

CD 10: TỈ LỆ THỨC VÀ DÃY TỈ SỐ BẰNG NHAU

Dạng 1: Tìm số hạng chưa biết dựa vào tỉ lệ thức
Dạng 2: Chứng minh đẳng thức
Dạng 3: Chứng minh bất đẳng thức
Dạng 4: Bài toán về dãy tỉ số bằng nhau và chia tỉ lệ

Dạng 1. Tìm số hạng chưa biết dựa vào tỉ lệ thức

A. TRẮC NGHIỆM

Câu 1. (Đề HSG 7 LDP huyện Yên Thế 2022 - 2023)

Cho $\frac{x}{y} = \frac{9}{11}$ và $x + y = 60$. Tính $2x + 3y$?

- A. 50. B. 60. C. 120. D. 153.

Lời giải

Chọn D

$\frac{x}{y} = \frac{9}{11} \Rightarrow \frac{x}{9} = \frac{y}{11}$. Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{x}{9} = \frac{y}{11} = \frac{x+y}{9+11} = \frac{60}{20} = 3$$

$$\text{Do đó } x = 9 \cdot 3 = 27; y = 11 \cdot 3 = 33$$

$$\Rightarrow 2x + 3y = 2 \cdot 27 + 3 \cdot 33 = 153$$

Câu 2. (Đề HSG 7 LDP huyện Yên Thế 2022 - 2023)

Cho $\frac{x}{5} = \frac{y}{4}$ và $x^2 - y^2 = 9$. Tính tổng bình phương hai số x, y .

- A. 41. B. 81. C. 9. D. 25.

Lời giải

Chọn A

$$\frac{x}{5} = \frac{y}{4} \Rightarrow \frac{x^2}{25} = \frac{y^2}{16}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta được:

$$\frac{x^2}{25} = \frac{y^2}{16} = \frac{x^2 - y^2}{25 - 16} = \frac{9}{9} = 1$$

$$\text{Do đó } x^2 = 1 \cdot 25 = 25$$

$$y^2 = 1 \cdot 16 = 16$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = 41$$

Câu 3. (Đề HSG 7 LDP huyện Yên Thế 2022 - 2023)

Cho $\frac{x}{y} = 4$ và $xy = 9$. Khi đó $x^2 + y^2$ bằng bao nhiêu ?

- A. 97. B. 81. C. $\frac{153}{4}$. D. 13.

Lời giải

Chọn C

$$\frac{x}{y} = 4 \Rightarrow \frac{x}{4} = \frac{y}{1} = k \Rightarrow x = 4k, y = k$$

$$xy = 9 \Rightarrow 4k \cdot k = 9 \Rightarrow k = \pm \frac{3}{2}$$

Do

$$k = \pm \frac{3}{2} \text{ thì } x^2 + y^2 = (4k)^2 + k^2 = \frac{153}{4}$$

Câu 4. (HSG 7 huyện Thanh Thủy, 2021 - 2022)

Cho hai số x, y biết $\frac{x}{y} = \frac{5}{7}$ và $x + y = 72$. Vậy $2x - 3y$ bằng

- A. 30 B. -66 C. -44 D. 40

Lời giải

Chọn B

$$\frac{x}{y} = \frac{5}{7} \Rightarrow \frac{x}{5} = \frac{y}{7}$$

Ta có:

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{x}{5} = \frac{y}{7} = \frac{x+y}{5+7} = \frac{72}{12} = 6$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{5} = 6 \\ \frac{y}{7} = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 30 \\ y = 42 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2x - 3y = 2 \cdot 30 - 3 \cdot 42 = -66$$

$$\text{Vậy } 2x - 3y = -66.$$

Câu 5. (HSG 7 huyện THANH SƠN 2022 - 2023)

Cho $A = \frac{5a+2b+8c}{-7a-4b+6c}$ với $a:b:c = 1:2:3$ vậy A bằng:

- A. 13. B. -5. C. 11. D. 9.

Lời giải

Chọn C

$$a:b:c = 1:2:3 \Rightarrow \frac{a}{1} = \frac{b}{2} = \frac{c}{3} = k \Rightarrow a = k; b = 2k; c = 3k$$

$$A = \frac{5a+2b+8c}{-7a-4b+6c} = \frac{5k+4k+24k}{-7k-8k+18k} = \frac{33k}{3k} = 11$$

Câu 6. (HSG 7 huyện THANH SƠN 2022 - 2023)

Cho $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{a}$ và $a+b+c \neq 0$ giá trị của $A = \frac{a^{19}b^4c^{2023}}{a^{2046}}$ là:

- A.** 1 . **B.** -1 . **C.** 0 . **D.** 3 .

Lời giải

Chọn A

Vì $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{a}$, áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{a} = \frac{a+b+c}{b+c+a} = 1 \Rightarrow a=b=c$$

$$\Rightarrow A = \frac{a^{19}b^4c^{2023}}{a^{2046}} = \frac{a^{19}a^4a^{2023}}{a^{2046}} = \frac{a^{2046}}{a^{2046}} = 1$$

Câu 7. (HSG 7 huyện LÂM THAO 2022 - 2023)

Cho $5x=3y$. Giá trị của biểu thức $A = \frac{8x^2+3y^2-2xy}{10x^2-3y^2}$ là.

- A.** $\frac{9}{7}$. **B.** $\frac{39}{25}$. **C.** $\frac{197}{223}$. **D.** $\frac{39}{5}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $5x=3y \Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{y}{5}$

Đặt $\frac{x}{3} = \frac{y}{5} = k \Rightarrow x=3k; y=5k$

Suy ra $A = \frac{8x^2+3y^2-2xy}{10x^2-3y^2} = \frac{8.9k^2+3.25k^2-2.3k.5k}{10.9k^2-3.25k^2} = \frac{117k^2}{15k^2} = \frac{117}{15} = \frac{39}{5}$

Câu 8. (HSG 7 đề khảo sát lần 3, 2022 - 2023)

Cho $3(a+b)=2(3a-b)$. Tỉ số của hai số a và b bằng bao nhiêu?

- A.** $\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{3}{5}$. **C.** $\frac{5}{3}$. **D.** $\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn A

$$3(a+b)=2(3a-b)$$

$$\Rightarrow 3a+3b=6a-2b$$

$$\Rightarrow 3a=5b \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{5}{3}$$

Câu 9. (HSG 7 đề khảo sát lần 3, 2022 - 2023)

Nếu $\frac{a}{2} = \frac{b}{3}$ và $\frac{b}{4} = \frac{c}{5}$ thì a, b, c tỉ lệ với

- A. 12;8;15 . B. 15;12;8 . C. 8;12;15 . D. 8;12;20 .

Lời giải

Chọn C

$$\frac{a}{2} = \frac{b}{3} \Rightarrow \frac{a}{8} = \frac{b}{12}$$

Ta có:

$$\frac{b}{4} = \frac{c}{5} \Rightarrow \frac{b}{12} = \frac{c}{15}$$

$$\frac{a}{8} = \frac{b}{12} = \frac{c}{15} \Rightarrow a;b;c \text{ tỉ lệ với } 8;12;15 .$$

Câu 10. (HSG 7 huyện Tân Yên 2022 - 2023)

Cho dãy tỉ số bằng nhau $\frac{2a+b+c+d}{a} = \frac{a+2b+c+d}{b} = \frac{a+b+2c+d}{c} = \frac{a+b+c+2d}{d}$ và

biểu thức $M = \frac{a+b}{c+d} + \frac{b+c}{d+a} + \frac{c+d}{a+b} + \frac{d+a}{b+c}$. Giá trị của biểu thức M là

- A. 4 . B. -4 . C. 4 hoặc -4 . D. 16 .

Lời giải

Chọn C

$$\begin{aligned} \frac{2a+b+c+d}{a} &= \frac{a+2b+c+d}{b} = \frac{a+b+2c+d}{c} = \frac{a+b+c+2d}{d} \\ \text{Ta có:} \\ \Rightarrow 1 + \frac{a+b+c+d}{a} &= 1 + \frac{a+b+c+d}{b} = 1 + \frac{a+b+c+d}{c} = 1 + \frac{a+b+c+d}{d} \\ \Rightarrow \frac{a+b+c+d}{a} &= \frac{a+b+c+d}{b} = \frac{a+b+c+d}{c} = \frac{a+b+c+d}{d} \quad (1) \end{aligned}$$

+ Nếu $a+b+c+d \neq 0$ thì từ (1) $\Rightarrow a=b=c=d$

$$Q = \frac{a+b}{c+d} + \frac{b+c}{d+a} + \frac{c+d}{a+b} + \frac{d+a}{b+c} = 1+1+1+1=4$$

Khi đó,

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b = -(c+d) \\ b+c = -(a+d) \\ c+d = -(a+b) \\ d+a = -(b+c) \end{cases}$$

+ Với $a+b+c+d = 0$

$$\begin{aligned} Q &= \frac{a+b}{c+d} + \frac{b+c}{d+a} + \frac{c+d}{a+b} + \frac{d+a}{b+c} = \frac{-(c+d)}{c+d} + \frac{-(d+a)}{d+a} + \frac{-(a+b)}{a+b} + \frac{-(b+c)}{b+c} \\ &= -1-1-1-1 = -4 \end{aligned}$$

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 huyện Ứng Hòa, 2021 - 2022)

Cho $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{a}$ và $a+b+c=2022$. Tính a, b, c ?

Lời giải

Ta có: $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{a}$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{a} = \frac{a+b+c}{b+c+a} = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{b} = 1 \\ \frac{b}{c} = 1 \\ \frac{c}{a} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = b \\ b = c \\ c = a \end{cases} \Rightarrow a = b = c$$

Mà $a + b + c = 2022 \Rightarrow 3a = 2022 \Rightarrow a = 674 \Rightarrow a = b = c = 674$

Vậy $a = b = c = 674$.

Câu 2. (HSG 7 huyện Thường Tín 2018 - 2019)

Cho $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{a}$ và $a + b + c = 2019$. Tính a, b, c .

Lời giải

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{a} = \frac{a+b+c}{a+b+c} = \frac{2019}{2019} = 1$$

Từ $\frac{a}{b} = 1 \Rightarrow a = b$

$$\frac{b}{c} = 1 \Rightarrow b = c$$

$$a = b = c = \frac{2019}{3} = 673$$

Suy ra

Câu 3. (HSG 7 trường Thiệu Vận, huyện Thiệu Hóa 2022 - 2023)

Cho $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{a}$ và $a + b + c = 2025$. Tính a, b, c

Lời giải

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{a} = \frac{a+b+c}{a+b+c} = 1 \Rightarrow \frac{a}{b} = 1 \Rightarrow a = b$$

Tương tự $b = c$

$$\Rightarrow a = b = c = \frac{2025}{3} = 675$$

Câu 4. (HSG 7. Trường THCS Ân Tường Đông.2014 – 2015)

Tìm các số a, b, c biết: $\frac{a}{3} = \frac{b}{5} = \frac{c}{7}$ và $a + b - c = 10$

Lời giải

Theo tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có: $\frac{a}{3} = \frac{b}{5} = \frac{c}{7} = \frac{a+b+c}{3+5+7} = 10$

Từ $\frac{a}{3} = 10 \Rightarrow a = 30$

Từ $\frac{b}{5} = 10 \Rightarrow b = 50$

Từ $\frac{c}{7} = 10 \Rightarrow c = 70$

Vậy $a = 30, b = 50, c = 70$

Câu 5. (HSG 7 trường Thiệu Châu 2022 - 2023; trường THCS Hiền Quan 2018 - 2019)

Tìm các số a, b, c biết rằng: $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4}$ và $a + 2b - 3c = -20$

Lời giải

$$\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} \Rightarrow \frac{a}{2} = \frac{2b}{6} = \frac{3c}{12} = \frac{a+2b-3c}{2+6-12} = \frac{-20}{-4} = 5 \Rightarrow \begin{cases} a = 10 \\ b = 15 \\ c = 20 \end{cases}$$

Câu 6. (HSG 7 trường Thống Nhất, huyện Hưng Hà năm 2022 - 2023; trường Tư Nghĩa, huyện Nghĩa Điền 2017 - 2018)

Tìm x, y, z biết: $\frac{x}{4} = \frac{y}{3} = \frac{z}{9}$ và $x - 3y + 4z = 62$

Lời giải

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{x}{4} = \frac{y}{3} = \frac{z}{9} = \frac{3y}{9} = \frac{4z}{36} = \frac{x-3y+4z}{4-9+36} = \frac{x-3y+4z}{31} = \frac{62}{31} = 2$$

Suy ra $x = 4.2 = 8$; $y = 3.2 = 6$; $z = 9.2 = 18$

Vậy $x = 8; y = 6; z = 18$

Câu 7. (HSG 7 huyện Bát Xát, 2021 - 2022)

Tìm các số x, y, z biết $\frac{x}{10} = \frac{y}{6} = \frac{z}{21}$ và $5x + y - 2z = 28$

Lời giải

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{x}{10} = \frac{y}{6} = \frac{z}{21} = \frac{5x}{50} = \frac{y}{6} = \frac{2z}{42} = \frac{5x+y-2z}{50+6-42} = \frac{28}{14} = 2$$

$$\frac{x}{10} = 2 \Rightarrow x = 2.10 = 20$$

$$\frac{y}{6} = 2 \Rightarrow y = 6.2 = 12$$

$$\frac{z}{21} = 2 \Rightarrow z = 21.2 = 42$$

Vậy $x = 20, y = 12, z = 42$

Câu 8. (HSG 7 huyện Trực Ninh 2020 - 2021)

Tìm x, y biết: $\frac{2x-1}{5} = \frac{3y-2}{3}$ và $x+y=2$.

Lời giải

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{2x-1}{5} = \frac{3y-2}{3} = \frac{6x-3}{15} = \frac{6y-4}{6} = \frac{6x-3+6y-4}{15+6} = \frac{6(x+y)-7}{21} = \frac{6.2-7}{21} = \frac{5}{21}$$

$x+y=2$)

Từ $\frac{2x-1}{5} = \frac{3y-2}{3} = \frac{5}{21}$ suy ra $\begin{cases} 42x-21=25 \\ 63y-42=15 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 42x=46 \\ 63y=57 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{23}{21} \\ y=\frac{19}{21} \end{cases}$$

Vậy $x = \frac{23}{21}; y = \frac{19}{21}$.

