

**PHÒNG GIÁO DỤC & ĐÀO TẠO
NGHI SƠN**

ĐỀ THI CHÍNH THỨC
(Đề thi gồm có 01 trang)

**ĐỀ KIỂM TRA ĐỘI TUYỂN
DỰ THI HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH LẦN 1
Năm học 2023 - 2024**

Môn: Toán - Lớp 9

Ngày kiểm tra: 20/10/2023

Thời gian: **150 phút** (không kể thời gian giao đề)

Câu I. (4,0 điểm):

$$A = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{4 - x^2}} \left[\sqrt{(2 + x)^3} - \sqrt{(2 - x)^3} \right]}{4 + \sqrt{4 - x^2}}$$

1. Rút gọn biểu thức:

2. Tính giá trị của biểu thức $A = x^2 y^2 z^2$, biết x, y, z là các số thực thỏa mãn:

$$\frac{1}{x^2(y-z)} = \frac{-3}{5}; \quad \frac{1}{y^2(z-x)} = \frac{1}{3}; \quad \frac{1}{z^2(x-y)} = 3.$$

Câu II. (4,0 điểm):

$$\sqrt[3]{81x-8} = x^3 - 2x^2 + \frac{4}{3}x - 2$$

1. Giải phương trình:

$$\begin{cases} x^2(y+1) = 6y - 2 \\ x^4 y^2 + 2x^2 y^2 + y(x^2 + 1) = 12y^2 - 1 \end{cases}$$

2. Giải hệ phương trình:

Câu III. (4,0 điểm):

1. Tìm các cặp số nguyên dương (x, y) với x, y nguyên tố cùng nhau và thỏa mãn phương trình:
 $2(x^3 - x) = y^3 - y$

2. Cho x, y là các số nguyên thỏa mãn: $x^3 + y^3 + x^2 + y^2 + xy - 1$ chia hết cho $xy + x + y + 1$.
Chứng minh rằng $x^4 + y^9$ chia hết cho $y + 1$.

Câu IV. (6,0 điểm): Cho tam giác AMN cố định và cân tại A. Gọi I là trung điểm của MN, đường tròn (I) tiếp xúc với AM, AN lần lượt tại D và E. Về phía ngoài tam giác AMN; lấy điểm F thay đổi thuộc đường tròn (I), tiếp tuyến tại F của đường tròn (I) cắt tia AM ở B, cắt tia AN ở C.

1. Chứng minh hai tam giác BMI và INC đồng dạng.

2. Gọi A' là điểm đối xứng với A qua E, B' là điểm đối xứng với B qua F. Đường thẳng EF cắt AB', BA' lần lượt tại K và H. Chứng minh tam giác DHK là tam giác cân.

3. Tìm vị trí của F trên (I) để diện tích tam giác ABC nhỏ nhất.

Câu V. (2,0 điểm): Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + 2b + 3c = 1$.

$$\frac{2ab}{a^2 + 4b^2} + \frac{6bc}{4b^2 + 9c^2} + \frac{3ca}{9c^2 + a^2} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{2b} + \frac{1}{3c} \right) \geq \frac{15}{4}$$

Chứng minh rằng:

Họ, tên thí sinh.....Chữ ký giám thị 1.....
Số báo danh.....Chữ ký giám thị 1.....

ĐÁP ÁN VÀ BIỂU CHẤM
ĐỀ KIỂM TRA ĐỘI TUYỂN HỌC SINH GIỎI DỰ THI CẤP TỈNH LẦN 1
Môn: Toán - Lớp 9
Năm học 2023 - 2024
(Đáp án gồm có 08 trang)

