BC}=-6+6=0\Rightarrow\widehat{ABC}=90^\circ$.

b) Tâm I đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là trung điểm AC.

Vậy ta có $I\left(\dfrac{7}{2};\dfrac{7}{2}\right)$.

5. a) A thuộc trục hoành;

b) B thuộc trục tung;

c) C, D thuộc đường phân giác của góc phần tư thứ nhất.

6. a) Điểm $H(4;\,0)$ là hình chiếu vuông góc của điểm M trên trục Ox;

b) Điểm $M'(4;\,-5)$ đối xứng với M qua trục Ox;

c) Điểm $K(0; 5)$ là hình chiếu vuông góc của điểm M trên trục Oy;

d) Điểm $M''(-4; 5)$ đối xứng với M qua trục Oy;

e) Điểm $C(-4; -5)$ đối xứng với M qua gốc O.

7. a) $ABCD$ là hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Đặt toạ độ của $D(x_D; y_D)$, ta có $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} 2-1 = 4 - x_D \\ 4-1 = 4 - y_D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 3 \\ y_D = 1. \end{cases}$

Vậy $D(3; 1)$.

b) Gọi M là giao điểm hai đường chéo của hình bình hành $ABCD$.

Ta có M là trung điểm AC, suy ra $M(2,5; 2,5)$.

8. a) Ta có $\overrightarrow{AC} = (3;6)$; $\overrightarrow{AM} = (1;2)$; $\overrightarrow{AN} = (2;4)$;

$\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AM} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{AN}$, suy ra bốn điểm A, M, N, C thẳng hàng.

b) Gọi G và G' lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC và MNB, ta có:

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} = \dfrac{1+7+4}{3} = 4 \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} = \dfrac{1+3+7}{3} = \dfrac{11}{3} \end{cases} \text{ và } \begin{cases} x_{G'} = \dfrac{x_M + x_N + x_B}{3} = \dfrac{2+3+7}{3} = 4 \\ y_{G'} = \dfrac{y_M + y_N + y_B}{3} = \dfrac{3+5+3}{3} = \dfrac{11}{3}. \end{cases}$$

Suy ra G và G' trùng nhau.

9. $\overrightarrow{MN} = (1;7)$; $\overrightarrow{QP} = (1;7)$; $\overrightarrow{NP} = (-7;1)$; suy ra

$$\begin{cases} \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP} = (1;7) \\ \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{NP} = 1.(-7) + 7.1 = 0 \Rightarrow MN \perp NP \\ MN = NP = \sqrt{50}. \end{cases}$$

Tứ giác $MNPQ$ có hai cạnh đối song song và bằng nhau, có một góc vuông và hai cạnh liên tiếp bằng nhau suy ra $MNPQ$ là hình vuông.

10. a) $\cos(\vec{a},\vec{b}) = \dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|} = \dfrac{1\,.\,5 + (-4)\,.\,3}{\sqrt{1+(-4)^2}\,.\,\sqrt{5^2+3^2}} = \dfrac{-7\sqrt{2}}{34}$.

$\Rightarrow (\vec{a},\vec{b}) \approx 106^\circ 56'$.

b) $\cos(\vec{a},\vec{b}) = \dfrac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|} = \dfrac{4\,.\,6 + 3\,.\,0}{\sqrt{4^2+3^2}\,.\,\sqrt{6^2+0^2}} = \dfrac{4}{5} \Rightarrow (\vec{a},\vec{b}) \approx 36^\circ 52'$.

c) $\vec{a}\,.\,\vec{b} = 2(-3) + 2\sqrt{3}\,.\,\sqrt{3} = 6 - 6 = 0$

$\Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 90^{\circ}$.

11. Gọi $C(x; 3)$.

Vì B là điểm đối xứng với điểm A qua gốc toạ độ O nên $B(-1; -4)$.

$\overrightarrow{CA} = (1 - x; 1)$; $\overrightarrow{CB} = (-1 - x; -7)$.

Tam giác ABC vuông tại C nên ta có:

$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = 0 \Leftrightarrow (1 - x)(-1 - x) - 7 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 = 8 \Leftrightarrow x = 2\sqrt{2}$ hoặc $x = -2\sqrt{2}$.

Vậy $C\left(2\sqrt{2}; 3\right)$ hoặc $C\left(-2\sqrt{2}; 3\right)$.

12. Ta có $|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$.

Đặt $\vec{e} = \dfrac{1}{|\vec{a}|}\vec{a} = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}; \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Ta có $\vec{e}$ là vectơ đơn vị cùng hướng với vectơ $\vec{a}$.

Bài 2. ĐƯỜNG THẲNG TRONG MẶT PHẲNG TOẠ ĐỘ

1. a) $a = 2, b = -1, c = 3$;

b) $a = 1, b = 1, c = -1$;

c) $a = 0, b = 1, c = -3$;

d) $a = 1, b = 0, c = 2$.

2. a) Phương trình tham số của d là: $\begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = 2 + 7t. \end{cases}$

Phương trình tổng quát của d là: $7x - 4y - 6 = 0$.

b) Vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (-5; 3) \Rightarrow$ vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (3; 5)$.

Phương trình tham số của d là: $\begin{cases} x = 3t \\ y = 1 + 5t. \end{cases}$

Phương trình tổng quát của d là: $5x - 3y + 3 = 0$.

c) Phương trình tổng quát của d là: $y + 3 = 3(x + 2) \Leftrightarrow 3x - y + 3 = 0$.

Phương trình tham số của d là: $\begin{cases} x = t \\ y = 3 + 3t. \end{cases}$

d) Vectơ chỉ phương là $\vec{u} = \overrightarrow{PQ} = (2; 3) \Rightarrow$ vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (3; -2)$.

Phương trình tổng quát của d là: $3 . (x - 1) - 2 . (y - 1) = 0 \Leftrightarrow 3x - 2y - 1 = 0$.

Phương trình tham số của d là: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + 3t. \end{cases}$

3. a) $\vec{u}_1 = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(4; 2) = (2; 1) \Rightarrow \vec{n}_1 = (1; -2)$.

Phương trình tổng quát của BC là:

$1 . (x - 0) - 2 . (y - 1) = 0 \Leftrightarrow x - 2y + 2 = 0$.

b) M là trung điểm của BC, ta có: $\begin{cases} x_M = \dfrac{x_B + x_C}{2} = 2 \\ y_M = \dfrac{y_B + y_C}{2} = 2. \end{cases}$

Suy ra $M(2; 2)$.

$\vec{u}_2 = \overrightarrow{AM} = (1; -2) \Rightarrow \vec{n}_2 = (2; 1)$.

Phương trình tổng quát của AM là: $2 . (x - 1) + 1 . (y - 4) = 0 \Leftrightarrow 2x + y - 6 = 0$.

c) AH là đường cao của $\Delta ABC \Rightarrow AH \perp BC$.

$\vec{n}_3 = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(4; 2) = (2; 1)$.

Phương trình tổng quát của AH là: $2 . (x - 1) + 1 . (y - 4) = 0 \Leftrightarrow 2x + y - 6 = 0$.

4. a) Δ song song với đường thẳng $x + 2y - 2\,022 = 0$ nên có vectơ pháp tuyến có toạ độ là $(1; 2)$. Phương trình Δ là $(x - 3) + 2(y - 3) = 0$ hay $x + 2y - 9 = 0$.

b) Δ vuông góc với đường thẳng $3x + 2y + 99 = 0$ nên có vectơ pháp tuyến có toạ độ là $(2; -3)$. Phương trình Δ là $2(x - 2) - 3(y + 1) = 0$ hay $2x - 3y - 7 = 0$.

5. a) d_1 và d_2 cắt nhau. b) d_1 và d_2 song song. c) d_1 và d_2 trùng nhau.

6. Thay $x = 1 + t$ và $y = 2 + 2t$ vào phương trình Δ ta được $1 + t + 2 + 2t - 2 = 0$.

Suy ra $t = -\frac{1}{3}$.

Vậy giao điểm của d với đường thẳng Δ là $M\left(\frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right)$.