Câu 9. (HSG 7 Tp Ninh Bình 2022 - 2023; huyện Giao Thủy 2016 - 2017)

Tìm x, y biết: $\frac{x}{y} = \frac{8}{5}$ và $5x+4y=120$

Lời giải

$$\frac{x}{y} = \frac{8}{5} \Rightarrow \frac{x}{8} = \frac{y}{5}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau:

$$\frac{x}{8} = \frac{y}{5} = \frac{5x}{40} = \frac{4y}{20} = \frac{5x+4y}{40+20} = \frac{120}{60} = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=2.8=16 \\ y=2.5=10 \end{cases}$$

Câu 10. (HSG 7 huyện Quế Sơn 2022 - 2023; huyện Kim Sơn 2017 - 2018; huyện Hiệp Hòa 2016 - 2017)

Tìm x, y biết $\frac{4+x}{7+y} = \frac{4}{7}$ và $x+y=22$

Lời giải

$$\frac{4+x}{7+y} = \frac{4}{7} \Rightarrow 7(4+x) = 4(7+y)$$

$$\Rightarrow 28 + 7x = 28 + 4y$$

$$\Rightarrow 7x = 4y \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{4}{7} \Rightarrow \frac{x}{4} = \frac{y}{7}$$

$$\frac{x}{4} = \frac{y}{7} = \frac{x+y}{4+7} = \frac{22}{11} = 2$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau:

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{4} = 2 \Rightarrow x = 8 \\ \frac{y}{7} = 2 \Rightarrow y = 14 \end{cases}$$

Vậy $x = 8; y = 14$

Câu 11. (HSG 7 huyện Việt Yên 2016 - 2017)

Tìm x, y, z biết: $\frac{4+x}{7+y} = \frac{4}{7}$ và $x+y=55$

Lời giải

$$\frac{4+x}{7+y} = \frac{4}{7} \Rightarrow 28 + 7x = 28 + 4y \Rightarrow 7x = 4y \Rightarrow \frac{x}{4} = \frac{y}{7}$$

$$\frac{x}{4} = \frac{y}{7} = \frac{x+y}{4+7} = \frac{55}{11} = 5$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau:

$$\Rightarrow x = 20; y = 35$$

Câu 12. (HSG 7 huyện Vũ Thư, 2022 - 2023)

Tìm x, y, z biết: $\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{4} = \frac{z-5}{6}$ và $x+y+z=27$

Lời giải

$$\text{Đặt } \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{4} = \frac{z-5}{6} = k \Rightarrow x = 2k+1; y = 4k-3; z = 6k+5$$

$$\text{Vì } x+y+z=27 \Rightarrow 2k+1+4k-3+6k+5=27$$

$$\Rightarrow 12k+3=27 \Rightarrow 12k=24 \Rightarrow k=2$$

$$\text{Với } k=2 \text{ ta có: } x=2.2+1=5; y=4.2-3=5; z=6.2+5=17$$

$$\text{Vậy } (x, y, z) = (5; 5; 17)$$

Câu 13. (HSG 7 huyện Văn Bàn 2022 - 2023)

Tìm x, y, z biết: $\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-5}{6}$ và $5z-3x-4y=50$

Lời giải

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{4} = \frac{z-5}{6} = \frac{5(z-5) - 3(x-1) - 4(y+3)}{2} = \frac{(5z-3x-4y)-34}{8} = \frac{50-34}{8} = 2$$

$$\Rightarrow \frac{x-1}{2} = 2 \Rightarrow x-1=4 \Rightarrow x=5$$

$$\frac{y+3}{4} = 2 \Rightarrow y+3=8 \Rightarrow y=5$$

$$\frac{z-5}{6} = 2 \Rightarrow z-5=12 \Rightarrow z=17$$

$$(x, y, z) = (5; 5; 17)$$

Vậy

Câu 14. (HSG 7 huyện Trà My, tỉnh Quảng Nam, trường Trà My 2022 - 2023)

Tìm x, y, z biết $\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-2}{3}$ và $x-3y+4z=4$

Lời giải

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-2}{3} = \frac{x-1}{2} = \frac{3y-9}{12} = \frac{4z-8}{12} = \frac{x-1-3y+9+4z-8}{2-12+12} = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x-1}{2} = 2 \Rightarrow x-1=4 \Rightarrow x=5 \\ \frac{y-3}{4} = 2 \Rightarrow y-3=8 \Rightarrow y=11 \\ \frac{z-2}{3} = 2 \Rightarrow z-2=6 \Rightarrow z=8 \end{cases}$$

Vậy $x=5; y=11; z=8$

Câu 15. (HSG 7 trường Võ Thị Sáu; trường Kim Trung 2022 - 2023; trường Hồng Liên; trường Phương Trung 2018 - 2019)

Cho $\frac{a-1}{2} = \frac{b+3}{4} = \frac{c-5}{6}$ và $5a-3b-4c=46$. Tìm a, b, c .

Lời giải

Ta có: $\frac{a-1}{2} = \frac{b+3}{4} = \frac{c-5}{6} = \frac{5.(a-1)}{5.2} = \frac{3.(b+3)}{3.4} = \frac{4.(c-5)}{4.6} = \frac{5a-5}{10} = \frac{3b+9}{12} = \frac{4c-20}{24}$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{a-1}{2} = \frac{b+3}{4} = \frac{c-5}{6} = \frac{5a-5}{10} = \frac{3b+9}{12} = \frac{4c-20}{24}$$

$$= \frac{(5a-5) - (3b+9) - (4c-20)}{10-12-24} = \frac{5a-3b-4c+6}{-26} = \frac{46+6}{-26} = \frac{52}{-26} = -2$$

Suy ra: $\frac{a-1}{2} = -2 \Rightarrow a-1=-4 \Rightarrow a=-3$

$$\frac{b+3}{4} = -2 \Rightarrow b+3 = -8 \Rightarrow b = -11$$

$$\frac{c-5}{6} = -2 \Rightarrow c-5 = -12 \Rightarrow c = -7$$

$$(a; b; c) = (-3; -11; -7)$$

Vậy

Câu 16. (HSG 7 huyện Hưng Hà năm 2022 - 2023)

Tìm x, y, z biết: $\frac{3x-2y}{4} = \frac{4y-3z}{2} = \frac{2z-4x}{3}$ và $x-2y+3z=8$

Lời giải

Ta có: $\frac{3x-2y}{4} = \frac{4y-3z}{2} = \frac{2z-4x}{3} = \frac{12x-8y}{16} = \frac{8y-6z}{4} = \frac{6z-12x}{9}$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{12x-8y}{16} = \frac{8y-6z}{4} = \frac{6z-12x}{9} = \frac{12x-8y+8y-6z+6z-12x}{16+4+9} = 0$$

Suy ra: $12x-8y=0; 8y-6z=0; 6z-12x=0$

$$\Rightarrow 12x=8y=6z \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} = \frac{x-2y+3z}{2-6+12} = \frac{8}{8} = 1 \Rightarrow x=2; y=3; z=4$$

Vậy $x=2; y=3; z=4$

Câu 17. (HSG 7 huyện Anh Sơn năm 2022 - 2023)

Tìm x, y, z biết: $\frac{3x-2y}{4} = \frac{2z-4x}{3} = \frac{4y-3z}{2}$ và $x+y+z=72$

Lời giải

Ta có: $\frac{3x-2y}{4} = \frac{2z-4x}{3} = \frac{4y-3z}{2} \Rightarrow \frac{4(3x-2y)}{16} = \frac{3(2z-4x)}{9} = \frac{2(4y-3z)}{4}$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{4(3x-2y)}{16} = \frac{3(2z-4x)}{9} = \frac{2(4y-3z)}{4} = \frac{4(3x-2y)+3(2z-4x)+2(4y-3z)}{16+9+4} = 0$$

Suy ra:

$$\left. \begin{array}{l} 3x-2y=0 \Rightarrow 3x=2y \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{3} \\ 4y-3z=0 \Rightarrow 4y=3z \Rightarrow \frac{y}{3} = \frac{z}{4} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} = \frac{x+y+z}{2+3+4} = \frac{72}{9} = 8 \Rightarrow x=8.2=16; y=8.3=24; z=8.4=32$$

Vậy $x=16$, $y=24$, $z=32$.

Câu 18. (HSG 7 huyện Kinh Môn 2022 - 2023; huyện Bá Thước 2021 - 2022; huyện Sơn Trà 2018 - 2019; huyện Bồ Trạch; huyện Cẩm Phả 2017 - 2018; huyện Thiệu Hóa 2016 - 2017; huyện Triệu Sơn 2015 - 2016)

Tìm x, y, z , biết: $\frac{3x-2y}{4} = \frac{2z-4x}{3} = \frac{4y-3z}{2}$ và $x+y+z=18$

Lời giải

Ta có $\frac{3x-2y}{4} = \frac{2z-4x}{3} = \frac{4y-3z}{2} \Rightarrow \frac{4(3x-2y)}{16} = \frac{3(2z-4x)}{9} = \frac{2(4y-3z)}{4}$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta được

$$\frac{4(3x-2y)}{16} = \frac{3(2z-4x)}{9} = \frac{2(4y-3z)}{4} = \frac{12x-8y+6z-12x+8y-6z}{16+9+4} = 0$$

$$*) \quad \frac{4(3x-2y)}{16} = 0 \Rightarrow 3x=2y \Rightarrow 12x=8y \quad (1)$$

$$*) \quad \frac{3(2z-4x)}{9} = 0 \Rightarrow 2z=4x \Rightarrow 6z=12x \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) Suy ra } 12x=8y=6z \Rightarrow \frac{12x}{48} = \frac{8y}{48} = \frac{6z}{48} \Rightarrow \frac{x}{4} = \frac{y}{6} = \frac{z}{8}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta được

$$\frac{x}{4} = \frac{y}{6} = \frac{z}{8} = \frac{x+y+z}{4+6+8} = \frac{18}{18} = 1 \quad (\text{vì } x+y+z=18)$$

$$\Rightarrow x=4; y=6; z=8$$

Vậy $x=4$; $y=6$; $z=8$

Câu 19. (HSG huyện Bình Long; huyện Vũ Thư 2022 - 2023; huyện Trục Ninh 2018 - 2019; huyện Tam Đur 2017 - 2018)

Tìm ba số $a; b; c$ biết: $\frac{3a-2b}{5} = \frac{2c-5a}{3} = \frac{5b-3c}{2}$ và $a+b+c=-50$.

Lời giải

$$\frac{3a-2b}{5} = \frac{2c-5a}{3} = \frac{5b-3c}{2} \Rightarrow \frac{15a-10b}{25} = \frac{6c-15a}{9} = \frac{10b-6c}{4}$$

Ta có:

Theo tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\text{Suy ra: } \begin{cases} 15a=10b \\ 6c=15a \\ 10b=6c \end{cases} \Rightarrow 15a=10b=6c \Rightarrow \frac{15a}{90} = \frac{10b}{90} = \frac{6c}{90} \Rightarrow \frac{a}{6} = \frac{b}{9} = \frac{c}{15}$$

$$\frac{a}{6} = \frac{b}{9} = \frac{c}{15} = \frac{a+b+c}{6+9+15} = \frac{-50}{30} = \frac{-5}{3}$$

Theo tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$a = 6 \cdot \frac{-5}{3} = -10 \quad b = 9 \cdot \frac{-5}{3} = -15 \quad c = 15 \cdot \frac{-5}{3} = -25$$

Suy ra:

$$\text{Vậy } a = -10, b = -15, c = -25$$

Câu 20. (HSG 7 huyện Hưng Hà, trường Lê Tư Thành 2022 - 2023)

Tim x, y, z biết: $\frac{3x-2y}{5} = \frac{2z-5x}{3} = \frac{5y-3z}{2}$ và $x+y+z=50$

Lời giải

Từ $\frac{3x-2y}{5} = \frac{2z-5x}{3} = \frac{5y-3z}{2} \Rightarrow \frac{15x-10y}{25} = \frac{6z-15x}{9} = \frac{10y-6z}{4}$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau có:

$$\frac{15x-10y}{25} = \frac{6z-15x}{9} = \frac{10y-6z}{4} = \frac{15x-10y+6z-15x+10y-6z}{38} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 15x-10y=0 \\ 6z-15x=0 \\ 10y-6z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x=2y \\ 2z=5x \\ 5y=3z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{y}{3} \\ \frac{x}{2} = \frac{z}{5} \\ \frac{z}{5} = \frac{y}{3} \end{cases}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau có:

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5} = \frac{x+y+z}{2+3+5} = \frac{50}{10} = 5$$

Từ đó suy ra $x=10, y=15, z=25$

Câu 21. (HSG 7 huyện Hưng Hà, trường Trần Thủ Độ 2022 - 2023)

Tim x, y, z biết: $\frac{6x-5y}{11} = \frac{7y-6z}{4} = \frac{5z-7x}{30}$ và $4x+2y-z=10$

Lời giải

Ta có $\frac{6x-5y}{11} = \frac{7y-6z}{4} = \frac{5z-7x}{30}$

$$\Rightarrow \frac{7(6x-5y)}{7 \cdot 11} = \frac{5(7y-6z)}{5 \cdot 4} = \frac{6(5z-7x)}{6 \cdot 30}$$

$$\Rightarrow \frac{42x-35y}{77} = \frac{35y-30z}{20} = \frac{30z-42x}{180}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau

$$\Rightarrow \frac{42x-35y}{77} = \frac{35y-30z}{20} = \frac{30z-42x}{180} = \frac{42x-35y+35y-30z+30z-42x}{77+20+180} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{x}{5} = \frac{y}{6} = \frac{z}{7}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có: $\frac{x}{5} = \frac{y}{6} = \frac{z}{7} = \frac{4x+2y-z}{20+12-7} = \frac{2}{5}$

Suy ra $x=2$; $y=\frac{12}{5}$; $z=\frac{14}{5}$.