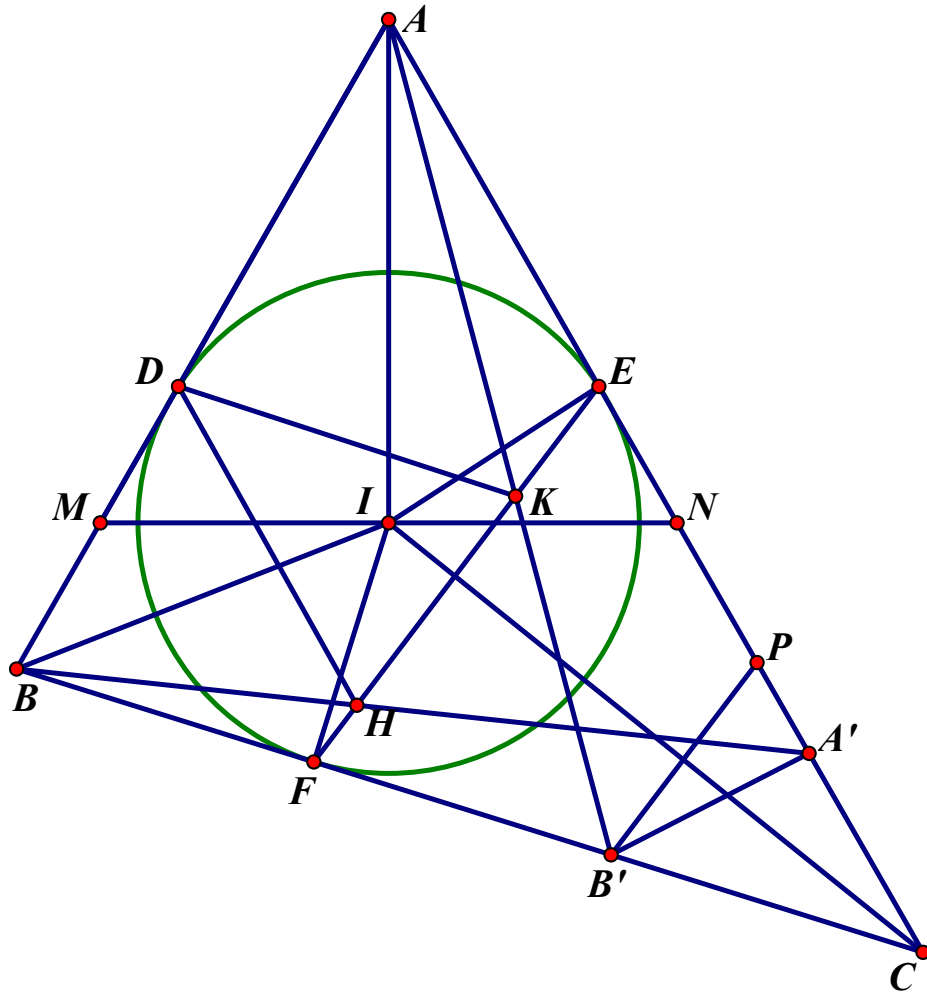
Câu	Đáp án	Biểu điểm
I (4đ)	1. Rút gọn biểu thức: $A = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{4 - x^2}} \left[\sqrt{(2 + x)^3} - \sqrt{(2 - x)^3} \right]}{4 + \sqrt{4 - x^2}}$ ĐKXĐ: $-2 \leq x \leq 2$ Đặt $a = \sqrt{2 + x}$; $b = \sqrt{2 - x}$ ($a, b \geq 0$) $\Rightarrow a^2 + b^2 = 4$; $a^2 - b^2 = 2x$ $\Rightarrow A = \frac{\sqrt{2 + ab}(a^3 - b^3)}{4 + ab} = \frac{\sqrt{2 + ab}(a - b)(a^2 + b^2 + ab)}{4 + ab}$ $\Rightarrow A = \frac{\sqrt{2 + ab}(a - b)(4 + ab)}{4 + ab} = \sqrt{2 + ab}(a - b)$ $\Rightarrow A\sqrt{2} = \sqrt{4 + 2ab}(a - b)$ $\Rightarrow A\sqrt{2} = \sqrt{(a^2 + b^2 + 2ab)}(a - b) = (a + b)(a - b)$ $\Rightarrow A\sqrt{2} = a^2 - b^2 = 2x$ Vậy $A = x\sqrt{2}$	0,5 0,5 0,5 0,5
	2. Tính giá trị của biểu thức $A = x^2 y^2 z^2$, biết x, y, z là các số thực thỏa mãn: $\frac{1}{x^2(y - z)} = \frac{-3}{5}; \quad \frac{1}{y^2(z - x)} = \frac{1}{3}; \quad \frac{1}{z^2(x - y)} = 3.$ $x^2(y - z) = \frac{-5}{3} \quad (1), \quad y^2(z - x) = 3 \quad (2), \quad z^2(x - y) = \frac{1}{3} \quad (3).$ Từ giả thiết ta có: Nhân theo vế các đẳng thức (1), (2), (3) ta được: $x^2 y^2 z^2 (x - y)(y - z)(z - x) = \frac{-5}{3} \quad (4)$	0,5 0,5