7. a) $d_1 // d_2 \Rightarrow (d_1, d_2) = 0°$;

b) $d_1 \perp d_2 \Rightarrow (d_1, d_2) = 90°$;

c) $\cos(d_1, d_2) = \dfrac{\left|2.6+(-4).(-2)\right|}{\sqrt{2^2+(-4)^2}.\sqrt{6^2+(-2)^2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow (d_1, d_2) = 45°$.

8. a) $d(M, \Delta) = \dfrac{|8\,.\,2-6\,.\,3+7|}{\sqrt{8^2+(-6)^2}} = \dfrac{5}{10} = \dfrac{1}{2}$;

b) $d(M, \Delta) = \dfrac{|4.0+9.1-20|}{\sqrt{4^2+9^2}} = \dfrac{11}{\sqrt{97}}$;

c) $d(M, \Delta) = \dfrac{|0\,.\,1+3\,.\,1-5|}{\sqrt{0^2+3^2}} = \dfrac{2}{3}$;

d) $d(M, \Delta) = \dfrac{|1\,.\,4+0\,.\,9-25|}{\sqrt{1^2+0^2}} = 21$.

9. Ta có $d(J, \Delta) = R \Leftrightarrow \dfrac{|4\,.\,1-3\,.\,2+c|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}} = 3 \Leftrightarrow \dfrac{|c-2|}{5} = 3 \Leftrightarrow c = 17$ hoặc $c = -13$.

10. Ta thấyΔ và Δ' là hai đường thẳng song song.

Lấy điểm $M(0; \dfrac{11}{8})$ trên Δ, ta có: $d(\Delta, \Delta') = d(M, \Delta') = \dfrac{\left|6\,.\,0+8\,.\left(\dfrac{11}{8}\right)-1\right|}{\sqrt{6^2+8^2}} = 1$.

11. Khoảng cách ngắn nhất giữa người đó và trạm viễn thông S chính là khoảng cách từ S đến đường thẳng Δ. Ta có:

$$d(S, \Delta) = \frac{|12.5+5.1-20|}{\sqrt{12^2+5^2}} = \frac{45}{13} \approx 3{,}46 \text{ (km)}.$$

Bài 3. ĐƯỜNG TRÒN TRONG MẶT PHẲNG TOẠ ĐỘ

1. a) $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 9 = 0$ (1).

Phương trình (1) có dạng $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$.

với $a = -1$; $b = -1$; $c = -9$.

Ta có $a^2 + b^2 - c = 1 + 1 + 9 = 11 > 0$.

Vậy (1) là phương trình đường tròn tâm $I(-1; -1)$, bán kính $R = \sqrt{11}$.

b) $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 1 = 0$ (2).

Phương trình (2) có dạng $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$.

với $a = 3$; $b = 1$; $c = 1$.

Ta có $a^2 + b^2 - c = 9 + 1 - 1 = 9 > 0$

Vậy (2) là phương trình đường tròn tâm $I(3; 1)$ bán kính $R = 3$.

c) $x^2 + y^2 + 8x + 4y + 2022 = 0$ (3).

Phương trình (3) có dạng $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$.

với $a = -4$; $b = -2$; $c = 2022$.

Ta có $a^2 + b^2 - c = 16 + 4 - 2022 < 0$

Vậy (3) không phải là phương trình đường tròn.

d) $3x^2 + 2y^2 + 5x + 7y - 1 = 0$ (4).

Phương trình (4) không thể đưa về dạng $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$.

Vậy (4) không phải là phương trình đường tròn.

2. a) (C) có tâm $O(0; 0)$ và có bán kính $r = 9$ nên có phương trình: $x^2 + y^2 = 81$.

b) (C) có tâm $I(2; 3)$ là trung điểm của AB và có bán kính $R = IA = \sqrt{5}$ nên có phương trình:

$$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 5.$$

c) (C) có tâm $M(2; 3)$ và tiếp xúc với đường thẳng d: $3x - 4y + 9 = 0$ suy ra

(C) có bán kính $R = d(M, d) = \dfrac{|3 \,.\, 2 - 4 \,.\, 3 + 9|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \dfrac{3}{5}$.

Vậy (C) có phương trình: $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = \dfrac{9}{25}$.

d) (C) có tâm $I(3; 2)$ và đi qua điểm $B(7; 4)$ suy ra (C) có bán kính

$$R = IB = \sqrt{16+4} = 2\sqrt{5}.$$

Vậy (C) có phương trình: $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 20$.

3. a) Phương trình đường tròn cần tìm là: $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 5$.

b) Phương trình đường tròn cần tìm là: $(x-8)^2 + (y-6)^2 = 100$.

4. Gọi đường tròn là (C) có tâm $I(a; b)$ và bán kính R

(C) tiếp xúc với Ox, Oy và đi qua điểm $A(2; 1)$ suy ra $a > 0$, $b > 0$ và $R = a = b$.

$A \in (C) \Rightarrow IA = R \Rightarrow IA^2 = R^2 \Rightarrow (2-a)^2 + (1-a)^2 = a^2$.

Suy ra $a^2 - 6a + 5 = 0$ hay $a = 1$; $a = 5$.

Vậy phương trình đường tròn là:

$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ hoặc $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 25$.

5. a) Ta có: $0^2 + 5^2 - 6 \,.\, 0 - 2 \,.\, 5 - 15 = 0$.

Suy ra toạ độ điểm $A(0; 5)$ thoả mãn phương trình đường tròn (C).

Vậy điểm $A(0; 5)$ thuộc đường tròn (C).

b) (C) có tâm $I(3; 1)$ và bán kính $R = 5$.

Phương trình tiếp tuyến với (C) tại điểm $A(0; 5)$ là

$$(3-0)(x-0) + (1-5)(y-5) = 0 \text{ hay } 3x - 4y + 20 = 0.$$

c) Phương trình tiếp tuyến d với (C) song song với đường thẳng $8x + 6y + 99 = 0$ có dạng $8x + 6y + c = 0$.

Ta có: $d(I, d) = R \Leftrightarrow \dfrac{|8 \,.\, 3 + 6 \,.\, 1 + c|}{\sqrt{8^2 + 6^2}} = 5$

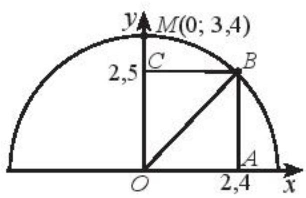
$$\Leftrightarrow |30 + c| = 50 \Leftrightarrow c = 20 \text{ hay } c = -80.$$

Vậy d có phương trình $4x + 3y + 10 = 0$ hoặc $4x + 3y - 40 = 0$.

6. a) Chọn hệ toạ độ sao cho tâm của cái cổng hình bán nguyệt có toạ độ $(0; 0)$ và đỉnh của cổng có toạ độ $M(0; 3{,}4)$.

Ta có phương trình mô phỏng của cổng là:

$$x^2 + y^2 = 3{,}4^2 \; (y > 0).$$



Hình 1

b) Gọi $OABC$ là thiết diện của xe tải (Hình 1).

Ta có: $OB = \sqrt{OA^2 + OC^2} = \sqrt{2{,}4^2 + 2{,}5^2} \approx 3{,}5$ (m) $> R = 3{,}4$ (m).

Vậy nếu đi đúng làn đường quy định thì xe tải không thể đi qua cổng.

Bài 4. BA ĐƯỜNG CONIC TRONG MẶT PHẲNG TOẠ ĐỘ

1. a) (E): $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1$; b) (H): $\frac{x^2}{49}-\frac{y^2}{32}=1$; c) (P): $y^2 = 20x$.

2. a) (C_1): $7x^2 + 13y^2 = 1$

$\Leftrightarrow \frac{x^2}{\frac{1}{7}}+\frac{y^2}{\frac{1}{13}}=1$.

$c^2 = a^2 - b^2 = \frac{1}{7}-\frac{1}{13}=\frac{6}{91}$.

Suy ra $c=\sqrt{\frac{6}{91}}$

(C_1) là elip có hai tiêu điểm là: $F_1\left(-\sqrt{\frac{6}{91}};0\right)$ và $F_2\left(\sqrt{\frac{6}{91}};0\right)$.

b) (C_2): $25x^2 - 9y^2 = 225$

$\Leftrightarrow \frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{25}=1$.