Câu 22. (HSG 7 trường Trần Thiện; trường Thanh Mai 2018 - 2019)

Tìm các số x, y, z biết:

a) $\frac{x}{10} = \frac{y}{6} = \frac{z}{21}$ và $5x + y - 2z = 28$

b) $3x = 2y$; $7y = 5z$ và $x - y + z = 32$

c) $\frac{2x}{3} = \frac{3y}{4} = \frac{4z}{5}$ và $x + y + z = 49$

Lời giải

a) Theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{x}{10} = \frac{y}{6} = \frac{z}{21} = \frac{5x}{50} = \frac{y}{6} = \frac{2z}{42} = \frac{5x+y-2z}{50+6-42} = \frac{28}{14} = 2$$

Từ $\frac{x}{10} = 2$ suy ra $x = 2 \cdot 10 = 20$

$\frac{y}{6} = 2$ suy ra $y = 2 \cdot 6 = 12$

$\frac{z}{21} = 2$ suy ra $z = 2 \cdot 21 = 42$

Vậy $x=20$; $y=12$; $z=42$.

b) $3x = 2y$; $7y = 5z$ và $x - y + z = 32$

Từ $3x = 2y$ suy ra $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} \Rightarrow \frac{x}{10} = \frac{y}{15}$ (1)

$7y = 5z$ suy ra $\frac{y}{5} = \frac{z}{7} \Rightarrow \frac{y}{15} = \frac{z}{21}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{x}{10} = \frac{y}{15} = \frac{z}{21}$

Theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{x}{10} = \frac{y}{15} = \frac{z}{21} = \frac{x-y+z}{10-15+21} = \frac{32}{16} = 2$$

Từ $\frac{x}{10} = 2$ suy ra $x = 2 \cdot 10 = 20$

$\frac{y}{15} = 2$ suy ra $y = 2 \cdot 15 = 30$

$$\frac{z}{21} = 2 \quad \text{suy ra } z = 2 \cdot 21 = 42$$

Vậy $x = 20; y = 30; z = 42$

$$\frac{2x}{3} = \frac{3y}{4} = \frac{4z}{5} \Rightarrow \frac{x}{18} = \frac{y}{16} = \frac{z}{15}$$

c)

Theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{x}{18} = \frac{y}{16} = \frac{z}{15} = \frac{x+y+z}{18+16+15} = \frac{49}{49} = 1$$

$$\frac{x}{18} = 1 \quad \text{suy ra } x = 1 \cdot 18 = 18$$

$$\frac{y}{16} = 1 \quad \text{suy ra } y = 1 \cdot 16 = 16$$

$$\frac{z}{15} = 1 \quad \text{suy ra } z = 1 \cdot 15 = 15$$

Vậy $x = 18; y = 16; z = 15$

Câu 23. (HSG 7 Thị xã Kinh Môn; trường Thống Nhất; trường Phan Kính Ân huyện Hưng Hà 2022 - 2023; trường Trần Lâm 2021 - 2022; huyện Vĩnh Yên 2018 - 2019; huyện Mỹ Cày; huyện Thái Thụy 2017 - 2018)

Tìm x, y, z biết: $\frac{5z - 6y}{4} = \frac{6x - 4z}{5} = \frac{4y - 5x}{6}$ và $3x - 2y + 5z = 96$

Lời giải

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\begin{aligned} \frac{5z - 6y}{4} = \frac{6x - 4z}{5} = \frac{4y - 5x}{6} &= \frac{20z - 24y}{16} = \frac{30x - 20z}{25} = \frac{24y - 30x}{36} \\ &= \frac{20z - 24y + 30x - 20z + 24y - 30x}{16 + 25 + 36} = 0 \end{aligned}$$

Suy ra $\begin{cases} 5z = 6y \\ 6x = 4z \\ 4y = 5x \end{cases} \quad \text{suy ra } \frac{x}{4} = \frac{y}{5} = \frac{z}{6}$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{x}{4} = \frac{y}{5} = \frac{z}{6} = \frac{3x - 2y + 5z}{12 - 10 + 30} = \frac{96}{32} = 3$$

Suy ra $x = 12; y = 15; z = 18$

Vậy $x = 12; y = 15; z = 18$

Câu 24. (HSG 7 trường Thị Trấn Bến Lức; trường Mường Thanh 2022 - 2023; huyện Hiệp Đức 2018 - 2019)

Tìm a, b, c biết $\frac{12a - 15b}{7} = \frac{20c - 12a}{9} = \frac{15b - 20c}{11}$ và $a + b + c = 48$

Lời giải

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{12a - 15b}{7} = \frac{20c - 12a}{9} = \frac{15b - 20c}{11} = \frac{12a - 15b + 20c - 12a + 15b - 20c}{27} = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{12a - 15b}{7} = 0 \Rightarrow 12a = 15b \\ \frac{20c - 12a}{9} = 0 \Rightarrow 20c = 12a \end{array} \right\} \Rightarrow 12a = 15b = 20c \Rightarrow \frac{a}{12} = \frac{b}{15} = \frac{c}{20}$$

Và $a + b + c = 48$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{a}{12} = \frac{b}{15} = \frac{c}{20} = \frac{a + b + c}{12 + 15 + 20} = \frac{48}{5} = 24$$

$$\Rightarrow a = 20, b = 16, c = 12$$

$$a = 20; b = 16; c = 12$$

Vậy

Câu 25. (HSG 7 huyện Trực Tỉnh 2016 - 2017; huyện Phú Thiện. 2015 – 2016)

Tìm x, y, z biết: $\frac{2x - y}{5} = \frac{3y - 2z}{15}$ và $x + z = 2y$

Lời giải

Từ $x + z = 2y$ ta có:

$$x - 2y + z = 0 \quad \text{hay} \quad 2x - 4y + 2z = 0 \quad \text{hay} \quad 2x - y - 3y + 2z = 0$$

$$\text{Hay} \quad 2x - y = 3y - 2z$$

$$\text{Vậy nếu} \quad \frac{2x - y}{5} = \frac{3y - 2z}{15} \quad \text{thì} \quad 2x - y = 3y - 2z = 0$$

$$2x - y = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}y$$

Từ

$$\text{Từ} \quad 3y - 2z = 0 \quad \text{và} \quad x + z = 2y \Rightarrow x + z + y - 2z = 0 \quad \text{hay} \quad \frac{1}{2}y + y - z = 0$$

$$\text{Hay} \quad \frac{3}{2}y - z = 0 \quad \text{hay} \quad y = \frac{2}{3}z \quad x = \frac{1}{3}z$$

$$\text{Vậy} \quad (x, y, z) = \left(\frac{1}{2}y, y, \frac{3}{2}y \right) \quad \text{với} \quad y \in \mathbb{R}$$

Câu 26. (HSG 7 huyện Thái Thụy năm 2022 - 2023)

Tìm các số x, y, z thỏa mãn: $\frac{xy + 1}{10} = \frac{yz + 2}{27} = \frac{zx + 3}{19}$ và $xy + yz + zx = 50$

Lời giải

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{xy+1}{10} = \frac{yz+2}{27} = \frac{zx+3}{19} = \frac{xy+1+yz+2+zx+3}{10+27+19} = \frac{56}{56} = 1$$

$$\frac{xy+1}{10} = 1 \Rightarrow xy = 9$$

, tương tự ta cũng có:

$$yz = 25; zx = 16$$

$$\Rightarrow (xyz)^2 = 9 \cdot 25 \cdot 16 = 60^2 \Rightarrow xyz = 60 \text{ hoặc } xyz = -60$$

$$xyz = -60 \Rightarrow x = \frac{-12}{5}; y = \frac{-14}{5}; z = \frac{-20}{3}$$

Với

$$xyz = 60 \Rightarrow x = \frac{12}{5}; y = \frac{14}{5}; z = \frac{20}{3}$$

Với

Câu 27. (HSG 7 huyện Nguyệt Ấn 2022 - 2023)

Tìm x, y, z biết $2x = 3y = 5z$ và $x + 3y - 2z = 66$

Lời giải

$$2x = 3y = 5z \Rightarrow \frac{x}{15} = \frac{y}{10} = \frac{z}{6}$$

Ta có:

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{x}{15} = \frac{y}{10} = \frac{z}{6} = \frac{3y}{30} = \frac{2z}{12} = \frac{x+3y-2z}{15+30-12} = \frac{66}{33} = 2$$

$$\Rightarrow \frac{x}{15} = 2 \Rightarrow x = 30$$

$$\Rightarrow \frac{y}{10} = 2 \Rightarrow y = 20$$

$$\Rightarrow \frac{z}{6} = 2 \Rightarrow z = 12$$

$$\text{Vậy } x = 30; y = 20; z = 12$$

Câu 28. (HSG 7 huyện Hưng Hà, trường THCS Tân Tiến 2022 - 2023)

Tìm x, y, z biết: $3x = 4y = 6z$ và $x - y + z = -15$

Lời giải

$$3x = 4y = 6z \Rightarrow \frac{3x}{12} = \frac{4y}{12} = \frac{6z}{12} \Rightarrow \frac{x}{4} = \frac{y}{3} = \frac{z}{2}$$

Ta có:

$$\text{Mà } x - y + z = -15$$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta được:

$$\frac{x}{4} = \frac{y}{3} = \frac{z}{2} = \frac{x-y+z}{4-3+2} = \frac{-15}{3} = -5$$

Do đó:

$$x = -5 \cdot 4 = -20$$

$$y = -5 \cdot 3 = -15$$

$$z = -5.2 = -10$$

Vậy $x = -20$; $y = -15$; $z = -10$.

Câu 29. (HSG 7 Trường THCS Hiền Quan. 2015 - 2016)

Tìm các số x, y, z biết: $12x = 15y = 20z$ và $x + y + z = 48$

Lời giải

$$12x = 15y = 20z \Rightarrow \frac{x}{5} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3}$$

Vì

$$\frac{x}{5} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3} = \frac{x+y+z}{12} = \frac{48}{12} = 4$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta được:

$$\Rightarrow x = 20; y = 16; z = 12$$

Câu 30. (HSG 7 huyện Ứng Hòa đợt 1, 2022 - 2023; huyện Bố Trạch; huyện Vị Thanh 2017 - 2018)

Tìm các số x, y, z biết: $2x = 3y$; $4y = 5z$ và $x + y + z = 11$.

Lời giải

Ta có:

$$\left. \begin{array}{l} 2x = 3y \Leftrightarrow \frac{x}{3} = \frac{y}{2} \Leftrightarrow \frac{x}{15} = \frac{y}{10} \\ 4y = 5z \Leftrightarrow \frac{y}{5} = \frac{z}{4} \Leftrightarrow \frac{y}{10} = \frac{z}{8} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{x}{15} = \frac{y}{10} = \frac{z}{8}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta được:

$$\frac{x}{15} = \frac{y}{10} = \frac{z}{8} = \frac{x+y+z}{15+10+8} = \frac{11}{33} = \frac{1}{3}$$

$$x = \frac{1}{3} \cdot 15 = 5; y = 10 \cdot \frac{1}{3} = \frac{10}{3}; z = 8 \cdot \frac{1}{3} = \frac{8}{3}$$

Như vậy:

Câu 31. (HSG 7 huyện Hà Trung; huyện Chương Mỹ; huyện Hương Sơn 2022 - 2023; huyện Đức Thọ 2021 - 2022; huyện Tân Tạo; huyện Phú Khánh 2018 - 2019; huyện Minh An 2016 - 2017)

Tìm x, y, z biết: $2x = 3y$; $4y = 5z$ và $4x - 3y + 5z = 7$

Lời giải

$$\text{Từ } 2x = 3y; 4y = 5z \Rightarrow 8x = 12y = 15z$$

$$\Rightarrow \frac{x}{15} = \frac{y}{10} = \frac{z}{8} = \frac{4x}{60} = \frac{3y}{30} = \frac{5z}{40} = \frac{4x - 3y + 5z}{60 - 30 + 40} = \frac{7}{70} = \frac{1}{10}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{15} = \frac{y}{10} = \frac{z}{8} = \frac{4x}{60} = \frac{3y}{30} = \frac{5z}{40} = \frac{4x - 3y + 5z}{60 - 30 + 40} = \frac{7}{70} = \frac{1}{10}$$

$$\Rightarrow x = 15 \cdot \frac{1}{10} = \frac{3}{2}; y = 10 \cdot \frac{1}{10} = 1; z = 8 \cdot \frac{1}{10} = \frac{4}{5}$$

$$x = \frac{3}{2}; y = 1; z = \frac{4}{5}$$

Vậy

Câu 32. HSG 7 huyện Cát Tiên 2018 - 2019; huyện Cẩm Khê 2017 - 2018; huyện Tân Kỳ 2015 - 2016)

Tìm x, y, z biết: $2x = 3y, 4y = 5z$ và $x - y - z = 30$

Lời giải

$$2x = 3y \Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{y}{2} \Rightarrow \frac{x}{15} = \frac{y}{10}$$

$$4y = 5z \Rightarrow \frac{y}{5} = \frac{z}{4} \Rightarrow \frac{y}{10} = \frac{z}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{15} = \frac{y}{10} = \frac{z}{8}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{x}{15} = \frac{y}{10} = \frac{z}{8} = \frac{x - y - z}{15 - 10 - 8} = \frac{30}{-3} = -10$$

$$\text{Từ } \frac{x}{15} = -10 \Rightarrow x = 15 \cdot (-10) = -150$$

$$\frac{y}{10} = -10 \Rightarrow y = 10 \cdot (-10) = -100$$

$$\frac{z}{8} = -10 \Rightarrow z = 8 \cdot (-10) = -80$$

Vậy $x = -150; y = -100; z = -80$

Câu 33. (HSG 7 THCS Yên Phong năm 2022 - 2023)

Tìm x, y, z biết: $2x = 3y, 4y = 5z$ và $x - y + z = 26$

Lời giải

$$\text{Từ } 2x = 3y \Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{y}{2} \Rightarrow \frac{x}{15} = \frac{y}{10}; \quad 4y = 5z \Rightarrow \frac{y}{5} = \frac{z}{4} \Rightarrow \frac{y}{10} = \frac{z}{8}$$

$$\text{Suy ra } \frac{x}{15} = \frac{y}{10} = \frac{z}{8}$$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có

$$\frac{x}{15} = \frac{y}{10} = \frac{z}{8} = \frac{x - y + z}{15 - 10 + 8} = \frac{26}{13} = 2$$

$$\text{Suy ra: } x = 15 \cdot 2 = 30; \quad y = 10 \cdot 2 = 20; \quad z = 8 \cdot 2 = 16$$

Vậy $x = 30, y = 20, z = 16$

Câu 34. (HSG 2018 - 2019)

Tìm các số a, b, c biết: $2a = 3b; 5b = 7c$ và $3a - 7b + 5c = -30$

Lời giải

$$\text{Vì } 2a = 3b \Rightarrow \frac{a}{3} = \frac{b}{2} \Rightarrow \frac{a}{21} = \frac{b}{14} \quad (1)$$

$$5b = 7c \Rightarrow \frac{b}{7} = \frac{c}{5} \Rightarrow \frac{b}{14} = \frac{c}{10} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $\frac{a}{21} = \frac{b}{14} = \frac{c}{10}$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{a}{21} = \frac{b}{14} = \frac{c}{10} = \frac{3a}{63} = \frac{7b}{98} = \frac{5c}{50} = \frac{3a - 7b + 5c}{63 - 98 + 50} = \frac{-30}{15} = -2$$

$$\Rightarrow a = -42; b = -28; c = -20$$

Câu 35. (HSG 7 huyện Thiệu Hoá, tỉnh Thanh Hoá, trường THCS Thiệu Đô 2022 – 2023)

