

Bài 1. (3,5 điểm) Phân tích các đa thức thành nhân tử

- 1) $18x^3 - \frac{8}{25}x$
- 2) $a(a+2b)^3 - b(2a+b)^3$
- 3) $(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)+1$

Bài 2. (2,5 điểm)

Cho biểu thức $A = \left(\frac{3}{x^2-1} + \frac{x+1}{2x-2} - \frac{x+3}{2x+2} \right) : \frac{5}{4x^2-4}$

- 1) Hãy tìm điều kiện của x để giá trị của biểu thức A được xác định
- 2) Chứng minh rằng khi giá trị của biểu thức xác định thì nó không phụ thuộc vào giá trị của biến x

Bài 3. (3,0 điểm)

- 1) Cho a, b, c đôi một khác nhau thỏa mãn: $ab+bc+ca=1$

$$A = \frac{(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2}{(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)}$$

Tính giá trị của biểu thức

- 2) Cho $\begin{cases} x+y=a+b \\ x^2+y^2=a^2+b^2 \end{cases}$

Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n ta có: $x^n + y^n = a^n + b^n$

Bài 4. (3,0 điểm)

- 1) Tìm x :
 - a) $|x+1| + |x+3| + |x+5| = 4x$
 - b) $(x^2 - 5x + 6)\sqrt{1-x} = 0$
- 2) Tìm x, y biết: $7x^2 + y^2 + 4xy - 24x - 6y + 21 = 0$

Bài 5. (3,0 điểm)

- 1) Tìm dư khi chia $x^{2015} + x^{1945} + x^{1930} - x^2 - x + 1$ cho $x^2 - 1$

2) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = (x^2 + 3x + 4)^2$

Bài 6. (5,0 điểm)

Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi E, F theo thứ tự là trung điểm của cạnh AD, BC .

Đường chéo AC cắt đường chéo BD tại O và các đoạn BE, DF lần lượt tại P, Q

1) Chứng minh rằng: P là trọng tâm $\triangle ABD$

2) Chứng minh rằng: $AP = PQ = QC$

3) Lấy M bất kỳ thuộc đoạn DC. Gọi I, K theo thứ tự là các điểm đối xứng của M qua tâm E, F . Chứng minh rằng I, K thuộc đường thẳng AB

4) Chứng minh: $AI + AK$ không đổi khi M thuộc đường thẳng AB .

ĐÁP ÁN

Bài 1.

Bài 1.

$$1) \quad 18x^3 - \frac{8}{25}x = 2x \left(9x^2 - \frac{4}{25} \right) = 2x \left(3x - \frac{2}{5} \right) \left(3x + \frac{2}{5} \right)$$

$$\begin{aligned} 2) \quad & a(a+2b)^3 - b(2a+b)^3 = a[(a+b)+b]^3 - b[a+(a+b)]^3 \\ & = a[(a+b)^3 + 3(a+b)^2b + 3(a+b)b^2 + b^3] \\ & - b[a^3 + 3a^2(a+b) + 3a(a+b)^2 + (a+b)^3] \\ & = a(a+b)^3 + 3ab(a+b)^2 + 3ab^2(a+b) + ab^3 - a^3b - 3a^2b(a+b) \\ & - 3ab(a+b)^2 - b(a+b)^3 \\ & = a(a+b)^3 + 3ab^2(a+b) + ab^3 - a^3b - 3a^2b(a+b) - b(a+b)^3 \\ & = (a+b) \left[a(a+b)^2 + 3ab^2 - ab(a+b) - 3a^2b - b(a+b)^2 \right] \\ & = (a+b)(a^3 + 2a^2b + ab^2 + 3ab^2 - a^2b + ab^2 - 3a^2b - a^2b - 2ab^2 - b^3) \\ & = (a+b)(a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3) = (a+b)(a-b)^3 \end{aligned}$$

$$3) \quad \text{Đặt } A = (x-2)(x-3)(x-4)(x-5) + 1$$

$$\begin{aligned}
 A &= (x-2)(x-3)(x-4)(x-5)+1 \\
 &= (x^2-7x+10)(x^2-7x+12)+1 \\
 &= (x^2-7x+11-1)(x^2-7x+11+1)+1 \\
 &= (x^2-7x+11)^2-1+1 = (x^2-7x+11)^2
 \end{aligned}$$

Bài 2.