$c^2 = a^2 + b^2 = 9 + 25 = 34$.

Suy ra $c=\sqrt{34}$.

(C_2) là hypebol có hai tiêu điểm là: $F_1\left(-\sqrt{34};0\right)$ và $F_2\left(\sqrt{34};0\right)$.

c) (C_3): $x = 2y^2$

$\Leftrightarrow y^2=\frac{1}{2}x$. Suy ra $p=\frac{1}{4}$.

(C_3) là parabol có tiêu điểm $F\left(\frac{1}{8};0\right)$.

3. Ta có $2a = 1$ m $= 100$ cm; $2b = 0{,}6$ m $= 60$ cm.

Suy ra $c^2 = a^2 - b^2 = 50^2 - 30^2 = 1\,600 \Rightarrow c = 40$.

Ta có $a - c = 10$ (cm) và $2a + 2c = 180$ (cm).

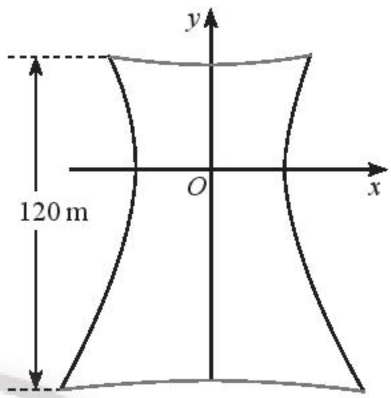
Vậy phải ghim hai cái đinh cách các mép tấm ván ép 10 cm và lấy vòng dây có độ dài là 180 cm hay 1,8 m.

4. a) Phương trình chính tắc của elip là $\frac{x^2}{120^2}+\frac{y^2}{100^2}=1$.

b) Thay $x = 120 - 20 = 100$ vào phương trình elip ta có :

$$\frac{100^2}{120^2}+\frac{y^2}{100^2}=1 \Rightarrow y^2=100^2(1-\frac{100^2}{120^2}) \Rightarrow y \approx 55 \text{ (cm)}.$$

5. Gọi r và R lần lượt là bán kính nóc và bán kính đáy của tháp. Ta tính được khoảng cách từ nóc tháp đến tâm đối xứng của hypebol bằng 40 m và khoảng cách từ tâm đối xứng đến đáy bằng 80 m.



Hình 1

Thay toạ độ 2 điểm $M(R; -80)$ và $N(r; 40)$ vào phương trình hypebol ta tính được:

$$R = 30\sqrt{1+\frac{(-80)^2}{50^2}} \approx 57 \text{ (m)};\ r = 30\sqrt{1+\frac{40^2}{50^2}} \approx 38 \text{ (m)}.$$

6. Ta chọn hệ toạ độ sao cho parabol có phương trình: $y^2 = 2px$ (1).

Thay toạ độ điểm $M(40; 60)$ vào phương trình (1) ta tính được $p=\frac{60^2}{80}=45$.

Thay toạ độ điểm $N(x; 20)$ vào phương trình $y^2 = 2 . 45 . x$ ta tính được

$x=\frac{20^2}{90}\approx 4{,}44$ m.

Vậy chiều dài của thanh cách điểm giữa cầu 20 m là khoảng 12,44 m.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG IX

A. TRẮC NGHIỆM

1. C	**2.** D	**3.** D	**4.** A	**5.** C	**6.** D	**7.** A	**8.** A	**9.** C	**10.** B	**11.** A	**12.** C

B. TỰ LUẬN

1. a) Ta có: $\overrightarrow{OA}=(2;2)$; $\overrightarrow{CB}=(2;2)$; $\overrightarrow{OC}=(-1;1)$; $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{CB}$; $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC}=0$.

Suy ra $OABC$ là một hình chữ nhật.

b) Tâm I là trung điểm OB, ta có $I\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$.

2. a) $(d_1, d_2) = 90°$.

b) $(d_1, d_2) = 45°$.

c) $(d_1, d_2) = 0°$.

3. Phương trình tổng quát CB: $x + y - 4 = 0$

$AH = d(A, BC) = \frac{|1\,.\,1+1\,.\,1-4|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.

4. $R = d(J, d) = \frac{|8\,.\,1-6\,.\,0+22|}{\sqrt{8^2+6^2}} = 3$.

5. $d(\Delta, \Delta') = \frac{|d-c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

6. a) $I(-1; -2)$; $R = 15$

b) $I(0; 7)$; $R = \sqrt{5}$

c) $I(5; 12)$; $R = 13$.

7. a) Phương trình đường tròn là: $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 49$.

b) Phương trình đường tròn là: $x^2 + (y+3)^2 = 20$.

c) Phương trình đường tròn là $(x-4)^2 + (y-4)^2 = 8$.

d) Phương trình đường tròn là: $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 25$.

8. $(1-4)(x-4) + (1-5)(y-5) = 0$ hay $3x + 4y - 32 = 0$.

9. a) Elip; b) Parabol; c) Hypebol.

10. a) (E): $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{25}=1$ có $a = 13$; $b = 5 \Rightarrow c=\sqrt{a^2-b^2}=12$.

Các tiêu điểm $F_1(-12; 0)$; $F_2(12; 0)$.

Các đỉnh $A_1(-13; 0)$; $A_2(13; 0)$; $B_1(0; -5)$; $B_2(0; 5)$.

Độ dài trục lớn $A_1A_2 = 26$.

Độ dài trục nhỏ $B_1B_2 = 10$.

b) $x^2 + 4y^2 = 1$. Suy ra (*E*): $\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{\frac{1}{4}}=1$ có $a = 1$; $b = \frac{1}{2} \Rightarrow c = \sqrt{a^2-b^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Các tiêu điểm $F_1\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$; $F_2\left(\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$.

Các đỉnh $A_1(-1; 0)$; $A_2(1; 0)$; $B_1\left(0;-\frac{1}{2}\right)$; $B_2\left(0;\frac{1}{2}\right)$.

Độ dài trục lớn $A_1A_2 = 2$.

Độ dài trục nhỏ $B_1B_2 = 1$.

11. a) $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{25}=1$; b) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$.

12. a) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{144}=1$ có $a = 5$; $b = 12 \Rightarrow c = \sqrt{a^2+b^2} = 13$.

Các tiêu điểm $F_1(-13; 0)$; $F_2(13; 0)$.

Các đỉnh $A_1(-5; 0)$; $A_2(5; 0)$.

Độ dài trục thực $2a = 10$.

Độ dài trục ảo $2b = 24$.

b) (*H*): $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ có $a = 4$; $b = 3 \Rightarrow c = \sqrt{a^2+b^2} = 5$.

Các tiêu điểm $F_1(-5; 0)$; $F_2(5; 0)$.

Các đỉnh $A_1(-4; 0)$; $A_2(4; 0)$.

Độ dài trục thực $2a = 8$.

Độ dài trục ảo $2b = 6$.

13. a) Đỉnh $(-6; 0)$ và $(6; 0)$; tiêu điểm $(-10; 0)$ và $(10; 0)$.

$\Rightarrow a = 6$; $c = 10$ và $b = \sqrt{c^2-a^2} = 8$.

Phương trình hypebol là $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{64}=1$.

b) Độ dài trục thực là 10, độ dài trục ảo 20 suy ra

$2a = 10 \Rightarrow a = 5$, $2b = 20 \Rightarrow b = 10$.

Phương trình hypebol là $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{100} = 1$.

14. a) $y^2 = 4x$ suy ra $2p = 4 \Rightarrow p = 2$.

Tiêu điểm $F(1; 0)$.

Phương trình đường chuẩn: $x + 1 = 0$.

b) $y^2 = 2x$ suy ra $2p = 2 \Rightarrow p = 1$.

Tiêu điểm $F\left(\frac{1}{2}; 0\right)$.

Phương trình đường chuẩn: $y + \frac{1}{2} = 0$.

c) $y^2 = -6x$ suy ra $2p = -6 \Rightarrow p = -3$.

Tiêu điểm $F\left(-\frac{3}{2}; 0\right)$.

Phương trình đường chuẩn: $x - \frac{3}{2} = 0$.

15. a) $y^2 = 32x$; b) $y^2 = 8x$.