Tìm a, b, c biết $3a = 2b, 4b = 5c$ và $-a - b + c = -52$

Lời giải

Từ $3a = 2b \Rightarrow \frac{a}{2} = \frac{b}{3} \Rightarrow \frac{a}{10} = \frac{b}{15}$

Từ $4b = 5c \Rightarrow \frac{b}{5} = \frac{c}{4} \Rightarrow \frac{b}{15} = \frac{c}{12}$

Do đó $\frac{a}{10} = \frac{b}{15} = \frac{c}{12}$

$$\frac{a}{10} = \frac{b}{15} = \frac{c}{12} = \frac{c - a - b}{12 - 10 - 15} = \frac{-52}{-13} = 4$$

$$\Rightarrow \frac{a}{10} = 4 \Rightarrow a = 4.10 = 40$$

$$\frac{b}{15} = 4 \Rightarrow b = 15.4 = 60$$

$$\frac{c}{12} = 4 \Rightarrow c = 4.12 = 48$$

Vậy $a = 40; b = 60; c = 48$

Câu 36. (HSG 7 THCS Hiền Quan, Tam Nông 2017-2018)

Tìm x, y, z biết $3x = 2y, 4y = 5z$ và $x + y - z = 78$

Lời giải

Từ $3x = 2y \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{3} \Rightarrow \frac{x}{10} = \frac{y}{15} \quad (1)$

$+ 4y = 5z \Rightarrow \frac{y}{5} = \frac{z}{4} \Rightarrow \frac{y}{15} = \frac{z}{12} \quad (2)$

$$\Rightarrow \frac{x}{10} = \frac{y}{15} = \frac{z}{12} \text{ và } x + y - z = 78$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{x}{10} = \frac{y}{15} = \frac{z}{12} = \frac{x + y - z}{10 + 15 - 12} = \frac{78}{13} = 6 \Rightarrow x = 60; y = 90; z = 72$$

Câu 37. (HSG huyện Bình Lục 2022 - 2023)

Tìm x, y, z biết $4x = 3y; 7y = 5z$ và $2x + 3y - z = -62$

Lời giải

Theo đề bài, ta có:

$$\left. \begin{array}{l} 4x = 3y \Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{y}{4} \Rightarrow \frac{x}{15} = \frac{y}{20} \\ 7y = 5z \Rightarrow \frac{y}{5} = \frac{z}{7} \Rightarrow \frac{y}{20} = \frac{z}{28} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{x}{15} = \frac{y}{20} = \frac{z}{28}$$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta được:

$$\frac{x}{15} = \frac{y}{20} = \frac{z}{28} = \frac{2x + 3y - z}{30 + 60 - 28} = \frac{-62}{62} = -1$$

Suy ra: $x = -15; y = -20; z = -28$

Vậy $x = -15; y = -20; z = -28$

Câu 38. (HSG 7 huyện Chí Linh; huyện Vĩnh Lộc 2022 – 2023)

Tìm x, y, z biết $5x = 6y; 3y = 2z$ và $5x - 7y + 9z = 250$

Lời giải

Ta có $3x = 2z \Rightarrow 6y = 4z$

$$\text{Mà } 5x = 6y \Rightarrow 5x = 6y = 4z \Rightarrow \frac{5x}{60} = \frac{6y}{60} = \frac{4z}{60} = \frac{x}{12} = \frac{y}{10} = \frac{z}{15}$$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có

$$\frac{x}{12} = \frac{y}{10} = \frac{z}{15} = \frac{5x - 7y + 9z}{5.12 - 7.10 + 9.15} = \frac{250}{125} = 2$$

Do đó

$$\frac{x}{12} = 2 \Rightarrow x = 2.12 = 24$$

$$\frac{y}{10} = 2 \Rightarrow y = 2.10 = 20$$

$$\frac{z}{15} = 2 \Rightarrow z = 2.15 = 30$$

Vậy $x = 24; y = 20; z = 30$

Câu 39. (HSG 7 huyện Thanh Miện 2022 – 2023)

Tìm x, y, z biết: $3x = 4y = 5z - 3x - 4y$ và $2x + y = z - 19$

Lời giải

$$3x = 4y = 5z - 3x - 4y = t \Rightarrow x = \frac{t}{3}; y = \frac{t}{4}; z = \frac{3t}{5}$$

Đặt

$$2x + y = z - 19 \quad \text{suy ra} \quad 2 \cdot \frac{t}{3} + \frac{t}{4} = \frac{3t}{5} - 19$$

Thay vào

$$2 \cdot \frac{t}{3} + \frac{t}{4} - \frac{3t}{5} = -19$$

$$t \cdot \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{4} - \frac{3}{5} \right) = -19$$

$$t \cdot \frac{19}{60} = -19$$

$$t = -60$$

$$\Rightarrow x = -20; y = -15; z = -36$$

Vậy $x = -20; y = -15; z = -36$

Câu 40. (HSG 7 huyện Thường Xuân; huyện Thạch Thành; trường Thị trấn Càng Nàng; trường Yên Mỹ 2022 - 2023)

Tìm x, y, z biết: $3x = 4y = 5z - 3x - 4y$ và $2x + y = z - 38$

Lời giải

Ta có: $3x = 4y = 5z - 3x - 4y$

$$\Rightarrow \frac{3x}{1} = \frac{4y}{1} = \frac{5z - 3x - 4y}{1} = \frac{3x + 4y + 5z - 3x - 4y}{1+1+1} = \frac{5z}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{3x}{1} = \frac{4y}{1} = \frac{5z}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{20} = \frac{y}{15} = \frac{z}{36}$$

Lại có: $2x + y = z - 38 \Rightarrow 2x + y - z = -38$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{x}{20} = \frac{y}{15} = \frac{z}{36} = \frac{2x + y - z}{2 \cdot 20 + 15 - 36} = \frac{-38}{19} = -2$$

Suy ra: $x = -40; y = -30; z = -72$

Vậy: $(x; y; z) = (-40; -30; -72)$

Câu 41. (HSG 7 huyện Hương Khê, tỉnh Hà Tĩnh, 2022 - 2023)

Tìm x, y, z biết: $3(x+1) = 2(y+2); 4(y+2) = 3(z+3)$ và $5x - 3y + z = 50$

Lời giải

$$3(x+1) = 2(y+2) \Rightarrow \frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{3};$$

Ta có:

$$4(y+2) = 3(z+3) \Rightarrow \frac{y+2}{3} = \frac{z+3}{4}$$

$$\text{Suy ra } \frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z+3}{4} = \frac{5x+5}{10} = \frac{3y+6}{9} = \frac{z+3}{4}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta được:

$$\frac{5x+5}{10} = \frac{3y+6}{9} = \frac{z+3}{4} = \frac{5x-3y+z+2}{5} = \frac{48+2}{2} = 10$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} x+1=20 \\ y+2=30 \\ z+3=40 \end{cases} \quad \text{suy ra } \begin{cases} x=19 \\ y=28 \\ z=37 \end{cases}$$

Vậy $x=19; y=28; z=37$

Câu 42. (HSG 7 tỉnh Thái Bình, huyện Quỳnh Phụ 2021 - 2022)

Tìm các số dương x, y, z biết: $\frac{x+2y}{3} = \frac{y+2z}{4} = \frac{z+2x}{5}$ và $xy + yz + 2zx = 280$

Lời giải

+ Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{x+2y}{3} = \frac{y+2z}{4} = \frac{z+2x}{5} = \frac{x+2y+y+2z+z+2x}{3+4+5} = \frac{x+y+z}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{y+2z}{4} = \frac{x+y+z}{4} \Rightarrow y+2z = x+y+z \Rightarrow x = z \quad (1)$$

Và

$$\Rightarrow \frac{x+2y}{3} = \frac{x+y+z}{4} \Rightarrow \frac{x+2y}{3} = \frac{x+y+x}{4} \Rightarrow 4x+8y = 6x+3y \Rightarrow y = \frac{2}{5}x \quad (2)$$

+ Thay (1) và (2) vào $xy + yz + 2zx = 280$ ta được: $x \cdot \frac{2}{5}x + \frac{2}{5}x \cdot x + 2x \cdot x = 280$

+ Giải ra tìm được $x^2 = 100 \Rightarrow x = 10$ (vì $x > 0$)

$$\Rightarrow z = x = 10; y = \frac{2}{5} \cdot 10 = 4.$$

Vậy $x=10; y=4; z=10$.

Câu 43. (HSG 7 huyện Lâm Thao 2022 – 2023)

Tìm x, y, z biết $6x = 4y = 3z$ và $xy - yz + xz = 50$

Lời giải

Từ $6x = 4y = 3z$ và $xy - yz + xz = 50$ suy ra

$$\frac{x}{\frac{1}{6}} = \frac{y}{\frac{1}{4}} = \frac{z}{\frac{1}{3}} \Rightarrow \frac{xy}{\frac{1}{24}} = \frac{yz}{\frac{1}{12}} = \frac{xz}{\frac{1}{18}} = \frac{xy - yz + xz}{\frac{1}{24} - \frac{1}{12} + \frac{1}{18}} = \frac{50}{\frac{1}{72}} = \frac{50}{\frac{1}{72}} = 3600$$

$$\Rightarrow xy = 150, yz = 300, xz = 200$$

$$\frac{x}{\frac{1}{6}} = \frac{y}{\frac{1}{4}} = \frac{z}{\frac{1}{3}} = k \Rightarrow x = \frac{1}{6}k, y = \frac{1}{4}k, z = \frac{1}{3}k$$

Đặt

$$\Rightarrow \frac{1}{6}k \cdot \frac{1}{4}k = 150 \Rightarrow k^2 = 3600 \Rightarrow k = \pm 60$$

$$\Rightarrow x = \pm 10, y = \pm 15, z = \pm 20$$

Vì $6x = 4y = 3z$ nên x, y, z cùng dấu.

$$(x, y, z) = (10; 15; 20), (-10; -15; -20)$$

Vậy

Câu 44. (HSG 7 huyện Hưng Hà, trường Bùi Hữu Diên 2022 - 2023)

Tìm a, b, c biết $3a = 2b, 5a = 3c$ và $ab + bc + ca = -204$.

Lời giải

Ta có $3a = 2b \Rightarrow \frac{a}{2} = \frac{b}{3} \Rightarrow \frac{a}{6} = \frac{b}{9}$

$$5a = 3c \Rightarrow \frac{a}{3} = \frac{c}{5} \Rightarrow \frac{a}{6} = \frac{c}{10}$$

Do đó $\frac{a}{6} = \frac{b}{9} = \frac{c}{10}$

Đặt $\frac{a}{6} = \frac{b}{9} = \frac{c}{10} = k \Rightarrow \begin{cases} a = 6k \\ b = 9k \\ c = 10k \end{cases}$

Ta có $ab + bc + ca = 54k + 90k + 60k = 204k$

Mà $ab + bc + ca = -204 \Rightarrow 204k = -204 \Rightarrow k = -1$.

Từ đó suy ra $a = -6, b = -9, c = -10$.

Câu 45. (HSG 7 huyện Quế Sơn 2022 - 2023; huyện Tiền Hải 2016 - 2017)

Tìm các số x, y, z biết rằng: $3x = 4y, 5y = 6z$ và $xyz = 30$

Lời giải

Ta có: $3x = 4y \Rightarrow \frac{x}{4} = \frac{y}{3} \Rightarrow \frac{x}{8} = \frac{y}{6}$

$$5y = 6z \Rightarrow \frac{y}{6} = \frac{z}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{8} = \frac{y}{6} = \frac{z}{5}$$

Đặt $\frac{x}{8} = \frac{y}{6} = \frac{z}{5} = k \Rightarrow x = 8k, y = 6k, z = 5k$

$$xyz = 30 \Rightarrow 8k \cdot 6k \cdot 5k = 30 \Leftrightarrow k^3 = \frac{1}{8} \Rightarrow k = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x=4, y=3, z=\frac{5}{2}$$

$$x=4; y=3; z=\frac{5}{2}$$

Vậy

Câu 46. (HSG 7 trường THCS Lê Quý Đôn, quận Hà Đông năm 2022 - 2023)

Tìm x, y, z biết: $\frac{4}{3x-2y} = \frac{3}{2z-4x} = \frac{2}{4y-3z}$ và $x+y-z=-10$

Lời giải

Từ $\frac{4}{3x-2y} = \frac{3}{2z-4x} = \frac{2}{4y-3z} \Rightarrow \frac{3x-2y}{4} = \frac{2z-4x}{3} = \frac{4y-3z}{2}$

$$= \frac{4(3x-2y)}{16} = \frac{3(2z-4x)}{9} = \frac{2(4y-3z)}{2} = \frac{(12x-8y)+(6z-12x)+(8y-6z)}{27} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x=2y \\ 2z=4x \\ 4y=3z \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} = \frac{x+y-z}{2+3-4} = -10$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=-20 \\ y=-30 \\ z=-40 \end{cases}$$

Vậy $(x, y, z) = (-20; -30; -40)$

Câu 47. (HSG 7 huyện Quế Võ, năm học 2022 - 2023)

Tìm x, y, z biết $\frac{x}{y} = \frac{9}{7}; \frac{y}{z} = \frac{7}{3}$ và $x-y+z=-15$

Lời giải

Ta có $\frac{x}{y} = \frac{9}{7} \Rightarrow \frac{x}{9} = \frac{y}{7}$ và $\frac{y}{z} = \frac{7}{3} \Rightarrow \frac{y}{7} = \frac{z}{3}$

Suy ra: $\frac{x}{9} = \frac{y}{7} = \frac{z}{3} = \frac{x-y+z}{9-7+3} = \frac{-15}{5} = -3$

Do đó:

$$x = -3.9 = -27$$

$$y = -3.7 = -21$$

$$z = -3.3 = -9$$

Vậy $x = -27; y = -21; z = -9$

Câu 48. (HSG 7 huyện Nông Cống; trường Lý Nam Đế, huyện Hưng Hà 2022 - 2023; huyện Hoàng Hoá 2018 - 2019)

Tìm các số x, y, z thỏa mãn: $\frac{x}{y} = \frac{10}{9}; \frac{y}{z} = \frac{3}{4}$ và $x-y+z=78$