1) Giá trị của biểu thức A được xác định với điều kiện:

$$\begin{cases} x^2 - 1 \neq 0 \\ 2x - 2 \neq 0 \\ 2x + 2 \neq 0 \\ 4x^2 - 4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \neq 1 \\ x \neq 1 \\ x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq \pm 1$$

2) Với $x \neq \pm 1$, ta có:

$$\begin{aligned}
 A &= \left[\frac{3}{(x-1)(x+1)} + \frac{x+1}{2(x-1)} - \frac{x+3}{2(x+1)} \right] \cdot \frac{4x^2-4}{5} \\
 &= \frac{6+(x+1)^2-(x+3)(x-1)}{2(x-1)(x+1)} \cdot \frac{4(x-1)(x+1)}{5} \\
 &= \frac{(6+x^2+2x+1-x^2-2x+3) \cdot 2}{5} = 4
 \end{aligned}$$

Vậy khi giá trị biểu thức được xác định thì nó không phụ thuộc vào giá trị của biến

Bài 3.

1) Ta có:

$$1+a^2=ab+bc+ca+a^2=a(a+b)+c(a+b)=(a+b)(a+c)$$

Tương tự:

$$1+b^2=(b+a)(b+c) \quad \text{và} \quad 1+c^2=(c+a)(c+b)$$

$$A = \frac{(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2}{(a+b)(a+c)(b+a)(b+c)(c+a)(c+b)} = 1$$

Do đó:

$$\begin{aligned}
 2) \text{ Từ } x^2+y^2 &= a^2+b^2 \Rightarrow (x^2-a^2)+(y^2-b^2)=0 \\
 &\Leftrightarrow (x-a)(x+a)=(y-b)(y+b)=0
 \end{aligned}$$

Bởi vì : $x + y = a + b \Leftrightarrow x - a = b - y$, thế vào ta có:

$$(b - y)(x + a) + (y - b)(y + b) = 0$$

$$\Rightarrow (b - y)[(x + a) - (y + b)] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b - y = 0 \\ x + a = y + b \end{cases}$$

*) Nếu $b - y = 0 \Rightarrow y = b \Rightarrow x = a^n + y^n = a^n + b^n$

*) Nếu $x + a = y + b \Rightarrow \begin{cases} x - y = b - a \\ x + y = a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = b \\ y = a \end{cases}$

Do đó: $x^n + y^n = b^n + a^n = a^n + b^n$

Vậy trong mọi trường hợp, ta có: $x^n + y^n = a^n + b^n$

Bài 4.

1a) $|x + 1| + |x + 3| + |x + 5| = 4x \quad (1)$

Vế trái luôn luôn không âm nên $\forall x$ ta luôn có $4x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$

$x \geq 0$ nên $x + 1 > 0, x + 3 > 0, x + 5 > 0$

$$\Rightarrow |x + 1| = x + 1; |x + 3| = x + 3; |x + 5| = x + 5$$

Do đó $(1) \Leftrightarrow x + 1 + x + 3 + x + 5 = 4x \Leftrightarrow x = 9$

1b) $(x^2 - 5x + 6)\sqrt{1 - x} = 0 \quad (1)$

Điều kiện : $1 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1 (*)$

$$\Rightarrow (1) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 5x + 6 = 0 \\ \sqrt{1 - x} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2(ktm) \\ x = 3(ktm) \\ x = 1(tm) \end{cases} \text{ . Vậy } x = 1$$

2) $7x^2 + y^2 + 4xy - 24x - 6y + 21 = 0$

$$\Leftrightarrow y^2 + 4xy - 6y + 7x^2 - 24x + 21 = 0$$

$$\Leftrightarrow y^2 + 2y(2x - 3) + (2x - 3)^2 + 3x^2 - 12x + 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow (y + 2x - 3)^2 + 3(x - 2)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y + 2x - 3 = 0 \\ x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$$

Vậy $x = 2; y = -1$

Bài 5.