16. a) Chọn hệ trục toạ độ có tâm là điểm chính giữa của chiều rộng mái vòm. Ta có: $a = 8$; $b = 6$.

Phương trình elip: $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{36} = 1$.

b) Thay toạ độ điểm $M(4; y)$, $y \geq 0$ vào phương trình elip ta tính được:

$\frac{16}{64} + \frac{y^2}{36} = 1$

nên $y = \frac{6}{8}\sqrt{64 - 16} \approx 5{,}2$ (m).

Vậy khoảng cách thẳng đứng từ điểm M lên đến mái vòm là 5,2 m.

17. Ta có $2a = 768\,800$; $2b = 767\,619 \Rightarrow a = 384\,400$, $b \approx 383810$.

(E) có phương trình $\frac{x^2}{384\,400^2} + \frac{y^2}{383810^2} = 1$.

18. Phương trình (P) có dạng $y^2 = 2px$. (1).

Thay điểm $M(40; 25)$ vào phương trình (1) ta được : $p = \dfrac{y^2}{2x} = \dfrac{25^2}{2.40} \approx 7,8$.

(P) có phương trình $y^2 = 15,6x$.

19. a) Toạ độ máy bay lúc 9 giờ là $(181; -179)$.

b) $OM = \sqrt{181^2 + 179^2} \approx 255$ (km).

c) Ta có $600^2 = (1 + 180t)^2 + (1 - 180t)^2$

$t = \sqrt{\dfrac{600^2 - 2}{2.180^2}} \approx 2,36$ (giờ).

2,36 giờ = 2 giờ 22 phút.

Vậy máy bay ra khỏi tầm hoạt động của rađa từ lúc 10 giờ 22 phút.

Phần THỐNG KÊ VÀ XÁC SUẤT

Chương X. XÁC SUẤT

Bài 1. KHÔNG GIAN MẪU VÀ BIẾN CỐ

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Phép thử ngẫu nhiên và không gian mẫu

Phép thử ngẫu nhiên (gọi tắt là phép thử) là một hoạt động mà ta không thể biết trước được kết quả của nó.

Tập hợp tất cả các kết quả có thể có của phép thử ngẫu nhiên được gọi là ***không gian mẫu***, kí hiệu là Ω.

Chú ý: Trong chương này ta chỉ xét các phép thử mà không gian mẫu gồm hữu hạn phần tử.

2. Biến cố

Mỗi tập con của không gian mẫu được gọi là một ***biến cố***, kí hiệu là $A, B, C, \ldots$

Một kết quả thuộc A được gọi là kết quả làm cho A xảy ra hoặc ***kết quả thuận lợi*** cho A.

Biến cố chắc chắn là biến cố luôn xảy ra, kí hiệu là Ω.

Biến cố không thể là biến cố không bao giờ xảy ra, kí hiệu là $\varnothing$.

B. BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Minh muốn gọi điện cho Ngọc nhưng Minh quên mất chữ số cuối cùng của số điện thoại. Minh chọn ngẫu nhiên một chữ số cho chữ số cuối cùng để gọi thử.

a) Mô tả không gian mẫu của phép thử.

b) Gọi A là biến cố chữ số Minh chọn là số chia hết cho 3. Viết tập hợp mô tả biến cố A.

c) Gọi B là biến cố chữ số Minh chọn là hợp số. Hỏi có bao nhiêu kết quả thuận lợi cho biến cố B?

Giải

a) Không gian mẫu của phép thử $\Omega = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$.

b) Tập hợp mô tả biến cố A là: $A = \{0; 3; 6; 9\}$.

c) $B = \{4; 6; 8; 9\}$. Có 4 kết quả thuận lợi cho biến cố B.

Bài 2. Một hộp kín chứa 4 tấm thẻ có kích thước giống nhau. Mỗi thẻ được ghi một trong các chữ cái A, B, C, D; hai thẻ khác nhau được ghi hai chữ khác nhau. Mô tả không gian mẫu của các phép thử sau:

a) Lấy ra ngẫu nhiên lần lượt, không hoàn lại hai thẻ từ hộp.

b) Lấy ra ngẫu nhiên đồng thời hai thẻ từ hộp.

Giải

a) Không gian mẫu $\Omega = \{AB; AC; AD; BA; BC; BD; CA; CB; CD; DA; DB; DC\}$. Trong đó ta kí hiệu AB là kết quả lần thứ nhất lấy được thẻ ghi chữ A, lần thứ hai lấy được thẻ ghi chữ B; …

b) Không gian mẫu $\Omega = \{\{A; B\}; \{A; C\}; \{A; D\}; \{B; C\}; \{B; D\}; \{C; D\}\}$. Trong đó ta kí hiệu $\{A; B\}$ là kết quả lấy được 1 thẻ ghi chữ A và 1 thẻ ghi chữ B.

Bài 3. Hộp thứ nhất chứa 4 quả bóng được đánh số từ 1 đến 4. Hộp thứ hai chứa 5 quả bóng được đánh số từ 1 đến 5. Chọn ngẫu nhiên từ mỗi hộp 1 quả bóng.

a) Mô tả không gian mẫu của phép thử.

b) Viết tập hợp mô tả cho biến cố "Tổng các số ghi trên hai quả bóng lớn hơn 7".

c) Có bao nhiêu kết quả thuận lợi cho biến cố "Tổng các số ghi trên hai quả bóng không vượt quá 7"?

Giải

a) Không gian mẫu $\Omega = \{(i; j) \mid 1 \le i \le 4, 1 \le j \le 5\}$. Trong đó $(i; j)$ kí hiệu kết quả lấy được bóng ghi số i ở hộp thứ nhất và quả bóng ghi số j ở hộp thứ hai.

b) Tập hợp mô tả cho biến cố "Tổng các số ghi trên hai quả bóng lớn hơn 7" là

$$\{(3; 5); (4; 4); (4; 5)\}.$$

c) Tổng số các kết quả có thể xảy ra khi chọn bóng là $4 \,.\, 5 = 20$.

Có 3 kết quả thuận lợi cho biến cố "Tổng các số ghi trên hai quả bóng lớn hơn 7" nên số các kết quả thuận lợi cho biến cố "Tổng các số ghi trên hai quả bóng không vượt quá 7" là $20 - 3 = 17$.

C. BÀI TẬP

1. Gieo một con xúc xắc bốn mặt cân đối hai lần liên tiếp và quan sát số ghi trên đỉnh của con xúc xắc.

a) Hãy mô tả không gian mẫu của phép thử.

b) Hãy viết tập hợp các kết quả thuận lợi cho biến cố "Số xuất hiện ở lần gieo thứ hai gấp 2 lần số xuất hiện ở lần gieo thứ nhất".

2. Tung một đồng xu ba lần liên tiếp. Phát biểu mỗi biến cố sau dưới dạng mệnh đề:
A = {SSS; NSS; SNS; NNS}; B = {SSN; SNS; NSS}.

3. Một hộp chứa 5 quả bóng xanh, 4 quả bóng đỏ có kích thước và khối lượng như nhau. Hãy mô tả không gian mẫu của phép thử lấy ra ngẫu nhiên một quả bóng từ hộp.

4. Trường mới của bạn Dũng có 3 câu lạc bộ ngoại ngữ là câu lạc bộ tiếng Anh, câu lạc bộ tiếng Bồ Đào Nha và câu lạc bộ tiếng Campuchia.

a) Dũng chọn ngẫu nhiên 1 câu lạc bộ ngoại ngữ để tìm hiểu thông tin. Hãy mô tả không gian mẫu của phép thử nêu trên.

b) Dũng thử chọn ngẫu nhiên 1 câu lạc bộ ngoại ngữ để tham gia trong học kì 1 và 1 câu lạc bộ ngoại ngữ khác để tham gia trong học kì 2. Hãy mô tả không gian mẫu của phép thử nêu trên.

5. Gieo ngẫu nhiên 3 con xúc xắc cân đối và đồng chất.

a) Hãy tìm một biến cố chắc chắn và một biến cố không thể liên quan đến phép thử.

b) Hãy mô tả không gian mẫu của phép thử.

c) Có bao nhiêu kết quả thuận lợi cho biến cố "Tích số chấm xuất hiện trên 3 con xúc xắc là số lẻ".