Lời giải

Ta có:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{x}{y} = \frac{10}{9} \Rightarrow \frac{x}{10} = \frac{y}{9} \\ \frac{y}{z} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{y}{3} = \frac{z}{4} \Rightarrow \frac{y}{9} = \frac{z}{12} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{x}{10} = \frac{y}{9} = \frac{z}{12}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta được:

$$\frac{x}{10} = \frac{y}{9} = \frac{z}{12} = \frac{x+y+z}{10+9+12} = \frac{78}{31} = 6$$

$$\Rightarrow x=60; y=54; z=72$$

$$\text{Vậy: } x=60, y=54, z=72$$

Câu 49. (HSG 7 huyện Bình Xuyên 2022 - 2023; huyện Hoàng Hóa 2016 - 2017)

$$\text{Tìm 3 số } x, y, z \text{ biết rằng: } \frac{x}{3} = \frac{y}{7}, \frac{y}{2} = \frac{z}{5}, x+y+z = -110$$

Lời giải

$$\text{Từ } \frac{x}{3} = \frac{y}{7} \Rightarrow \frac{x}{6} = \frac{y}{14}, \frac{y}{2} = \frac{z}{5} \Rightarrow \frac{y}{14} = \frac{z}{35}$$

$$\text{Suy ra: } \frac{x}{6} = \frac{y}{14} = \frac{z}{35}$$

$$\text{Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có: } \frac{x}{6} = \frac{y}{14} = \frac{z}{35} = \frac{x+y+z}{6+14+35} = \frac{-110}{55} = -2$$

$$\text{Suy ra: } x = -2.6 = -12; y = -2.14 = -28; z = -2.25 = -70$$

$$\text{Vậy } x = -12; y = -28; z = -70$$

Câu 50. (HSG 7 trường THCS Tri Thức, huyện Đồng Nai năm 2022 - 2023)

$$\text{Tìm } x, y, z \text{ thỏa mãn: } \frac{x}{10} = \frac{y}{5}; \frac{y}{2} = \frac{z}{3} \text{ và } x+4z=320$$

Lời giải

$$\text{Ta có: } \frac{x}{10} = \frac{y}{5} \Rightarrow \frac{x}{20} = \frac{y}{10} \text{ và } \frac{y}{2} = \frac{z}{3} \Rightarrow \frac{y}{10} = \frac{z}{15}$$

$$\text{Nên: } \frac{x}{20} = \frac{y}{10} = \frac{z}{15} = \frac{4z}{60} = \frac{x+4z}{20+60} = \frac{320}{80} = 4$$

$$\text{Từ } \frac{x}{20} = 4 \Rightarrow x = 20.4 = 80$$

$$\frac{y}{10} = 4 \Rightarrow y = 10.4 = 40$$

$$\frac{z}{15} = 4 \Rightarrow z = 15.4 = 60$$

Câu 51. (HSG 7 huyện Cửa Lò, 2020 - 2021)

Tìm x, y, z biết: $\frac{x}{3} = \frac{y}{6}; \frac{y}{4} = \frac{z}{5}$ và $x + y - z = 24$

Lời giải

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{6}; \frac{y}{4} = \frac{z}{5} \text{ và } x + y - z = 24$$

Ta có:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{x}{3} = \frac{y}{6} \Rightarrow \frac{x}{6} = \frac{y}{12} \\ \frac{y}{4} = \frac{z}{5} \Rightarrow \frac{y}{12} = \frac{z}{15} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{x}{6} = \frac{y}{12} = \frac{z}{15}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta được:

$$\frac{x}{6} = \frac{y}{12} = \frac{z}{15} = \frac{x + y - z}{6 + 12 - 15} = \frac{24}{3} = 8$$

Suy ra: $x = 6.8 = 48; y = 12.8 = 96; z = 15.8 = 120$

Vậy $x = 48; y = 96; z = 120$ là các giá trị cần tìm.

Câu 52. (HSG 7 huyện Tiền Hải, năm học 2022 – 2023)

Tìm $x; y; z$ biết $\frac{x}{4} = \frac{y}{7}; \frac{y}{5} = \frac{z}{6}$ và $x + y - z = 39$

Lời giải

$$\text{Vì } \frac{x}{4} = \frac{y}{7} \Rightarrow \frac{x}{20} = \frac{y}{35} \quad (1);$$

$$\frac{y}{5} = \frac{z}{6} \Rightarrow \frac{y}{35} = \frac{z}{42} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) Suy ra } \frac{x}{20} = \frac{y}{35} = \frac{z}{42}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{x}{20} = \frac{y}{35} = \frac{z}{42} = \frac{x + y - z}{20 + 35 - 42} = \frac{39}{13} = 3$$

Do đó:

$$+) \frac{x}{20} = 3 \Rightarrow x = 60$$

$$\Rightarrow \frac{y}{35} = 3 \Rightarrow y = 105$$

$$+) \frac{z}{42} = 3 \Rightarrow z = 126$$

Vậy $x = 60; y = 105; z = 126$

Câu 53. (HSG 7 huyện Chương Mỹ; trường Văn Lang, huyện Hưng Hà; trường Lê Đình Kiên, huyện Vĩnh Lộc; quận Thủ Đức 2022 - 2023; huyện Lục Ngạn 2021 - 2022)

Tìm x, y, z , biết: $\frac{x}{3} = \frac{y}{4}; \frac{y}{3} = \frac{z}{5}$ và $2x - 3y + z = 6$.

Lời giải

Ta có: $\frac{x}{3} = \frac{y}{4} \Rightarrow \frac{x}{9} = \frac{y}{12}$ (1)

$\frac{y}{3} = \frac{z}{5} \Rightarrow \frac{y}{12} = \frac{z}{20}$ (2)

Từ (1) và (2) Suy ra $\frac{x}{9} = \frac{y}{12} = \frac{z}{20}$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{x}{9} = \frac{y}{12} = \frac{z}{20} = \frac{2x - 3y + z}{2 \cdot 9 - 3 \cdot 12 + 20} = \frac{6}{2} = 3$$

Do đó:

$$\frac{x}{9} = 3 \Rightarrow x = 3 \cdot 9 = 27$$

$$\frac{y}{12} = 3 \Rightarrow y = 3 \cdot 12 = 36$$

$$\frac{z}{20} = 3 \Rightarrow z = 3 \cdot 20 = 60$$

Vậy $x = 27$; $y = 36$; $z = 60$.

Câu 54. (HSG 7 huyện Gia Viễn, tỉnh Ninh Bình, năm học 2022 – 2023)

Tìm x, y, z biết: $\frac{x}{3} = \frac{y}{4}, \frac{y}{3} = \frac{z}{5}$ và $2x - 3y + z = -6$.

Lời giải

$\frac{x}{3} = \frac{y}{4} \Rightarrow \frac{x}{9} = \frac{y}{12}$ (1);

$\frac{y}{3} = \frac{z}{5} \Rightarrow \frac{y}{12} = \frac{z}{20}$ (2)

$$\frac{x}{9} = \frac{y}{12} = \frac{z}{20}.$$

Từ (1) và (2) ta có

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{x}{9} = \frac{y}{12} = \frac{z}{20} = \frac{2x}{18} = \frac{3y}{36} = \frac{z}{20} = \frac{2x - 3y + z}{18 - 36 + 20} = \frac{-6}{2} = -3$$

Ta có: $\frac{x}{9} = -3 \Rightarrow x = 9 \cdot (-3) = -27$

$$\frac{y}{12} = -3 \Rightarrow y = 12 \cdot (-3) = -36$$

$$\frac{z}{20} = -3 \Rightarrow z = 20 \cdot (-3) = -60.$$

$$\text{Vậy } x = -27; y = -36; z = -60$$

Câu 55. (HSG 7 huyện Quỳnh Phụ, năm học 2022 – 2023)

Tìm các số x, y, z biết $\frac{x}{3} = \frac{y}{4}, \frac{y}{3} = \frac{z}{5}$ và $3x - 2y + z = 46$.

Lời giải

Ta có:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{x}{3} = \frac{y}{4} \Rightarrow \frac{x}{9} = \frac{y}{12} \\ \frac{y}{3} = \frac{z}{5} \Rightarrow \frac{y}{12} = \frac{z}{20} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{x}{9} = \frac{y}{12} = \frac{z}{20}$$

$$\text{Đặt } \frac{x}{9} = \frac{y}{12} = \frac{z}{20} = k \Rightarrow x = 9k; y = 12k; z = 20k$$

$$\text{Vì } 3x - 2y + z = 46 \Rightarrow 3 \cdot 9k - 2 \cdot 12k + 20k = 46$$

$$\Rightarrow 27k - 24k + 20k = 46$$

$$\Rightarrow 23k = 46$$

$$\Rightarrow k = 46 : 23 = 2$$

Do đó:

$$x = 2 \cdot 9 = 18$$

$$y = 2 \cdot 12 = 24$$

$$z = 2 \cdot 20 = 40$$

$$x = 18; y = 24; z = 40$$

Vậy:

Câu 56. (HSG 7 huyện Duyên Hải 2016 - 2017)

Tìm các số x, y, z biết rằng: $\frac{x}{3} = \frac{y}{4}, \frac{y}{5} = \frac{z}{7}$ và $2x + 3y - z = 186$

Lời giải

$$\text{Từ giả thiết ta có: } \frac{x}{3} = \frac{y}{4} \Rightarrow \frac{x}{15} = \frac{y}{20} \quad \text{và} \quad \frac{y}{5} = \frac{z}{7} \Rightarrow \frac{y}{20} = \frac{z}{28}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{15} = \frac{y}{20} = \frac{z}{28}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{15} = \frac{y}{20} = \frac{z}{28} = \frac{2x + 3y - z}{30 + 60 - 28} = \frac{186}{62} = 3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{15} = 3 \\ \frac{y}{20} = 3 \\ \frac{z}{28} = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 45 \\ y = 60 \\ z = 84 \end{cases}$$

Câu 57. (HSG 7 huyện Nho Quan 2022 - 2023; huyện Thạch Thành 2017 - 2018)

Tìm x, y, z biết: $\frac{x}{2} = \frac{y}{3}; \frac{y}{5} = \frac{z}{7}$ và $x + y + z = 92$.

Lời giải

Ta có: $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} \Rightarrow \frac{x}{10} = \frac{y}{15}$ (1) và $\frac{y}{5} = \frac{z}{7} \Rightarrow \frac{y}{15} = \frac{z}{21}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra: $\frac{x}{10} = \frac{y}{15} = \frac{z}{21}$.

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{x}{10} = \frac{y}{15} = \frac{z}{21} = \frac{x+y+z}{10+15+21} = \frac{92}{46} = 2$$

Suy ra: $x = 20; y = 30; z = 42$

Vậy $x = 20, y = 30, z = 42$.

Câu 58. (HSG 7 huyện Hoằng Hóa 2017 - 2018)

Tìm x, y, z biết: $\frac{x}{2} = \frac{y}{3}; \frac{y}{5} = \frac{z}{4}$ và $x - y + z = 49$

Lời giải

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3}; \frac{y}{5} = \frac{z}{4} \Rightarrow \frac{x}{10} = \frac{y}{15}; \frac{y}{15} = \frac{z}{12}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{10} = \frac{y}{15} = \frac{z}{12} = \frac{x - y + z}{10 - 15 + 12} = \frac{-49}{7} = -7$$

$$\Rightarrow x = -70; y = -105; z = -84$$

Câu 59. (HSG 7 huyện Việt Yên 2016 - 2017)

Tìm x, y, z biết: $\frac{x}{10} = \frac{y}{15}, x = \frac{z}{2}$ và $x + 2y - 3z = -24$

Lời giải

$$\text{Từ } \frac{x}{10} = \frac{y}{15} \text{ suy ra } \frac{x}{2} = \frac{y}{3}$$

$$\frac{x}{1} = \frac{z}{2} \text{ suy ra } \frac{x}{2} = \frac{z}{4}$$

$$\text{Do đó } \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} \text{ hay } \frac{x}{2} = \frac{2y}{6} = \frac{3z}{12}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có: $\frac{x}{2} = \frac{2y}{6} = \frac{3z}{12} = \frac{x+2y-3z}{2+6-12} = \frac{-24}{-4} = 6$

$$\Rightarrow y = \frac{2}{5}x \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} = 6 \Rightarrow x = 12; y = 18; z = 24.$$

Vậy $x = 12; y = 18; z = 24$.

Câu 60. (HSG 7 huyện Tứ Kỳ, tỉnh, trường Lê Quý Đôn năm học 2016 - 2017)

Tìm x, y, z biết: $\frac{x}{y} = \frac{3}{2}; 5x = 7z$ và $x - 2y + z = 32$

Lời giải

Từ $\frac{x}{y} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{y}{2} \Rightarrow \frac{x}{21} = \frac{y}{14}$ (1)

Từ $5x = 7z \Rightarrow \frac{x}{7} = \frac{z}{5} \Rightarrow \frac{x}{21} = \frac{z}{15}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{x}{21} = \frac{y}{14} = \frac{z}{15} = \frac{x-2y+z}{21-28+15} = \frac{32}{8} = 4$
 $\Rightarrow x = 84; y = 56; z = 60$.

Câu 61. (HSG 7 huyện Bát Xát 2022 - 2023)

Tìm x, y, z biết: $\frac{x}{y} = \frac{7}{20}; \frac{y}{z} = \frac{5}{8}$ và $2x + 5y - 2z = 100$.

Lời giải

Từ $\frac{x}{y} = \frac{7}{20} \Rightarrow \frac{x}{7} = \frac{y}{20};$

$\frac{y}{z} = \frac{5}{8} \Rightarrow \frac{y}{5} = \frac{z}{8} \Rightarrow \frac{y}{20} = \frac{z}{32}.$

Do đó: $\frac{x}{7} = \frac{y}{20} = \frac{z}{32}$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{x}{7} = \frac{y}{20} = \frac{z}{32} = \frac{2x+5y-2z}{2 \cdot 7 + 5 \cdot 20 - 2 \cdot 32} = \frac{100}{50} = 2$$

Suy ra: $x = 14; y = 40; z = 64$.