	Cộng theo vế các đẳng thức (1), (2), (3) ta được: $x^2(y-z) + y^2(z-x) + z^2(x-y) = \frac{5}{3}$ Phân tích đa thức $x^2(y-z) + y^2(z-x) + z^2(x-y)$ thành nhân tử được: $x^2(y-z) + y^2(z-x) + z^2(x-y) = -(x-y)(y-z)(z-x)$ Do đó $\frac{(x-y)(y-z)(z-x)}{3} = \frac{-5}{3}$ (5). Từ (4) và (5) suy ra: A = 1.	0,5 0,5
II (4đ)	1) Tìm các cặp số nguyên dương (x, y) với x, y nguyên tố cùng nhau và thỏa mãn phương trình $2(x^3 - x) = y^3 - y \quad (1)$ Phương trình (1) $\Leftrightarrow x^3 + x^3 + (-y)^3 = x + x - y = 2x - y$ $\Leftrightarrow x^3 + x^3 + (-y)^3 - 3xx(-y) + 3xx(-y) = 2x - y$ Áp dụng hằng đẳng thức $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$ ta có $(x + x - y)(x^2 + x^2 + y^2 - xx + xy + xy) - 3x^2y = 2x - y$ $\Leftrightarrow (2x - y)(x^2 + 2xy + y^2) - (2x - y) = 3x^2y$ $\Leftrightarrow (2x - y)[(x + y)^2 - 1] = 3x^2y \quad (2)$ $\Rightarrow 3x^2y : 2x - y \quad (3)$ Đặt $UCLN(x^2, 2x - y) = d \quad (d \in N^*)$ $\Rightarrow \begin{cases} x^2 : d \\ 2x - y : d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x^2 : d \\ (2x - y)(2x + y) : d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x^2 : d \\ 4x^2 - y^2 : d \end{cases}$ $\Rightarrow y^2 : d \Rightarrow \begin{cases} x^2 : d \\ y^2 : d \end{cases} \text{ mà } (x, y) = 1 \Rightarrow d = 1 \text{ nên từ (3) } \Rightarrow 3y : 2x - y \quad (4).$ Mặt khác để ý $2x - y : 2x - y \Rightarrow 6x - 3y : 2x - y \quad (5)$. Từ (4) và (5) $\Rightarrow 6x : 2x - y$ Tương tự ta có $(x, y) = 1 \Rightarrow (x, 2x - y) = 1 \Rightarrow 6 : 2x - y$ Từ (2) $\Rightarrow 2x - y \in N^* \Rightarrow 2x - y \in U(6) = \{1; 2; 3; 6\}$	0,5 0,5 0,5

	Mặt khác $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{x^2 - 1}{y + 1} \cdot \frac{y^2 - 1}{x + 1} = (x - 1)(y - 1) \in \mathbb{Z} \Rightarrow ac : bd \Rightarrow ac : d \Rightarrow a : d \text{ (vi } (c, d) = 1) \text{ (2)}$ $a : b \Rightarrow b = 1 \text{ (vi } b > 0, (a, b) = 1) \Rightarrow \frac{x^2 - 1}{y + 1} = a \in \mathbb{Z} \Rightarrow x^2 - 1 : y + 1$ Từ (1), (2) suy ra $\Rightarrow x^4 + y^9 = (x^4 - 1) + (y^9 + 1) = (x^2 - 1)(x^2 + 1) + (y^3 + 1)(y^6 - y^3 + 1) : y + 1$ Vậy $x^4 + y^9$ chia hết cho $y + 1$.	0,5
III (4đ)	Giải phương trình: $\sqrt[3]{81x - 8} = x^3 - 2x^2 + \frac{4}{3}x - 2$ + Điều kiện xác định: $\forall x \in \mathbb{R}$. + Đặt: $\sqrt[3]{81x - 8} + 2 = 3y \Rightarrow 81x - 8 = (3y - 2)^3$ $\Leftrightarrow 81x = 27y^3 - 54y^2 + 36y$ $\Leftrightarrow 3x = y^3 - 2y^2 + \frac{4}{3}y$ $\begin{cases} 3x = y^3 - 2y^2 + \frac{4}{3}y \\ 3y = x^3 - 2x^2 + \frac{4}{3}x \end{cases}$ + Kết hợp đề bài, ta có: $\Rightarrow (x - y) \left(x^2 + xy + y^2 - 2x - 2y + \frac{13}{3} \right) = 0$	0,5
	+ Ta có: $x^2 + xy + y^2 - 2x - 2y + \frac{13}{3}$ $= \frac{1}{2}(x + y)^2 + \frac{1}{2}(x - 2)^2 + \frac{1}{2}(y - 2)^2 + \frac{1}{3} > \forall x, y.$ $\Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow x = y$	0,5
	$\Rightarrow 3x = x^3 - 2x^2 + \frac{4}{3}x \Leftrightarrow x \left(x^2 - 2x - \frac{5}{3} \right) = 0$ $\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{3 \pm 2\sqrt{6}}{3} \end{cases}$	0,5
		0,5