6. Một bình chứa 10 quả bóng được đánh số lần lượt từ 1 đến 10. Tùng và Cúc mỗi người lấy ra ngẫu nhiên 1 quả bóng từ bình.

a) Mô tả không gian mẫu của phép thử.

b) Có bao nhiêu kết quả thuận lợi cho biến cố "Tổng hai số ghi trên hai quả bóng lấy ra bằng 10"?

c) Có bao nhiêu kết quả thuận lợi cho biến cố "Tích hai số ghi trên hai quả bóng lấy ra chia hết cho 3"?

7. Lớp 10A có 20 bạn nam, 25 bạn nữ, lớp 10B có 23 bạn nam, 22 bạn nữ. Chọn ra ngẫu nhiên từ mỗi lớp 2 bạn để phỏng vấn. Tính số các kết quả thuận lợi cho biến cố:

a) "Cả 4 bạn được chọn đều là nữ";

b) "Trong 4 bạn được chọn có 3 bạn nam và 1 bạn nữ".

8. Một hợp tác xã cung cấp giống lúa của 7 loại gạo ngon ST24, MS19RMTT, ST25, Hạt Ngọc Rồng, Ngọc trời Thiên Vương, gạo đặc sản VD20 Gò Công Tiền Giang, gạo lúa tôm Kiên Giang. Bác Bình và bác An mỗi người chọn 1 trong 7 loại giống lúa trên để gieo trồng cho vụ mới.

a) Có bao nhiêu kết quả thuận lợi cho biến cố "Hai bác Bình và An chọn hai giống lúa giống nhau"?

b) Có bao nhiêu kết quả thuận lợi cho biến cố "Có ít nhất một trong hai bác chọn giống lúa ST24"?

9. Mật khẩu để kích hoạt một thiết bị là một dãy gồm 6 kí tự, mỗi kí tự có thể là một trong 4 chữ cái A, B, C, D hoặc 1 chữ số từ 0 đến 9. Hà chọn ngẫu nhiên một mật khẩu theo quy tắc trên. Tính số các kết quả thuận lợi cho biến cố:

a) "Mật khẩu được chọn chỉ gồm số";

b) "Mật khẩu được chọn có số và chữ cái xếp xen kẽ nhau";

c) "Mật khẩu được chọn có chứa đúng một chữ cái".

10. Có 3 khách hàng nam và 4 khách hàng nữ cùng đến một quầy giao dịch. Quầy giao dịch sẽ chọn ngẫu nhiên lần lượt từng khách hàng một để phục vụ. Tính số các kết quả thuận lợi cho biến cố:

a) "Các khách hàng nam và nữ được phục vụ xen kẽ nhau";

b) "Người được phục vụ đầu tiên là khách hàng nữ";

c) "Người được phục vụ cuối cùng là khách hàng nam".

Bài 2. XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Xác suất của biến cố

Giả sử một phép thử có không gian mẫu gồm hữu hạn các kết quả có cùng khả năng xảy ra và A là một biến cố.

Xác suất của biến cố A là một số, kí hiệu là $P(A)$, được xác định bởi công thức:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

trong đó: $n(A)$ và $n(\Omega)$ lần lượt kí hiệu số phần tử của tập A và Ω.

Xác suất của mỗi biến cố đo lường khả năng xảy ra của biến cố đó.

– Biến cố có khả năng xảy ra cao hơn sẽ có xác suất lớn hơn biến cố có khả năng xảy ra thấp hơn.

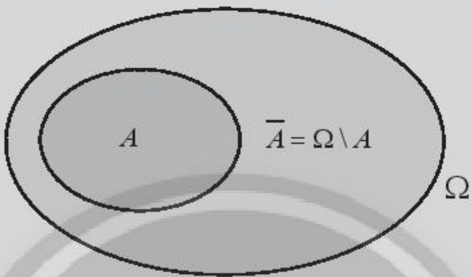
– Biến cố có khả năng xảy ra càng cao thì xác suất của nó càng gần 1. Biến cố chắc chắn có xác suất bằng 1.

– Biến cố có khả năng xảy ra càng thấp thì xác suất của nó càng gần 0. Biến cố không thể có xác suất bằng 0.

2. Biến cố đối

Cho A là một biến cố. Khi đó biến cố "Không xảy ra A", kí hiệu là $\overline{A}$, được gọi là ***biến cố đối*** của A.

$$\overline{A} = \Omega \setminus A; \qquad P(\overline{A}) + P(A) = 1.$$



Hình 1. Biểu đồ Ven của biến cố đối

3. Nguyên lí xác suất bé

Nếu một biến cố có xác suất rất bé thì trong một phép thử, biến cố đó sẽ không xảy ra.

B. BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Gieo một con xúc xắc 4 mặt cân đối và đồng chất 2 lần. Tính xác suất của các biến cố:

a) A: "Kết quả hai lần gieo là giống nhau";

b) B: "Tổng các số xuất hiện ở đỉnh phía trên của con xúc xắc trong 2 lần gieo lớn hơn 1";

c) C: "Tích các số xuất hiện ở đỉnh phía trên của con xúc xắc trong 2 lần gieo là 10";

d) D: "Có đúng một lần số xuất hiện ở đỉnh phía trên của con xúc xắc là 2".

Hình 2

Giải

Tổng số kết quả có thể xảy ra là $n(\Omega) = 4 \,.\, 4 = 16$.

Vì con xúc xắc là cân đối nên 16 kết quả đều có cùng khả năng xuất hiện.

a) Do có 4 kết quả thuận lợi cho biến cố A nên $P\left(A\right)=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$.

b) Do tổng các số xuất hiện trên đỉnh của con xúc xắc trong hai lần gieo luôn lớn hơn 1 nên B là biến cố chắc chắn, $P(B) = 1$.

c) Nếu tích hai số là 10 thì phải có một số chia hết cho 5 mà không có đỉnh nào của con xúc xắc ghi số chia hết cho 5 nên C là biến cố không thể, $P(C) = 0$.

d) Có 6 kết quả thuận lợi cho biến cố D nên $P\left(D\right)=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$.

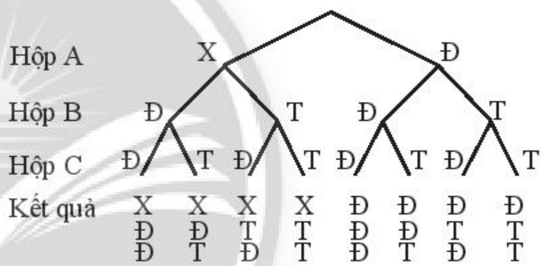
Bài 2. Có 3 chiếc hộp, hộp A chứa 1 chiếc bút xanh, 1 chiếc bút đỏ; hộp B chứa 1 chiếc bút đỏ, 1 chiếc bút tím; hộp C chứa 1 chiếc bút đỏ, 1 chiếc bút tím. Lấy ra ngẫu nhiên từ mỗi hộp 1 chiếc bút.

a) Hãy vẽ sơ đồ hình cây để mô tả các kết quả có thể xảy ra.

b) Tính xác suất của biến cố A: "Trong 3 bút lấy ra có đúng 1 bút đỏ".

Giải

a) Kí hiệu X là bút xanh, Đ là bút đỏ, T là bút tím. Các kết quả có thể xảy ra trong 3 lần lấy bút có thể được mô tả bởi sơ đồ hình cây ở bên.



Hình 3

b) Có tất cả 8 kết quả có thể xảy ra, trong đó có 3 kết quả thuận lợi cho biến cố A. Vậy $P(A)=\frac{3}{8}$.

Bài 3. Một hộp chứa 10 tấm thẻ có kích thước như nhau và được đánh số từ 2 021 đến 2 030, mỗi thẻ chỉ ghi đúng một số. Chọn ra ngẫu nhiên đồng thời 3 thẻ từ hộp.

a) Tìm biến cố đối của biến cố A: "Tích các số ghi trên 3 thẻ chia hết cho 5".

b) Tính xác suất của biến cố A.