Câu 62. (Đề HSG 7 2017-2018)

Tìm các cặp số $(x; y)$ biết: $\frac{x}{3} = \frac{y}{7}; xy = 84$

Lời giải

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{7}; xy = 84 \Rightarrow \frac{x^2}{9} = \frac{y^2}{49} = \frac{xy}{3 \cdot 7} = \frac{84}{21} = 4$$

$$\Rightarrow x^2 = 4 \cdot 9 = 36 \Rightarrow x = \pm 6$$

$$\Rightarrow y^2 = 4.4 = 16 \Rightarrow x = \pm 4$$

Do x, y cùng dấu nên:

$$\boxed{x = 6; y = 14}$$

$$\boxed{x = -6; y = -14}$$

Câu 63. (HSG 7 huyện Đức Thọ, tỉnh Hà Tĩnh, trường Hoàng Xuân Hãn 2022 - 2023)

Tìm các cặp số $(x; y)$ biết: $\frac{x}{5} = \frac{y}{9}$ và $xy = 405$

Lời giải

a) Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau:

$$\frac{x}{5} = \frac{y}{9} \Rightarrow \frac{x^2}{25} = \frac{y^2}{81} = \frac{xy}{5.9} = \frac{405}{45} = 9$$

$$\Rightarrow x^2 = 9.25 = 15^2 \Rightarrow x = \pm 15$$

$$\Rightarrow y^2 = 9.81 = 27^2 \Rightarrow y = \pm 27$$

$$x, y \text{ cùng dấu nên: } \begin{cases} x = 15; y = 27 \\ x = -15; y = -27 \end{cases}$$

Do

$$(x; y) \in \{(-15; -27); (15; 27)\}$$

Vậy

Câu 64. (Đề chọn HSG huyện Việt Yên 2017-2018)

Tìm x, y biết $\frac{x}{4} = \frac{y}{7}$ và $xy = 112$

Lời giải

$$\text{Ta có: } \frac{x}{4} = \frac{y}{7} \Rightarrow \frac{x^2}{16} = \frac{xy}{4.7} = \frac{112}{28}$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{16.112}{28} = 64 \Rightarrow \begin{cases} x = 8 \Rightarrow y = 14 \\ x = -8 \Rightarrow y = -14 \end{cases}$$

Câu 65. (HSG 7 huyện Chương Mỹ; huyện Như Xuân 2022 – 2023)

Tìm hai số x, y biết rằng: $\frac{x}{2} = \frac{y}{5}$ và $xy = 40$

Lời giải

Nhân cả hai vế của $\frac{x}{2} = \frac{y}{5}$ với x ta được: $\frac{x^2}{2} = \frac{xy}{5} = \frac{40}{5} = 8$

$$\Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \Rightarrow y = 10 \\ x = -4 \Rightarrow y = -10 \end{cases}$$

$$(x; y) \in \{(-4; -10); (4; 10)\}$$

Vậy

Câu 66. (HSG 7 huyện Tam Dương, tỉnh, trường năm học 2017 - 2018)

Tìm ba số x, y, z thỏa mãn $\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5}$ và $2x^2 + 2y^2 - 3z^2 = -100$

Lời giải

$$\text{Từ } \frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5} \Rightarrow \frac{x^2}{9} = \frac{y^2}{16} = \frac{z^2}{25} = \frac{2x^2}{18} = \frac{2y^2}{32} = \frac{3z^2}{75} = \frac{2x^2 + 2y^2 - 3z^2}{-25} = \frac{-100}{-25} = 4$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} x^2 = 36 \\ y^2 = 64 \\ z^2 = 100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 8 \\ z = 10 \\ x = -6 \\ y = -8 \\ z = -10 \end{cases} \quad (\text{Vì } x, y, z \text{ cùng dấu})$$

$$(x; y; z) \in \{(6; 8; 10); (-6; -8; -10)\}$$

Vậy

Câu 67. (HSG 7 trường Lê Văn Tám 2017 - 2018; trường Nguyễn Khuyến 2015 – 2016)

Tìm các số x, y, z biết: $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$ và $x^2 + y^2 + z^2 = 116$

Lời giải

$$\text{Vì } \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{4} = \frac{y^2}{9} = \frac{z^2}{16} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{4 + 9 + 16} = \frac{116}{29} = 4$$

$$\text{Do } \frac{x^2}{4} = 4 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = \pm 4$$

$$\text{Do } \frac{y^2}{9} = 4 \Rightarrow y^2 = 36 \Rightarrow y = \pm 6$$

$$\text{Do } \frac{z^2}{16} = 4 \Rightarrow z^2 = 64 \Rightarrow z = \pm 8$$

Vì x, y, z cùng dấu nên:

$$\begin{cases} x = 4; y = 6; z = 8 \\ x = -4; y = -6; z = -8 \end{cases}$$

Câu 68. (HSG 7 huyện Chương Mỹ 2018 - 2019)

Tìm a, b, c biết $a^2 + 3b^2 - 2c^2 = -16$ và $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4}$

Lời giải

$$\text{Ta có: } \frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} \Rightarrow \frac{a^2}{4} = \frac{3b^2}{27} = \frac{2c^2}{32} \quad \text{và } a, b, c \text{ cùng dấu}$$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau:

$$\frac{a^2}{4} = \frac{3b^2}{27} = \frac{2c^2}{32} = \frac{a^2 + 3b^2 - 2c^2}{4 + 27 - 32} = \frac{-16}{-1} = 16$$

$$\text{Từ } \frac{a^2}{4} = 16 \Rightarrow a^2 = 16 \cdot 4 \Rightarrow a = \pm 8$$

$$\frac{3b^2}{27} = 16 \Rightarrow b^2 = 16 \cdot 9 \Rightarrow b = \pm 12$$

$$\frac{2c^2}{32} = 16 \Rightarrow c^2 = 16 \cdot 16 \Rightarrow c = \pm 16$$

Vậy các số a, b, c cần tìm là: $(a=8; b=12; c=16)$ hoặc $(a=-8; b=-12; c=-16)$

Câu 69. (HSG 7 huyện Mỹ Đức năm 2022 - 2023)

Tìm các số x, y, z biết: $\frac{2x-1}{5} = \frac{3y+2}{4} = \frac{4z-2}{3}$ và $3x^3 - 1 = 80$

Lời giải

Ta có: $3x^3 - 1 = 80 \Rightarrow 3x^3 = 81 \Rightarrow x^3 = 27 \Rightarrow x = 3$

Khi đó: $\frac{3y+2}{4} = \frac{4z-2}{3} = \frac{2 \cdot 3 - 1}{5} = 1$

$$\Rightarrow \frac{3y+2}{4} = 1 \Rightarrow 3y+2 = 4 \Rightarrow y = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{4z-2}{3} = 1 \Rightarrow 4z-2 = 3 \Rightarrow z = \frac{5}{4}$$

Kết luận $x=3$; $y=\frac{2}{3}$; $z=\frac{5}{4}$.

Câu 70. (HSG 7 huyện Lập Thạch năm 2022 - 2023)

Tìm các số x, y biết: $4x=5y$ và $x^2 - y^2 = 1$

Lời giải

Ta có: $4x=5y \Rightarrow \frac{x}{5} = \frac{y}{4} = k \Rightarrow x=5k, y=4k$

Do đó: $x^2 - y^2 = 1 \Leftrightarrow 25k^2 - 16k^2 = 9k^2 = 1 \Rightarrow k = \pm \frac{1}{3}$

Với $k = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \frac{5}{3}; y = \frac{4}{3}$

Với $k = -\frac{1}{3} \Rightarrow x = -\frac{5}{3}; y = -\frac{4}{3}$

Vậy $(x, y) = \left\{ \left(-\frac{5}{3}; -\frac{4}{3} \right), \left(\frac{5}{3}; \frac{4}{3} \right) \right\}$

Câu 71. (HSG 7 đề thi thử Thanh Miện lần 3, 2022 - 2023)

Tìm các số x, y biết: $\frac{2x}{3} = \frac{3y}{2}$ và $xy^2 = 18$.

Lời giải

Ta có: $\frac{2x}{3} = \frac{3y}{2} \Rightarrow \frac{x}{9} = \frac{y}{4} = k \ (k \in \mathbb{R})$

$$\Rightarrow x = 9k; y = 4k$$

Mà $xy^2 = 18$ nên $9k \cdot (4k)^2 = 18$

$$\Rightarrow 144k^3 = 18 \Rightarrow k^3 = \frac{1}{8} \Rightarrow k = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{9}{2}; y = 2$$

Câu 72. (HSG 7 trường THCS Kỳ Đồng, huyện Hưng Hà năm 2022 - 2023)

Tìm x, y, z biết: $\frac{12x - 15y}{7} = \frac{20z - 12x}{9} = \frac{15y - 20z}{11}$ và $x^2 - 2y^2 + 3z^2 = 2000$

Lời giải

Ta có: $\frac{12x - 15y}{7} = \frac{20z - 12x}{9} = \frac{15y - 20z}{11}$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{12x - 15y}{7} = \frac{20z - 12x}{9} = \frac{15y - 20z}{11} = \frac{(12x - 15y) + (20z - 12x) + (15y - 20z)}{7 + 9 + 11} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 12x - 15y = 0 \\ 20z - 12x = 0 \end{cases} \Rightarrow 12x = 15y = 20z$$

$$\Rightarrow \frac{12x}{60} = \frac{15y}{60} = \frac{20z}{60} \Rightarrow \frac{x}{5} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3}$$

Đặt $\frac{x}{5} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3} = k \Rightarrow x = 5k, y = 4k, z = 3k$

Mà $x^2 - 2y^2 + 3z^2 = 2000$

$$\Rightarrow (5k)^2 - 2 \cdot (4k)^2 + 3(3k)^2 = 2000$$

$$\Rightarrow 25k^2 - 32k^2 + 27k^2 = 2000$$

$$\Rightarrow 20k^2 = 2000 \Rightarrow k^2 = 100$$

Do đó $k = 10$ hoặc $k = -10$

+) Với $k = 10$. Tính được $x = 50, y = 40, z = 30$

+ Với $k = -10$. Tính được $x = -50, y = -40, z = -30$

Vậy: $x = 50, y = 40, z = 30$ hoặc $x = -50, y = -40, z = -30$.

Câu 73. (HSG 7 trường Lê Quý Đôn, huyện Hưng Hà; trường Tân Kỳ 2022 - 2023; trường Nhơn Trí 2018 - 2019; trường Nguyễn Khuyến, Đà Nẵng 2016 - 2017)

Tìm số $\overline{xyz}$ biết $\frac{x^2}{4} = \frac{y^2}{9} = \frac{z^2}{25}$ và $x - y + z = 4$

Lời giải

Theo bài ra ta có: $\frac{x^2}{4} = \frac{y^2}{9} = \frac{z^2}{25}$ và $x, y, z \in \mathbb{N}, x \neq 0 \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5}$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5} = \frac{x - y + z}{2 - 3 + 5} = \frac{4}{4} = 1$$

$$\Rightarrow x = 2; y = 3; z = 5$$

$$\text{Vậy } \overline{xyz} = 235$$

Câu 74. (HSG 7 huyện Bắc Giang, năm học 2022 - 2023)

Tìm x, y, z biết rằng: $\frac{(x-1)^3}{27} = \frac{(y-2)^3}{8} = \frac{(z-3)^3}{64}$ và $x - 2y + 3z = 28$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \frac{(x-1)^3}{27} = \frac{(y-2)^3}{8} = \frac{(z-3)^3}{64}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x-1}{3} \right)^3 = \left(\frac{y-2}{2} \right)^3 = \left(\frac{z-3}{4} \right)^3$$

$$\Rightarrow \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{4}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{4} = \frac{x-2y+3z-6}{11} = \frac{22}{11} = 2 \quad (\text{vì } x - 2y + 3z = 28)$$

$$\text{Từ đó suy ra } x = 2 \cdot 3 + 1 = 7; y = 2 \cdot 2 + 2 = 6; z = 2 \cdot 4 + 3 = 11$$

$$\text{Vậy } x = 7; y = 6; z = 11$$

Câu 75. (HSG 7 trường THCS Kỳ Đồng, huyện Hưng Hà năm 2022 - 2023)

Tìm các số hữu tỉ x, y . Biết: $\frac{x^3 + y^3}{6} = \frac{x^3 - 2y^3}{4}$ và $x^6 \cdot y^6 = 64$.

Lời giải

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{x^3 + y^3}{6} = \frac{x^3 - 2y^3}{4} = \frac{(x^3 + y^3) - (x^3 - 2y^3)}{6 - 4}$$

$$= \frac{2(x^3 + y^3) + (x^3 - 2y^3)}{2 \cdot 6 + 4} = \frac{3y^3}{2} = \frac{3x^3}{16}$$

$$\Rightarrow y^3 = \frac{x^3}{8} \Rightarrow \frac{x^6}{64} = \frac{y^6}{1} \Rightarrow \frac{y^{12}}{1} = \frac{x^6 y^6}{64} = 1$$

$$\Rightarrow y^{12} = 1 \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y = -1 \end{cases}$$

+ Với $y = 1 \Rightarrow x = 2$

+ Với $y = -1 \Rightarrow x = -2$

Vậy $x = 2; y = 1$ hoặc $x = -2; y = -1$

Vậy $(x; y) \in \{(2; 1); (-2; -1)\}$

Câu 76. (HSG 7 huyện Hậu Lộc; huyện Thiệu Hóa 2022 - 2023)

Tìm x, y biết: $\frac{3x-1}{4} = \frac{7y-4}{5} = \frac{3x+7y-5}{3x}$

Lời giải

Biết: $\frac{3x-1}{4} = \frac{7y-4}{5} = \frac{3x+7y-5}{3x}$ (1)

+ Nếu $3x+7y-5=0$ thì $\begin{cases} 3x-1=0 \\ 7y-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{3} \\ y=\frac{4}{7} \end{cases}$

+ Nếu $3x+7y-5 \neq 0$ thì áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{3x-1}{4} = \frac{7y-4}{5} = \frac{3x+7y-5}{9} \Rightarrow \frac{3x+7y-5}{9} = \frac{3x+7y-5}{3x} \neq 0 \Rightarrow x=3$$

Từ (1) $\Rightarrow \frac{3 \cdot 3 - 1}{4} = \frac{7y - 4}{5} \Rightarrow y = 2$

Vậy $(x, y) \in \left\{ \left(\frac{1}{3}; \frac{4}{7} \right), (3; 2) \right\}$

Câu 77. (HSG 7 Tp Thanh Hóa 2022 - 2023; huyện Triệu Sơn; huyện Thanh Thủy 2021 - 2022)

Tìm x, y , biết: $\frac{x-1}{2} = \frac{2y+1}{5} = \frac{3x-4y-5}{2x}$

Lời giải

Ta có: $\frac{x-1}{2} = \frac{2y+1}{5} = \frac{3x-4y-5}{2x}$ DK: $x \neq 0$.