1) Đặt $f(x) = x^{2015} + x^{1945} + x^{1930} - x^2 - x + 1$ cho $x^2 - 1$

Gọi thương khi chia $f(x)$ cho $x^2 - 1$ là $Q(x)$, dư là $ax + b$

Ta có: $f(x) = (x^2 - 1)Q(x) + ax + b$

Đẳng thức trên đúng với mọi x nên

- Với $x = 1$ ta được $f(1) = a + b \Leftrightarrow a + b = 2 \quad (1)$

- Với $x = -1$ ta được: $f(-1) = -a + b \Leftrightarrow -a + b = 0 \quad (2)$

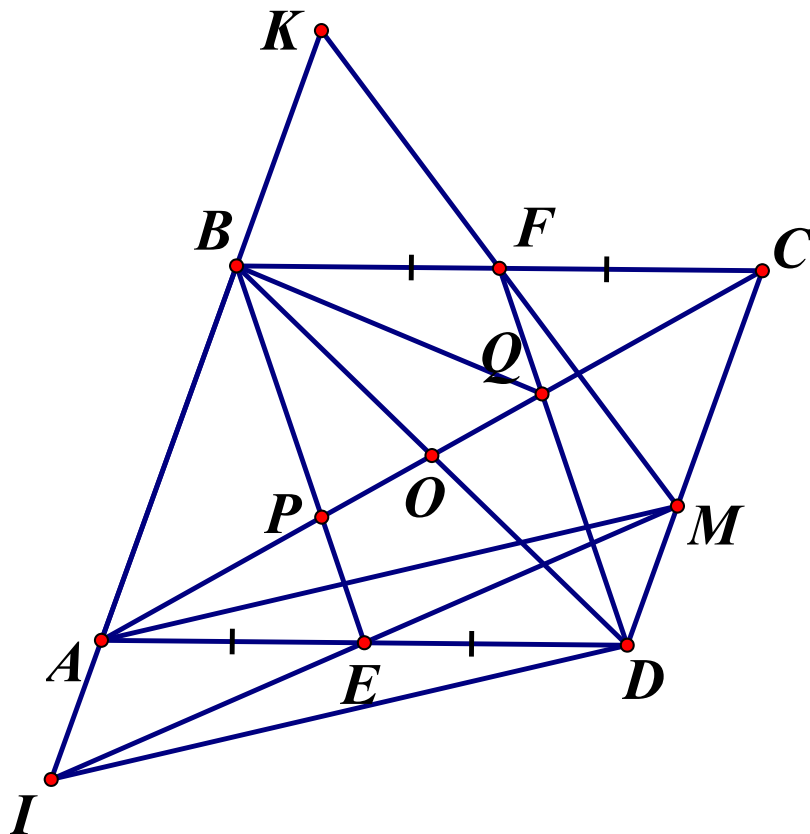
Từ (1) và (2) suy ra $a = 1, b = 1$, Dư phải tìm là $x + 1$

2) Ta có: $A = x^2 + 3x + 4 = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} \geq \frac{7}{4}$

$\Rightarrow A \geq \left(\frac{7}{4}\right)^2 = \frac{49}{16}$. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}$

Vậy $\min A = \frac{49}{16} \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}$

Bài 6.



- 1) Vì $ABCD$ là hình bình hành nên hai đường chéo AC, BD cắt nhau tại O là trung điểm của mỗi đường.

Ta có: AO, BE là trung tuyến của $\triangle ABD$

Mà AO cắt BE tại P nên P là trọng tâm $\triangle ABD$

- 2) Theo câu 1) P là trọng tâm của $\triangle ABD$ nên $AP = \frac{2}{3}AO = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}AC = \frac{1}{3}AC$

Tương tự, ta có: $CQ = \frac{1}{3}AC$

Do đó: $PQ = AC - AP - CQ = \frac{1}{3}AC$

Vậy $AP = PQ = QC$

- 3) Vì I đối xứng với M qua E nên $EI = EM$

Ta có: $AE = ED, EI = EM \Rightarrow AMDI$ là hình bình hành
 $\Rightarrow AI \parallel MD(1)$

Chứng minh tương tự, ta có: $BK \parallel MC(2)$

Từ (1) (2) suy ra I, A, B, K thẳng hàng hay I, K thuộc đường thẳng AB.

4) $\triangle KMI$ có E, F lần lượt là trung điểm của $MI, MK \Rightarrow EF$ là đường trung bình

$$\triangle KMI \Rightarrow EF = \frac{1}{2} KI \Rightarrow KI = 2EF \Rightarrow AI + AK = 2EF \quad (4)$$

$BF \parallel AE$ và $AF = AE \Rightarrow ABFE$ là hình bình hành $\Rightarrow EF = AB \quad (5)$

Từ (4) (5) suy ra $AI + AK = 2AB$ không đổi khi M di động trên cạnh CD