Giải

a) Biến cố đối $\overline{A}$: "Tích các số ghi trên 3 thẻ không chia hết cho 5".

b) Do các thẻ có kích thước như nhau nên chúng có cùng khả năng được chọn. Số các kết quả có thể xảy ra là $n(\Omega)=C_{10}^{3}=120$.

Vì biến cố đối $\overline{A}$ xảy ra khi số trên cả 3 thẻ đều không chia hết cho 5 nên số các kết quả thuận lợi cho $\overline{A}$ là $n\left(\overline{A}\right)=C_{8}^{3}=56$.

Xác suất xảy ra biến cố $\overline{A}$ là $P\left(\overline{A}\right)=\frac{56}{120}=\frac{7}{15}$.

Xác suất xảy ra biến cố A là $P(A)=1-P\left(\overline{A}\right)=1-\frac{7}{15}=\frac{8}{15}$.

C. BÀI TẬP

1. Gieo một con xúc xắc 4 mặt cân đối và đồng chất ba lần. Tính xác suất của các biến cố:

a) "Tổng các số xuất hiện ở đỉnh phía trên của con xúc xắc trong ba lần gieo lớn hơn 2";

b) "Có đúng một lần số xuất hiện ở đỉnh phía trên của con xúc xắc là 2".

2. Tung một đồng xu cân đối và đồng chất bốn lần. Tính xác suất của các biến cố:

a) "Cả bốn lần đều xuất hiện mặt giống nhau";

b) "Có đúng một lần xuất hiện mặt sấp, ba lần xuất hiện mặt ngửa".

3. Chi có 1 cái ô xanh, 1 cái ô trắng; 1 cái mũ xanh, 1 cái mũ trắng, 1 cái mũ đen; 1 đôi giày đen; 1 đôi giày trắng. Chi chọn ngẫu nhiên 1 cái ô, 1 cái mũ và 1 đôi giày để đến trường.

a) Hãy vẽ sơ đồ cây mô tả các kết quả có thể xảy ra.

b) Tính xác suất của biến cố "Chỉ có 1 trong 3 thứ đồ Chi chọn có màu trắng".

4. Chọn ngẫu nhiên 10 số tự nhiên từ dãy các số tự nhiên từ 1 đến 100. Xác định biến cố đối của các biến cố sau:

A: "Có ít nhất 3 số lẻ trong 10 số được chọn";

B: "Tất cả 10 số được chọn đều là số chẵn";

C: "Có không quá 5 số chẵn trong 10 số được chọn".

5. Trên tường có một đĩa hình tròn có cấu tạo đồng chất và cân đối. Mặt đĩa được chia thành 12 hình quạt bằng nhau và được đánh số từ 1 đến 12. Trọng quay đĩa quanh trục gắn ở tâm 3 lần và quan sát xem mỗi khi dừng lại mũi tên chỉ vào ô ghi số mấy. Tính xác suất của các biến cố:

A: "Cả 3 lần mũi tên đều chỉ vào ô ghi số lẻ";

B: "Có đúng 2 lần mũi tên chỉ vào ô ghi số lẻ";

C: "Tích 3 số mũi tên chỉ vào là số nguyên tố".

Hình 4

6. Một văn phòng A có 15 nhân viên nam và 20 nhân viên nữ. Để khảo sát mức độ hài lòng của nhân viên thông qua hình thức phỏng vấn, người ta lần lượt ghi tên của từng nhân viên vào 35 mẩu giấy giống nhau, từ đó chọn ngẫu nhiên 5 mẩu giấy.

a) Tính xác suất của các biến cố:

A: "Trong 5 người được chọn có 2 nam, 3 nữ";

B: "Có nhiều nhân viên nữ được chọn hơn nhân viên nam";

C: "Có ít nhất một người được chọn là nữ".

b) Biết chị Lan là một nhân viên của văn phòng A. Tính xác suất của biến cố chị Lan được chọn.

7. Một hội đồng có đúng 1 người là nữ. Nếu chọn ngẫu nhiên 2 người từ hội đồng thì xác suất cả hai người đều là nam là 0,8.

a) Chọn ngẫu nhiên 2 người từ hội đồng, tính xác suất của biến cố có 1 người nữ trong 2 người đó.

b) Hội đồng có bao nhiêu người?

8. An, Bình, Cường và 2 bạn nữa xếp ngẫu nhiên thành một hàng ngang để chụp ảnh. Tính xác suất của các biến cố:

a) "An và Bình đứng ở hai đầu hàng";

b) "Bình và Cường đứng cạnh nhau";

c) "An, Bình, Cường đứng cạnh nhau".

9. Một hộp kín có 1 quả bóng xanh và 5 quả bóng đỏ có kích thước và khối lượng bằng nhau. Hỏi Dũng cần lấy ra từ hộp ít nhất bao nhiêu quả bóng để xác suất lấy được quả bóng xanh lớn hơn 0,5?

10. Bốn đội bóng A, B, C, D lọt vào vòng bán kết của một giải đấu. Ban tổ chức bốc thăm chia 4 đội này thành 2 cặp đấu một cách ngẫu nhiên. Tính xác suất của biến cố hai đội A và B đấu với nhau ở trận bán kết.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG X

A. TRẮC NGHIỆM

1. Một hộp có 4 viên bi xanh, 5 viên bi đỏ có kích thước và khối lượng như nhau. Lấy ra ngẫu nhiên đồng thời 2 viên bi. Xác suất của biến cố "2 viên bi lấy ra đều là bi xanh" là:

A. $\frac{1}{2}$; B. $\frac{1}{3}$; C. $\frac{1}{5}$; D. $\frac{1}{6}$.

2. Gieo 2 con xúc xắc cân đối và đồng chất. Xác suất để tích số chấm xuất hiện bằng 7 là:

A. 0; B. $\frac{1}{36}$; C. $\frac{1}{7}$; D. $\frac{1}{6}$;

3. Tung 3 đồng xu cân đối và đồng chất. Xác suất để có ít nhất một đồng xu xuất hiện mặt sấp là:

A. $\frac{1}{2}$; B. $\frac{7}{8}$; C. $\frac{1}{3}$; D. $\frac{1}{4}$.

4. Một hộp chứa 2 loại bi xanh và đỏ. Lấy ra ngẫu nhiên từ hộp 1 viên bi. Biết xác suất lấy được bi đỏ là 0,3. Xác suất lấy được bi xanh là:

A. 0,3; B. 0,5; C. 0,7; D. 0,09.

5. Gieo một con xúc xắc bốn mặt cân đối và đồng chất ba lần. Xác suất xảy ra biến cố "Có ít nhất một lần xuất hiện đỉnh ghi số 4" là:

A. $\frac{1}{4}$; B. $\frac{27}{64}$; C. $\frac{37}{64}$; D. $\frac{3}{4}$.

6. Chọn ra ngẫu nhiên 2 người từ 35 người trong lớp của Hùng. Xác suất xảy ra biến cố "Hùng được chọn" là:

A. $\frac{2}{35}$; B. $\frac{1}{34}$; C. $\frac{1}{35}$; D. $\frac{1}{17}$.

7. Xếp 4 quyển sách toán và 2 quyển sách văn thành một hàng ngang trên giá sách một cách ngẫu nhiên. Xác suất xảy ra biến cố "2 quyển sách văn không được xếp cạnh nhau" là:

A. $\frac{1}{3}$; B. $\frac{2}{3}$; C. $\frac{1}{2}$; D. $\frac{1}{5}$.

8. Cô giáo chia tổ của Lan và Phương thành hai nhóm, mỗi nhóm gồm 4 người để làm việc nhóm một cách ngẫu nhiên. Xác suất của biến cố Lan và Phương thuộc cùng một nhóm là:

A. $\frac{1}{2}$; B. $\frac{1}{3}$; C. $\frac{4}{7}$; D. $\frac{3}{7}$.

B. TỰ LUẬN

1. Trên bàn có một tấm bìa hình tròn được chia thành 10 hình quạt bằng nhau và được đánh số từ 1 đến 10 như Hình 1. Cường quay mũi tên ở tâm 3 lần và quan sát xem khi mỗi lần dừng lại nó chỉ vào ô số mấy. Tính xác suất của các biến cố sau:

A: "Cả 3 lần mũi tên đều chỉ vào ô ghi số lẻ";

B: "Tích 3 số mũi tên chỉ vào là số chia hết cho 5".