	$\left\{0; \frac{3 \pm 2\sqrt{6}}{3}\right\}$ * Vậy phương trình có tập nghiệm	
	2. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2(y+1)=6y-2 \\ x^4y^2+2x^2y^2+y(x^2+1)=12y^2-1 \end{cases}$ + Xét xối y=0, hệ phương trình không có nghiệm. + Ta có: $HPT \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + \frac{x^2}{y} = 6 - \frac{2}{y} \\ x^4 + 2x^2 + \frac{x^2+1}{y} = 12 - \frac{1}{y^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + \frac{x^2}{y} = 6 - \frac{2}{y} \\ (x^2+1)^2 + \frac{x^2+1}{y} + \frac{1}{y^2} = 13 \end{cases}$ + Đặt: $u = x^2 + 1; v = \frac{1}{y}$. Ta có: $\begin{cases} u - 1 + (u - 1)v = 6 - 2v \\ u^2 + uv + v^2 = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v + uv = 7 \\ u^2 + uv + v^2 = 13 \end{cases}$ $\Rightarrow \begin{cases} u + v = 4 \\ uv = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = 1; v = 3 \\ u = 3; v = 1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} u + v = -5 \\ uv = 12 \end{cases} \text{ (vô nghiệm)}$ + TH1: $\begin{cases} x^2 + 1 = 1 \\ \frac{1}{y} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{1}{3} \end{cases}$ + TH2: $\begin{cases} x^2 + 1 = 3 \\ \frac{1}{y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{2} \\ y = 1 \end{cases}$ (vô nghiệm). * Vậy hệ phương trình có nghiệm: $\left(0; \frac{1}{3}\right); (\sqrt{2}; 1)(-\sqrt{2}; 1)$	0,5 0,5 0,5 0,5

IV
(6đ)



1) Chứng minh hai tam giác BMI và INC đồng dạng.

+ Vì AB, AC, BC là các tiếp tuyến của (I)

Áp dụng tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau, ta có:

$$\widehat{BIC} = \frac{1}{2}(\widehat{FID} + \widehat{FIE}) = \frac{1}{2}(360^\circ - \widehat{DIE})$$

$$= 180^\circ - \frac{1}{2}\widehat{DIE} = 180^\circ - \widehat{DIA}$$

0,5

$\triangle AMN$ cân tại A, phân giác AI đồng thời là đường cao.

$\Rightarrow \triangle AIM$ vuông tại I, đường cao ID

0,5

$\Rightarrow \widehat{DIA} = \widehat{DMI}$ (cùng phụ với $\widehat{DIM}$)

$\Rightarrow \widehat{BIC} = 180^\circ - \widehat{DMI} = \widehat{BMI}$

0,5

+ Kết hợp $\widehat{IBC} = \widehat{MBI} \Rightarrow \triangle BMI$ và $\triangle BIC$ đồng dạng (g-g)

	+ Tương tự $\triangle INC$ và $\triangle BIC$ đồng dạng. $\Rightarrow \triangle BMI$ và $\triangle BIC$ đồng dạng.	0,5
	2) Chứng minh tam giác DHK là tam giác cân. + Kẻ $B'P \parallel EF$ ($P \in AC$) Ta có: $\frac{KB'}{KA} = \frac{EP}{EA}$ + Theo t/c hai tiếp tuyến cắt nhau $\Rightarrow \widehat{CEF} = \widehat{CFE}$. $\Rightarrow$ Tứ giác $B'PEF$ là hình thang cân $\Rightarrow EP = FB'$ $\Rightarrow \frac{EP}{EA} = \frac{FB'}{EA} = \frac{FB}{DA} = \frac{DB}{DA}$ (vì $EA = DA; FB' = FB = DB$) $\Rightarrow \frac{KB'}{KA} = \frac{DB}{DA} \Rightarrow KD \parallel BC$ $\Rightarrow \widehat{CFE} = \widehat{DKH}$ (sole trong) + Tương tự, ta có: $HD \parallel AC \Rightarrow \widehat{CEF} = \widehat{DHK}$. + Mà: $\widehat{CEF} = \widehat{CFE} \Rightarrow \widehat{DHK} = \widehat{DKH}$. $\Rightarrow$ Tam giác DHK là tam giác cân tại D.	0,5 0,5 0,5 0,5
	3) Tìm vị trí của F trên (I) để diện tích tam giác ABC nhỏ nhất. + Ta có: $S_{ABC} = S_{AMN} + S_{BMNC}$. + Trong đó: $S_{AMN} = \frac{1}{2} AI \cdot MN$ (không đổi). $S_{BMNC} = S_{BIM} + S_{INC} + S_{BIC}$ $= \frac{1}{2} ID \cdot MB + \frac{1}{2} IE \cdot NC + \frac{1}{2} IF \cdot BC$ Đặt $ID = IE = IF = r$ (không đổi) $S_{BMNC} = \frac{r}{2} (MB + NC + BC) = \frac{r}{2} (MB + NC + BF + CF)$ $= \frac{r}{2} (MB + NC + BD + CE)$ $= \frac{r}{2} (BM + CN + BM + MD + CN + NE)$	0,5