$$\frac{x-1}{2} = \frac{2y+1}{5} = \frac{3x-4y-5}{2x}$$

Từ

$$\Rightarrow \frac{3x-3}{6} = \frac{4y+2}{10} = \frac{3x-4y-5}{2x} = \frac{(3x-3)-(4y+2)}{6-10} = \frac{3x-4y-5}{-4}$$

$$\Rightarrow \frac{3x - 4y - 5}{2x} = \frac{3x - 4y - 5}{-4}$$

$$3x - 4y - 5 = 0 \Rightarrow \frac{3x - 3}{6} = \frac{4y + 2}{10} = 0$$

+ Nếu

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x - 3 = 0 \\ 4y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$+ \text{ Nếu } 3x - 4y - 5 \neq 0 \Rightarrow 2x = -4 \Rightarrow x = -2$$

$$\Rightarrow \frac{-2 - 1}{2} = \frac{2y + 1}{5} \Rightarrow 2y + 1 = \frac{-15}{2} \Rightarrow y = \frac{-17}{4}$$

$$(x; y) \in \left\{ \left(1; -\frac{1}{2} \right); \left(-2; -\frac{17}{4} \right) \right\}$$

Vậy giá trị x, y cần tìm là:

Câu 78. (HSG 7 huyện Như Thanh, 2021 - 2022)

$$\text{Tìm hai số } x \text{ và } y \text{ biết: } \frac{5x - 1}{3} = \frac{7y - 6}{5} = \frac{5x + 7y - 7}{4x}$$

Lời giải

$$\frac{5x - 1}{3} = \frac{7y - 6}{5} = \frac{5x + 7y - 7}{4x} \quad \text{Điều kiện: } x \neq 0$$

$$\text{Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có: } \frac{5x - 1}{3} = \frac{7y - 6}{5} = \frac{5x + 7y - 7}{8}$$

$$\text{Suy ra: } \frac{5x - 1}{3} = \frac{7y - 6}{5} = \frac{5x + 7y - 7}{4x} = \frac{5x + 7y - 7}{8}$$

$$\text{Hay } \frac{5x + 7y - 7}{4x} = \frac{5x + 7y - 7}{8}$$

$$\text{TH1: Nếu } 5x + 7y - 7 = 0 \Rightarrow \frac{5x - 1}{3} = \frac{7y - 6}{5} = 0$$

$$\Rightarrow 5x - 1 = 7y - 6 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{5}; y = \frac{6}{7}$$

$$\text{TH2: Nếu } 5x + 7y - 7 \neq 0 \text{ thì } 4x = 8 \Rightarrow x = 2$$

$$\Rightarrow \frac{5 \cdot 2 - 1}{3} = \frac{7y - 6}{5} \Rightarrow 3 = \frac{7y - 6}{5} \Rightarrow 7y - 6 = 15 \Rightarrow y = 3$$

$$\text{Vậy } (x; y) = \left(\frac{1}{5}; \frac{6}{7} \right) \text{ và } (x; y) = (2; 3).$$

Câu 79. (HSG 7 trường Diệp Nông, huyện Hưng Hà 2022 - 2023; huyện Hà Trung, 2021 - 2022)

$$\text{Tìm } x, y \text{ biết: } \frac{1 + 2y}{18} = \frac{1 + 4y}{24} = \frac{1 + 6y}{6x}$$

Lời giải

$$\frac{1+2y}{18} = \frac{1+4y}{24} = \frac{1+6y}{6x}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{2+4y}{36} = \frac{1+4y}{24} = \frac{2+4y-1-4y}{36-24} = \frac{1}{12} = \frac{2}{24}$$

$$\Rightarrow \frac{1+4y}{24} = \frac{2}{24}$$

$$\Rightarrow 1+4y=2 \Rightarrow y=\frac{1}{4}$$

Với $y=\frac{1}{4}$ ta có $\frac{1+6y}{6x} = \frac{1}{12}$

$$\Rightarrow \frac{1+6 \cdot \frac{1}{4}}{6x} = \frac{1}{12}$$

$$\Rightarrow 6x=12\left(1+\frac{3}{2}\right) \Rightarrow x=5$$

$$(x; y) = \left(5; \frac{1}{4}\right)$$

Vậy

Câu 80. (HSG 7 huyện Thanh Chương 2018 - 2019)

Tìm x, y biết: $\frac{2x+1}{5} = \frac{3y-2}{7} = \frac{2x+3y-1}{6x}$

Lời giải

Áp dụng tính chất dãy tỷ số bằng nhau từ 2 tỉ số đầu ta có:

$$\frac{2x+1}{5} = \frac{3y-2}{7} = \frac{2x+3y-1}{12}$$

$$\Rightarrow \frac{2x+3y-1}{12} = \frac{2x+3y-1}{6x}$$

Kết hợp với giả thiết

+ Nếu $2x+3y-1 \neq 0 \Leftrightarrow 6x=12 \Leftrightarrow x=2 \Rightarrow y=3$

+ Nếu $2x+3y-1=0 \Leftrightarrow 2x=1-3y$. Thay vào 2 tỉ số đầu ta tính được $y=\frac{2}{3}; x=-\frac{1}{2}$

Câu 81. (HSG 7 huyện Cao Lộc, 2021 - 2022)

Tìm x, y biết: $\frac{2+3y}{12} = \frac{2+5y}{3x} = \frac{2+7y}{4x}$

Lời giải

Theo tính chất dãy tỷ số bằng nhau

$$\frac{2+3y}{12} = \frac{2+5y}{3x} = \frac{2y}{3x-12} \Rightarrow \frac{2+5y}{3x} = \frac{2+7y}{4x} = \frac{2y}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{2y}{x} = \frac{2y}{3x-12}$$

$$\Rightarrow x = 3x - 12 \Rightarrow -2x = -12 \Rightarrow x = 6$$

$$\frac{2+3y}{12} = \frac{2+5y}{3x}$$

Lại có

$$\Rightarrow \frac{2+3y}{12} = \frac{2+5y}{18} \Rightarrow \frac{2+3y}{2} = \frac{2+5y}{3}$$

$$\Rightarrow 6+9y = 4+10y \Rightarrow y = 2$$

$$\text{Vậy } x=6; y=2$$

Câu 82. (HSG 7 trường Hoàng Xuân Hãn, huyện Đức Thọ 2022 - 2023)

$$(x; y) \text{ biết: } \frac{1+5y}{24} = \frac{1+7y}{7x} = \frac{1+9y}{2x}$$

Tìm các cặp số

Lời giải

$$\frac{1+5y}{24} = \frac{1+7y}{7x} = \frac{1+9y}{2x}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{1+5y}{24} = \frac{1+7y}{7x} = \frac{1+9y}{2x} = \frac{1+9y-1-7y}{2x-7x} = \frac{2y}{-5x} = \frac{1+7y-1-5y}{7x-24} = \frac{2y}{7x-24}$$

$$\Rightarrow \frac{2y}{-5x} = \frac{2y}{7x-24} \Rightarrow -5x = 7x-24 \Rightarrow x=2$$

Thay $x=2$ vào trên ta được:

$$\frac{1+5y}{24} = \frac{y}{-5} \Rightarrow -5-25y=24y \Rightarrow 49y=-5 \Rightarrow y=-\frac{5}{49}$$

$$\text{Vậy } x=2; y=-\frac{5}{49} \text{ thỏa mãn đề bài}$$

Câu 83. (HSG huyện Nam Đàn 2022 - 2023)

$$\text{Tìm } x; y \text{ biết } \frac{1+3y}{12} = \frac{1+6y}{3x} = \frac{1+9y}{2x}$$

Lời giải

$$\text{Ta có: } \frac{1+6y}{3x} = \frac{1+9y}{2x}$$

$$\Rightarrow \frac{1+6y}{1+9y} = \frac{3x}{2x} \Rightarrow \frac{1+6y}{1+9y} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow 2.(1+6y) = 3.(1+9y)$$

$$\Rightarrow 2+12y = 3+27y$$

$$\Rightarrow -1 = 15y \Rightarrow y = \frac{-1}{15}$$

Thay $y = \frac{-1}{15}$ vào $\frac{1+3y}{12} = \frac{1+6y}{3x}$ ta được

$$\frac{1+3 \cdot \left(\frac{-1}{15}\right)}{12} = \frac{1+6 \cdot \left(\frac{-1}{15}\right)}{3x}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{15} = \frac{\frac{3}{5}}{3x} \Rightarrow x = 3$$

$$x = 3, y = \frac{-1}{5}$$

Vậy

Câu 84. (HSG 7 huyện Hưng Hà, trường Vũ Thị Thục 2022 - 2023)

Tìm x, y biết $\frac{x-y}{3} = \frac{x+y}{13} = \frac{xy}{200}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \frac{x-y}{3} = \frac{x+y}{13} = \frac{xy}{200}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có

$$\frac{x+y}{3} = \frac{x-y}{13} = \frac{xy}{200} = \frac{x+y+x-y}{3+13} = \frac{x}{8}$$

+ Nếu $x = 0 \Rightarrow y = 0$

$$x \neq 0 \Rightarrow \frac{xy}{200} = \frac{x}{8} \Rightarrow \frac{y}{25} = 1 \Rightarrow y = 25$$

+ Nếu

$$\text{Thay } y = 25 \text{ ta có } \frac{x-25}{3} = \frac{x}{8} \Rightarrow 8x - 200 = 3x \Rightarrow x = 40$$

$$\text{Vậy } (x; y) \in \{(0; 0); (40; 25)\}$$

Câu 85. (HSG 7 huyện Nghi Xuân, năm học 2022 - 2023)

Tìm các số hữu tỉ dương x, y, z thỏa mãn tất cả các điều kiện sau:

$$\frac{xy}{x+y} = \frac{1}{6}; \frac{yz}{y+z} = \frac{1}{9}; \frac{zx}{z+x} = \frac{1}{7}$$

Lời giải

$$\text{Ta có: } \frac{xy}{x+y} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{x+y}{xy} = 6 \Rightarrow \frac{1}{y} + \frac{1}{x} = 6 \quad (1)$$

$$\frac{yz}{y+z} = \frac{1}{9} \Rightarrow \frac{y+z}{yz} = 9 \Rightarrow \frac{1}{z} + \frac{1}{y} = 9 \quad (2)$$

$$\frac{zx}{z+x} = \frac{1}{7} \Rightarrow \frac{z+x}{zx} = 7 \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{z} = 7 \quad (3)$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$$

Từ (1);(2);(3) suy ra:

$$\frac{1}{z} = 5 \Rightarrow z = \frac{1}{5}; \frac{1}{y} = 4 \Rightarrow y = \frac{1}{4}; \frac{1}{x} = 2 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

Do đó:

$$x = \frac{1}{2}; y = \frac{1}{4}; z = \frac{1}{5}$$

Vậy

Câu 86. (HSG 7 tỉnh, huyện Trục Ninh 2020 - 2021)

Cho a, b, c là các số thực khác 0. Tìm các số thực x, y, z khác không thỏa mãn:

$$\frac{xy}{ay+bx} = \frac{yz}{bz+cy} = \frac{zx}{cx+az} = \frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2}$$

Lời giải

Từ $\frac{xy}{ay+bx} = \frac{yz}{bz+cy} = \frac{zx}{cx+az} \Rightarrow \frac{xyz}{ayz+bxz} = \frac{yzx}{bzx+cyx} = \frac{zxy}{cxy+azy} \quad (x, y, z \neq 0)$

Suy ra $\begin{cases} ayz+bxz = bzx+cyz \\ bzx+cyz = cxy+azy \\ ayz+bxz = cxy+azy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ayz = cyx \\ bzx = azy \\ bxz = cxy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} az = cx \\ bx = ay \\ bz = cy \end{cases} \quad (\text{Vì } x, y, z \neq 0)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{a} = \frac{z}{c} \\ \frac{y}{b} = \frac{x}{a} \\ \frac{z}{c} = \frac{y}{b} \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$$

Đặt $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = k \quad (k \neq 0) \Rightarrow \begin{cases} x = ak \\ y = bk \\ z = ck \end{cases}$, thay vào $\frac{xy}{ay+bx} = \frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2}$ ta có

$$\frac{ak.bk}{abk+bak} = \frac{(ak)^2 + (bk)^2 + (ck)^2}{a^2+b^2+c^2} \Rightarrow \frac{k}{2} = \frac{k^2(a^2+b^2+c^2)}{a^2+b^2+c^2} = k^2$$

$$\Rightarrow k = 2k^2 \Rightarrow k(1-2k) = 0 \Rightarrow k = \frac{1}{2} \quad (\text{vì } k \neq 0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}a \\ y = \frac{1}{2}b \\ z = \frac{1}{2}c \end{cases}$$

Vậy $x = \frac{1}{2}a$; $z = \frac{1}{2}c$; $y = \frac{1}{2}b$.

Câu 87. (HSG 7 huyện Kim Sơn 2021 - 2022; trường Lê Hồng Phong 2018 - 2019; trường Lý Thường Kiệt 2017 - 2018)

$$x, y, z \text{ biết: } \frac{xy}{2y+4x} = \frac{yz}{4z+6y} = \frac{zx}{6x+2z} = \frac{x^2+y^2+z^2}{2^2+4^2+6^2}$$

Tìm các số

Lời giải

$$\frac{xy}{2y+4x} = \frac{yz}{4z+6y} = \frac{zx}{6x+2z} = \frac{x^2+y^2+z^2}{2^2+4^2+6^2} \quad (2)$$

Xét $x=0 \Rightarrow y=z=0 \Rightarrow 2y+4x=0$ (vô lí)

Suy ra $x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0$

$$\frac{2y+4x}{xy} = \frac{4z+6y}{yz} = \frac{6x+2z}{zx} = \frac{2^2+4^2+6^2}{x^2+y^2+z^2}$$

Khi đó từ (2) suy ra:

$$\Rightarrow \frac{2}{x} + \frac{4}{y} = \frac{4}{y} + \frac{6}{z} = \frac{6}{z} + \frac{2}{x} = \frac{2^2+4^2+6^2}{x^2+y^2+z^2}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{x} = \frac{4}{y} = \frac{6}{z} \quad \text{và} \quad \frac{2}{x} = \frac{4}{y} = \frac{2^2+4^2+6^2}{x^2+y^2+z^2} = \frac{2}{x} + \frac{4}{y} = \frac{2}{x} + \frac{2}{x} = 2 \cdot \frac{2}{x}$$

$$\frac{2}{x} = \frac{4}{y} = \frac{6}{z} = \frac{1}{k} \quad (k \neq 0)$$

Đặt

$$\Rightarrow \frac{2^2+4^2+6^2}{x^2+y^2+z^2} = \frac{2}{k} \Rightarrow \begin{cases} x=2k \\ y=4k \\ z=6k \\ x^2+y^2+z^2=28k \end{cases} \quad (3)$$

Thay $\begin{cases} x=2k \\ y=4k \\ z=6k \end{cases}$ vào (3) ta được:

$$(2k)^2 + (4k)^2 + (6k)^2 = 28k \Rightarrow 56k^2 - 28k = 0 \Rightarrow 56k(2k-1) = 0$$

$$\Rightarrow k=0 \quad (\text{loại}) \quad \text{hoặc} \quad k = \frac{1}{2} \quad (\text{thoả mãn})$$

Với $k = \frac{1}{2}$ thì tìm được $x=1; y=2; z=3$.