Hình 1

2. Mật khẩu mở máy tính của An gồm 8 kí tự, trong đó 2 kí tự đầu là chữ số, 6 kí tự sau là các chữ cái thuộc tập hợp $\{A; B; C; D\}$. Không may An quên mất 3 kí tự đầu tiên. An chọn ra 2 chữ số và một chữ cái thuộc tập hợp trên một cách ngẫu nhiên và thử mở máy tính. Tính xác suất để An mở được máy tính.

3. Tổ 3 có 6 bạn là Hoà, Hiền, Hiệp, Hương, Thành và Khánh. Chọn ngẫu nhiên 2 bạn trong tổ. Hãy tính xác suất của các biến cố:

A: "Tên của hai bạn được chọn đều bắt đầu bằng chữ cái H";

B: "Tên của ít nhất một bạn được chọn có chứa dấu huyền";

C: "Hoà được chọn còn Hiền không được chọn".

4. Một hộp có 5 lá thăm cùng loại được đánh số 2; 4; 6; 8; 10. Lấy ra ngẫu nhiên từ hộp 2 lá thăm. Tính xác suất của các biến cố sau:

A: "Tổng các số ghi trên hai lá thăm bằng 11";

B: "Tích các số ghi trên hai lá thăm là số tròn chục".

5. Doanh nghiệp A chọn ngẫu nhiên 2 tháng trong năm 2020 để tri ân khách hàng. Doanh nghiệp B cũng chọn ngẫu nhiên 1 tháng trong năm đó để tri ân khách hàng. Tính xác suất của biến cố "Hai doanh nghiệp tri ân khách hàng cùng một tháng trong năm".

6. Lớp học của hai bạn Hà và Giang có 32 học sinh. Cô giáo chia các bạn vào 4 tổ, mỗi tổ có 8 học sinh một cách ngẫu nhiên. Tính xác suất của các biến cố "Hà và Giang được xếp ở hai tổ khác nhau".

7. Một hộp chứa 2 quả bóng xanh và một số quả bóng trắng. Lấy ra ngẫu nhiên 2 quả bóng từ hộp. Biết rằng xác suất chọn được 2 quả bóng khác màu là $\frac{10}{21}$.

a) Tính xác suất 2 quả bóng lấy ra có cùng màu.

b) Hỏi trong hộp có bao nhiêu quả bóng?

LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài 1. KHÔNG GIAN MẪU VÀ BIẾN CỐ

1. a) Không gian mẫu của phép thử là:

$\Omega = \{(1; 1); (1; 2); (1; 3); (1; 4);$
$(2; 1); (2; 2); (2; 3); (2; 4);$
$(3; 1); (3; 2); (3; 3); (3; 4);$
$(4; 1); (4; 2); (4; 3); (4; 4)\}.$

b) Tập hợp mô tả cho biến cố "Số xuất hiện ở lần gieo thứ hai gấp 2 lần số xuất hiện ở lần gieo thứ nhất" là: $\{(1; 2); (2; 4)\}$.

2. A: "Lần tung thứ ba xuất hiện mặt sấp".

B: "Có đúng một lần tung xuất hiện mặt ngửa".

3. Kí hiệu 5 quả bóng xanh lần lượt là X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 và 4 quả bóng đỏ lần lượt là $Đ_1, Đ_2, Đ_3, Đ_4$. Không gian mẫu của phép thử là:

$\Omega = \{X_1; X_2; X_3; X_4; X_5; Đ_1; Đ_2; Đ_3; Đ_4\}$.

4. a) $\Omega = \{A; B; C\}$ trong đó A, B, C lần lượt kí hiệu kết quả Dũng chọn câu lạc bộ tiếng Anh, câu lạc bộ tiếng Bồ Đào Nha và câu lạc bộ tiếng Campuchia.

b) $\Omega = \{AB; AC; BC; BA; CA; CB\}$ trong đó AB kí hiệu kết quả Dũng tham gia câu lạc bộ tiếng Anh trong học kì 1, câu lạc bộ tiếng Bồ Đào Nha trong học kì 2; ...

5. a) Biến cố "Tổng số chấm lớn hơn 2" là biến cố chắc chắn. Biến cố "Tích số chấm bằng 70" là biến cố không thể.

b) Không gian mẫu $\Omega = \{(i; j; k) \mid 1 \leq i, j, k \leq 6\}$.

c) Tích số chấm là lẻ khi số chấm trên mỗi con xúc xắc đều là số lẻ. Do đó số kết quả thuận lợi cho biến cố "Tích số chấm xuất hiện trên 3 con xúc xắc là số lẻ" là $3 . 3 . 3 = 27$.

6. a) Không gian mẫu $\Omega = \{(i; j) \mid 1 \leq i \leq 10, 1 \leq j \leq 10, i \neq j\}$, trong đó $(i; j)$ kí hiệu kết quả Tùng chọn được quả bóng ghi số i, Cúc chọn được quả bóng ghi số j.

b) Số kết quả thuận lợi cho biến cố "Tổng hai số ghi trên hai quả bóng lấy ra bằng 10" là 8.

c) Số kết quả thuận lợi cho biến cố "Tích hai số ghi trên hai quả bóng lấy ra không chia hết cho 3" là $7 . 6 = 42$.

Tổng số kết quả có thể xảy ra là $10 . 9 = 90$.

Do đó số kết quả thuận lợi cho biến cố "Tích hai số ghi trên hai quả bóng lấy ra chia hết cho 3" là 90 – 42 = 48.

7. a) $C_{25}^{2}C_{22}^{2} = 69\,300$.

b) $20 . 25 . C_{23}^{2} + C_{20}^{2} . 23 . 22 = 222\,640$.

8. a) Số kết quả thuận lợi cho biến cố "Hai bác Bình và An chọn hai giống lúa giống nhau" là 7.

b) Tổng số kết quả có thể xảy ra là 7 . 7 = 49.

Số kết quả thuận lợi cho biến cố "Không bác nào chọn giống lúa ST24" là 6 . 6 = 36.

Vậy số kết quả thuận lợi cho biến cố "Có ít nhất một trong hai bác chọn giống lúa ST24" là 49 – 36 = 13.

9. a) 10^6; b) 2.40^3; c) 24.10^5.

10. a) 4!3!; b) 4.6!; c) 3.6!.

Bài 2. XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ

1. a) Biến cố "Tổng các số xuất hiện ở đỉnh phía trên của con xúc xắc trong 3 lần gieo lớn hơn 2" là biến cố chắc chắn nên nó có xác suất bằng 1.

b) Số các kết quả có thể xảy ra là $n(\Omega) = 4^3 = 64$.

Gọi B là biến cố "Có đúng một lần số xuất hiện ở đỉnh phía trên của con xúc xắc là 2".

Số các kết quả thuận lợi cho biến cố B là $3 . 3^2 = 27$.

Vậy $P(B) = \dfrac{27}{64}$.

2. Số các kết quả có thể xảy ra là $n(\Omega) = 2^4 = 16$.

a) Gọi A là biến cố "Cả bốn lần đều xuất hiện mặt giống nhau". Số các kết quả thuận lợi cho A là $n(A) = 2$.

Vậy xác suất của biến cố A là $P(A) = \dfrac{2}{16} = \dfrac{1}{8}$.

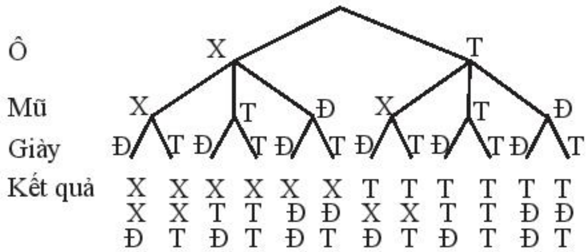
b) Gọi B là biến cố "Có đúng một lần xuất hiện mặt sấp, ba lần xuất hiện mặt ngửa". Số các kết quả thuận lợi cho B là $n(B) = 4$.

Vậy xác suất của biến cố B là $P(B) = \dfrac{4}{16} = \dfrac{1}{4}$.