	$= \frac{r}{2}(2BM + 2CN + 2MD) \quad (V\grave{i} \ AD=AE \Rightarrow MD=NE)$ $= r[(BM + CN) + MD] \geq r(2\sqrt{BM \cdot CN} + MD)$ + Vì $\triangle BMI$ và $\triangle BIC$ đồng dạng $\Rightarrow \frac{BM}{IN} = \frac{MI}{NC} \Rightarrow BM \cdot NC = MI \cdot IN = MI^2 = \frac{MN^2}{4}.$ $\Rightarrow S_{ABC} \geq r \left(2 \cdot \frac{MN}{2} + MD \right) = r(MN + MD) \quad \text{không đổi.}$ + Dấu “=” xảy ra khi $BM=NC \Rightarrow AB=AC$ $\Rightarrow \triangle ABC \text{ cân tại } A \Rightarrow AI \perp BC,$ mà $IF \perp BC$ $\Rightarrow A, I, F \text{ thẳng hàng.}$ $\Rightarrow F \text{ là giao điểm của } AI \text{ với đường tròn } (I).$	0,5
V (2đ)	Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + 2b + 3c = 1$. Chứng minh rằng: $\frac{2ab}{a^2 + 4b^2} + \frac{6bc}{4b^2 + 9c^2} + \frac{3ca}{9c^2 + a^2} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{2b} + \frac{1}{3c} \right) \geq \frac{15}{4}$ Đẳng thức xảy ra khi nào? Vì $a + 2b + 3c = 1$ nên $\frac{1}{a} + \frac{1}{2b} + \frac{1}{3c} = \frac{a + 2b + 3c}{a} + \frac{a + 2b + 3c}{2b} + \frac{a + 2b + 3c}{3c}$ $= 3 + \left(\frac{a}{2b} + \frac{2b}{a} \right) + \left(\frac{2b}{3c} + \frac{3c}{2b} \right) + \left(\frac{3c}{a} + \frac{a}{3c} \right) = 3 + \frac{a^2 + 4b^2}{2ab} + \frac{4b^2 + 9c^2}{6bc} + \frac{9c^2 + a^2}{3ca}$ Do đó bất đẳng thức phải chứng minh tương đương với: $\left(\frac{2ab}{a^2 + 4b^2} + \frac{a^2 + 4b^2}{8ab} \right) + \left(\frac{6bc}{4b^2 + 9c^2} + \frac{4b^2 + 9c^2}{24bc} \right) + \left(\frac{3ca}{9c^2 + a^2} + \frac{9c^2 + a^2}{12ca} \right) \geq 3 \quad (1)$ Áp dụng bất đẳng thức Cô – si cho hai số dương, ta có: $\frac{2ab}{a^2 + 4b^2} + \frac{a^2 + 4b^2}{8ab} \geq 2\sqrt{\frac{2ab}{a^2 + 4b^2} \cdot \frac{a^2 + 4b^2}{8ab}} = 1 \quad (2)$ Tương tự: $\frac{6bc}{4b^2 + 9c^2} + \frac{4b^2 + 9c^2}{24bc} \geq 1 \quad (3)$ $\frac{3ca}{9c^2 + a^2} + \frac{9c^2 + a^2}{12ca} \geq 1 \quad (4)$ Cộng theo vế các bất đẳng thức (2), (3), (4) ta suy ra (1). Suy ra đpcm.	0,5 0,5 0,5

	Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = \frac{1}{3}$; $b = \frac{1}{6}$; $c = \frac{1}{9}$	
Chú ý: Học sinh làm cách khác đúng vẫn cho điểm tối đa. Bài hình không vẽ hình hoặc vẽ hình sai không chấm điểm.		