3. a) Ta có sơ đồ hình cây như Hình 1.

b) Gọi A là biến cố "Chỉ có 1 trong 3 thứ để Chi chọn có màu trắng".

Xác suất xảy ra biến cố A là $P(A)=\dfrac{5}{12}$.



Hình 1

4. $\overline{A}$: "Có không quá 2 số lẻ trong 10 số được chọn";

$\overline{B}$: "Có ít nhất 1 số được chọn là số lẻ";

$\overline{C}$: "Có ít nhất 6 số chẵn trong 10 số được chọn".

5. $P(A)=\dfrac{1}{8}$; $P(B)=\dfrac{3}{8}$.

Biến cố C xảy ra khi có 2 lần mũi tên chỉ vào số 1 và 1 lần chỉ vào các số nguyên tố 2; 3; 5; 7; 11.

Do đó $P(C)=\dfrac{3\,.\,5}{12^3}=\dfrac{15}{12^3}=\dfrac{5}{576}$.

6. a) $P(A)=\dfrac{C_{15}^2C_{20}^3}{C_{35}^5}\approx 0{,}37$; $P(B)=\dfrac{C_{20}^5+C_{15}^1C_{20}^4+C_{15}^2C_{20}^3}{C_{35}^5}\approx 0{,}64$;

$P(C)=1-\dfrac{C_{15}^5}{C_{35}^5}\approx 0{,}99$.

b) Xác suất chị Lan được chọn là: $1-\dfrac{C_{34}^5}{C_{35}^5}=\dfrac{1}{7}$.

7. a) 0,2;

b) Gọi n là số người nam trong hội đồng ($n\in\mathbb{N}^*$, $n\ge 2$). Xác suất để 2 người được chọn ra đều là nam là $\dfrac{C_n^2}{C_{n+1}^2}=\dfrac{n-1}{n+1}=0{,}8$. Suy ra $n=9$.

Vậy hội đồng có 10 người.

8. a) $\dfrac{2\,.\,3!}{5!}=\dfrac{1}{10}$; b) $\dfrac{2\,.\,3!}{5!}=\dfrac{1}{10}$; c) $\dfrac{3!3!}{5!}=\dfrac{3}{5}$.

9. Gọi k là số quả bóng Dũng lấy ra ($k\in\mathbb{N}^*$, $k\le 6$). Xác suất để trong k quả bóng đó có quả bóng xanh là $1-\dfrac{C_5^k}{C_6^k}=\dfrac{k}{6}$.

Để đảm bảo xác suất lấy được bóng xanh lớn hơn 0,5 thì Dũng phải lấy ít nhất 4 quả bóng.

10. $\dfrac{1}{3}$.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG X

A. TRẮC NGHIỆM

1. D	**2.** A	**3.** B	**4.** C	**5.** C	**6.** A	**7.** B	**8.** D

B. TỰ LUẬN

1. $P(A)=\dfrac{1}{8}$; $P(B)=1-\dfrac{8^3}{10^3}=\dfrac{61}{125}$.

2. $\dfrac{1}{400}$.

3. $P(A)=\dfrac{C_4^2}{C_6^2}=\dfrac{2}{5}$; $P(B)=1-\dfrac{C_3^2}{C_6^2}=\dfrac{4}{5}$; $P(C)=\dfrac{4}{C_6^2}=\dfrac{4}{15}$.

4. $P(A)=0$; $P(B)=1-\dfrac{C_4^2}{C_5^2}=\dfrac{2}{5}$.

5. Số các kết quả có thể xảy ra là $n(\Omega)=12C_{12}^2$.

Gọi A là biến cố "Hai doanh nghiệp tri ân khách hàng cùng một tháng trong năm".

Số các kết quả thuận lợi cho $\overline{A}$ là $n(\overline{A})=10C_{12}^2$.

Xác suất của biến cố A là $1-\dfrac{10C_{12}^2}{12C_{12}^2}=\dfrac{1}{6}$.

6. $1-\dfrac{4C_{30}^6C_{24}^8C_{16}^8}{C_{32}^8C_{24}^8C_{16}^8}=1-\dfrac{4C_{30}^6}{C_{32}^8}=\dfrac{24}{31}$.

7. a) $\dfrac{11}{21}$.

b) Gọi k là số quả bóng trắng trong hộp ($k\in\mathbb{N}^*$). Xác suất lấy được 2 quả bóng khác màu là

$$\frac{2k}{C_{k+2}^2}=\frac{4k}{(k+1)(k+2)}=\frac{10}{21}.$$

Giải phương trình trên ta được $k=5$. Vậy trong hộp có 7 quả bóng.

Chịu trách nhiệm xuất bản

Chủ tịch Hội đồng Thành viên NGUYỄN ĐỨC THÁI

Tổng Giám đốc HOÀNG LÊ BÁCH

Chịu trách nhiệm nội dung

Tổng biên tập PHẠM VĨNH THÁI

Biên tập nội dung: NGUYỄN ĐẶNG TRÍ TÍN – TRẦN THANH HÀ

Biên tập mĩ thuật: BÙI XUÂN DƯƠNG

Thiết kế sách: BÙI XUÂN DƯƠNG

Trình bày bìa: THÁI HỮU DƯƠNG

Minh hoạ: BÙI XUÂN DƯƠNG

Sửa bản in: NGUYỄN CHÍ CÔNG

Chế bản: CÔNG TY CP DỊCH VỤ XUẤT BẢN GIÁO DỤC GIA ĐỊNH

Bài tập Toán 10, tập hai (Chân trời sáng tạo)

Mã số: G2BHXT002M22

In………bản, (QĐ in số….) Khổ 17x24 cm.

Đơn vị in:……………………..

Cơ sở in:………………………

Số ĐKXB: 1146-2022/CXBIPH/10-708/GD

Số QĐXB:......... ngày…. tháng…. năm 20….

In xong và nộp lưu chiểu tháng…. năm 20….

Mã số ISBN: Tập 1: 978-604-0-32734-5

Tập 2: 978-604-0-32735-2

HUÂN CHƯƠNG HỒ CHÍ MINH

BỘ BÀI TẬP LỚP 10 – CHÂN TRỜI SÁNG TẠO

1. Bài tập NGỮ VĂN 10, TẬP MỘT
2. Bài tập NGỮ VĂN 10, TẬP HAI
3. Bài tập TOÁN 10, TẬP MỘT
4. Bài tập TOÁN 10, TẬP HAI
5. TIẾNG ANH 10 Friends Global - Workbook
6. Bài tập LỊCH SỬ 10
7. Bài tập ĐỊA LÍ 10
8. Bài tập VẬT LÍ 10
9. Bài tập HOÁ HỌC 10
10. Bài tập SINH HỌC 10
11. Bài tập HOẠT ĐỘNG TRẢI NGHIỆM, HƯỚNG NGHIỆP 10 (BẢN 1)
12. Bài tập HOẠT ĐỘNG TRẢI NGHIỆM, HƯỚNG NGHIỆP 10 (BẢN 2)
13. Bài tập GIÁO DỤC KINH TẾ VÀ PHÁP LUẬT 10
14. Bài tập GIÁO DỤC QUỐC PHÒNG VÀ AN NINH 10

Các đơn vị đầu mối phát hành

- **Miền Bắc:** CTCP Đầu tư và Phát triển Giáo dục Hà Nội
  CTCP Sách và Thiết bị Giáo dục miền Bắc
- **Miền Trung:** CTCP Đầu tư và Phát triển Giáo dục Đà Nẵng
  CTCP Sách và Thiết bị Giáo dục miền Trung
- **Miền Nam:** CTCP Đầu tư và Phát triển Giáo dục Phương Nam
  CTCP Sách và Thiết bị Giáo dục miền Nam
- **Cửu Long:** CTCP Sách và Thiết bị Giáo dục Cửu Long

Sách điện tử: http://hanhtrangso.nxbgd.vn

Kích hoạt để mở học liệu điện tử: Cào lớp nhũ trên tem để nhận mã số. Truy cập http://hanhtrangso.nxbgd.vn và nhập mã số tại biểu tượng chìa khoá.

ISBN 978-604-0-32735-2

9 786040 327352

Giá: 17.000 đ