Vậy $x=1; y=2; z=3$.

Câu 88. (HSG 7 huyện Triệu Sơn năm 2022 - 2023)

$$\frac{x+y-7}{z} = \frac{y+z+2}{x} = \frac{x+z+5}{y} = \frac{6}{x+y+z}$$

Tìm các số thực x, y, z biết

Lời giải

Với $x, y, z \neq 0$ và $x+y+z \neq 0$, theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau:

$$\frac{x+y-7}{z} = \frac{y+z+2}{x} = \frac{x+z+5}{y} = \frac{2(x+y+z)}{x+y+z} = 2$$

$$\frac{6}{x+y+z} = 2 \Leftrightarrow x+y+z = 3$$

Suy ra:

Khi đó:

$$+ \frac{x+y-7}{z} = 2 \Leftrightarrow \frac{3-z-7}{z} = 2 \Leftrightarrow -4-z = 2z \Leftrightarrow z = -\frac{4}{3} \text{ (thỏa mãn).}$$

$$+ \frac{y+z+2}{x} = 2 \Leftrightarrow \frac{3-x+2}{x} = 2 \Leftrightarrow 5-x = 2x \Leftrightarrow x = \frac{5}{3} \text{ (thỏa mãn).}$$

$$+ \frac{x+z+5}{y} = 2 \Leftrightarrow \frac{3-y+5}{y} = 2 \Leftrightarrow 8-y = 2y \Leftrightarrow y = \frac{8}{3} \text{ (thỏa mãn).}$$

Vậy $x = \frac{5}{3}; y = \frac{8}{3}; z = -\frac{4}{3}$ là các số thực cần tìm.

Câu 89. (HSG 7 huyện Thanh Sơn; Thanh Hóa lần 2, 2022 - 2023; huyện Thanh Sơn 2021 - 2022; trường Lê Quý Đôn, huyện Tứ Kỳ 2016 - 2017; trường Bồ Lý 2015 - 2016)

Tìm ba số a, b, c biết rằng: $\frac{b+c+1}{a} = \frac{a+c+2}{b} = \frac{a+b-3}{c} = \frac{1}{a+b+c}$

Lời giải

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\begin{aligned} \frac{b+c+1}{a} &= \frac{a+c+2}{b} = \frac{a+b-3}{c} = \frac{1}{a+b+c} \\ &= \frac{b+c+a+c+a+b+1+2-3}{a+b+c} = \frac{2(a+b+c)}{a+b+c} = 2 \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra: } \frac{1}{a+b+c} = 2 \text{ hay } a+b+c = 0,5$$

Do đó:

$$\frac{b+c+1}{a} = 2 \Rightarrow \frac{(0,5-a)+1}{a} = 2 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$\frac{a+c+2}{b} = 2 \Rightarrow \frac{(0,5-b)+2}{b} = 2 \Rightarrow b = \frac{5}{6}$$

$$\frac{a+b-3}{c} = 2 \Rightarrow \frac{(0,5-c)-3}{c} = 2 \Rightarrow c = -\frac{5}{6}$$

Vậy $a = \frac{1}{2}; b = \frac{5}{6}; c = -\frac{5}{6}$

Câu 90. (HSG 7 huyện Sóc Sơn 2022 - 2023)

$$\frac{y+z+4}{x} = \frac{x+z+5}{y} = \frac{x+y-9}{z} = \frac{2023}{x+y+z}$$

Tìm x, y, z khác 0 biết rằng

Lời giải

Theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có

$$\begin{aligned} \frac{y+z+4}{x} &= \frac{x+z+5}{y} = \frac{x+y-9}{z} = \frac{2023}{x+y+z} \\ &= \frac{(y+z+4)+(x+z+5)+(x+y-9)}{x+y+z} = \frac{2(x+y+z)}{x+y+z} = 2 \end{aligned}$$

$$\frac{2023}{x+y+z} = 2 \Leftrightarrow x+y+z = 1011,5$$

Suy ra

$$\frac{1011,5-x+4}{x} = \frac{1011,5-y+5}{y} = \frac{1011,5-z-9}{z} = 2$$

Do đó

$$\frac{1015,5-x}{x} = \frac{1016,5-y}{y} = \frac{1002,5-z}{z} = 2$$

Hay

$$x = \frac{677}{2}; y = \frac{2033}{6}; z = \frac{2005}{6}$$

Suy ra

Câu 91. (HSG 7 huyện Hưng Hà năm 2022 - 2023)

$$\frac{x}{y+z+1} = \frac{y}{x+z+2} = \frac{z}{x+y-3} = x+y+z$$

Tìm x, y, z biết:

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Từ: } \frac{x}{y+z+1} &= \frac{y}{x+z+2} = \frac{z}{x+y-3} \\ \Rightarrow \frac{y+z+1}{x} &= \frac{x+z+2}{y} = \frac{x+y-3}{z} \\ &= \frac{(y+z+1)+(x+z+2)+(x+y-3)}{x+y+z} = \frac{2(x+y+z)}{x+y+z} = 2 = x+y+z \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra: } y+z+1=2x \Rightarrow x+y+z=3x-1=2 \Rightarrow x=1$$

$$x+z+2=2y \Rightarrow x+y+z=3y-2=2 \Rightarrow y=\frac{4}{3}$$

$$x+y-3=2z \Rightarrow x+y+z=3z+3=2 \Rightarrow z=-\frac{1}{3}$$

Câu 92. (HSG 7 huyện Thọ Sơn – Thanh Hóa năm 2022 - 2023)

$$\frac{y+z-2}{x+1} = \frac{z+x+1}{y-1} = \frac{x+y-3}{z-2} = \frac{1}{x+y+z-2}$$

Tìm x, y, z biết: (với giả thiết các tỉ số đều có nghĩa).

Lời giải

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{y+z-2}{x+1} = \frac{z+x+1}{y-1} = \frac{x+y-3}{z-2} = \frac{y+z-2+z+x+1+x+y-3}{x+1+y-1+z-2} = \frac{2(x+y+z-2)}{x+y+z-2} = 2$$

Suy ra:

$$+ \quad y+z-2=2(x+1)=2x+2 \Rightarrow y+z=2x+4$$

$$+ \quad z+x+1=2(y-1)=2y-2 \Rightarrow z+x=2y-3$$

$$+ \quad x+y-3=2(z-2)=2z-4 \Rightarrow x+y=2z-1$$

$$+ \quad \frac{1}{x+y+z-2}=2 \Rightarrow x+y+z-2=\frac{1}{2} \Rightarrow x+y+z=\frac{5}{2}$$

Mặt khác:

$$y+z=\frac{5}{2}-x; \quad z+x=\frac{5}{2}-y; \quad x+y=\frac{5}{2}-z$$

Suy ra:

Như vậy:

$$+ \quad 2x+4=\frac{5}{2}-x \Rightarrow 3x=\frac{-3}{2} \Rightarrow x=\frac{-1}{2}$$

$$+ \quad 2y-3=\frac{5}{2}-y \Rightarrow 3y=\frac{11}{2} \Rightarrow y=\frac{11}{6}$$

$$+ \quad 2z-1=\frac{5}{2}-z \Rightarrow 3z=\frac{7}{2} \Rightarrow z=\frac{7}{6}$$

$$+ \quad x=\frac{-1}{2}; y=\frac{11}{6}; z=\frac{7}{6}$$

Vậy

Câu 93. (HSG 7 huyện Đức Thọ, tỉnh Hà Tĩnh, trường Hoàng Xuân Hãn 2022 - 2023)

$$x, y, z \text{ biết } \frac{x}{y+z-5} = \frac{y}{x+z+3} = \frac{z}{x+y+2} = \frac{x+y+z}{2}$$

Tìm

Lời giải

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có

$$\frac{x}{y+z-5} = \frac{y}{x+z+3} = \frac{z}{x+y+2} = \frac{x+y+z}{2} = \frac{x+y+z}{2(x+y+z)} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{x+y+z}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x+y+z=1$$

$$\Rightarrow y+z=1-x; x+z=1-y; x+y=1-z$$

$$\frac{x}{1-x-5} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2x = -4 - x \Rightarrow 3x = -4 \Rightarrow x = \frac{-4}{3}$$

$$\frac{y}{1-y+3} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2y = 4 - y \Rightarrow 3y = 4 \Rightarrow y = \frac{4}{3}$$

$$\frac{z}{1-z+2} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2z = 3 - z \Rightarrow 3z = 3 \Rightarrow z = 1$$

$$x = \frac{-4}{3}; y = \frac{4}{3}; z = 1$$

Vậy

Câu 94. (HSG 7 huyện Quảng xương, tỉnh Thanh Hoá, năm học 2022 – 2023)

Tìm các số $x; y; z$ biết:

$$\frac{x}{y+z+1} = \frac{y}{x+z+1} = \frac{z}{x+y-2} = x+y+z$$

$$x:y:z = \frac{2}{5}:\frac{3}{4}:\frac{1}{6} \quad \text{và} \quad x^2+y^2+z^2=24309$$

Lời giải

$$\frac{x}{y+z+1} = \frac{y}{x+z+1} = \frac{z}{x+y-2} = x+y+z \quad (1)$$

+ Nếu $x+y+z=0$ thì từ đề bài (1) suy ra $x=y=z=0$

+ Nếu $x+y+z \neq 0$. Áp dụng tính chất dãy tỉ số nhau ta có:

$$\frac{x}{y+z+1} = \frac{y}{x+z+1} = \frac{z}{x+y-2} = \frac{x+y+z}{2(x+y+z)} \quad (2)$$

$$\frac{x+y+z}{2(x+y+z)} = x+y+z \quad (*)$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$x+y+z = \frac{1}{2}$$

Từ (*) suy ra

Thay vào đề bài tính được

$$\frac{x}{y+z+1} = \frac{x}{\frac{1}{2}-x+1} = \frac{1}{2} \quad \text{suy ra} \quad x = \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{1}{2}; \quad z = -\frac{1}{2}$$

Tương tự:

$$(x; y; z) \in \left\{ (0; 0; 0); \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2} \right) \right\}$$

Vậy

Câu 95. (HSG 7 huyện Thái Thụy 2018 - 2019)

$$\frac{x+y}{2017} = \frac{xy}{2018} = \frac{x-y}{2019}$$

Tìm x, y biết:

Lời giải

$$\frac{x+y}{2017} = \frac{xy}{2018} = \frac{x-y}{2019} \quad (1)$$

Ta có:

Áp dụng tính chất của tỉ lệ thức ta có:

$$\frac{x+y}{2017} = \frac{x-y}{2019} = \frac{x+y+x-y}{2017+2019} = \frac{2x}{4036} = \frac{x}{2018} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } \frac{xy}{2018} = \frac{x}{2018}$$

$$\text{TH1: } x=0 \Rightarrow y=0$$

$$\text{TH2: } x \neq 0, \text{ từ (2) } \Rightarrow y=1 \Rightarrow x=-2018 \text{ (tm)}$$

$$\text{Vậy } (x; y) = \{(0; 0); (-2018; 1)\}$$

Câu 96. (HSG 7 trường Đáp Cầu 2018 - 2019)

Cho hai đại lượng tỉ lệ nghịch x và y ; x_1, x_2 là hai giá trị bất kỳ của x ; y_1, y_2 là hai giá trị tương ứng của y . Tính y_1, y_2 biết $y_1^2 + y_2^2 = 52$ và $x_1 = 2; x_2 = 3$.

Lời giải

Vì x, y là hai đại lượng tỉ lệ nghịch nên:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1} \Rightarrow \frac{y_2}{y_1} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{y_2}{2} = \frac{y_1}{3} \Rightarrow \left(\frac{y_2}{2}\right)^2 = \left(\frac{y_1}{3}\right)^2 \Rightarrow \frac{y_1^2}{9} = \frac{y_2^2}{4} = \frac{y_1^2 + y_2^2}{9+4} = \frac{52}{13} = 4$$

$$\frac{y_1^2}{9} = 4 \Rightarrow y_1^2 = 36 \Rightarrow y_1 = \pm 6$$

$$\text{Với } y_1 = -6 \Rightarrow y_2 = -4$$

$$\text{Với } y_1 = 6 \Rightarrow y_2 = 4$$

Câu 97. (HSG 7 huyện Vị Thanh, tỉnh Hậu Giang, trường THCS Viêt Xuân 2022 - 2023)

Cho 4 số a, b, c, d biết $a=3b=4c=5d$ và $ab - c^2 - d^2 = 831$. Tính $b - c$

Lời giải

$$a=3b=4c=5d$$

$$\Rightarrow \frac{a}{60} = \frac{b}{20} = \frac{c}{15} = \frac{d}{12} \Leftrightarrow \frac{ab}{1200} = \frac{c^2}{225} = \frac{d^2}{144} = \frac{ab - c^2 - d^2}{1200 - 225 - 144} = \frac{831}{831} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2}{144} = 1 \Rightarrow d = \pm 12$$

$$\begin{cases} d=12 \Rightarrow b=20, c=15 \Rightarrow b-c=5 \\ d=-12 \Rightarrow b=-20; c=-15 \Rightarrow b-c=-5 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } d=12 \Rightarrow b-c=5$$

$$d = -12 \Rightarrow b - c = -5$$

Và

Câu 98. (HSG 7 huyện Hải Châu, trường Nguyễn Khuyến 2022 – 2023)

Cho $\frac{x+16}{9} = \frac{y-25}{16} = \frac{z+9}{25}$ và $\frac{9-x}{7} + \frac{11-x}{9} = 2$. Tìm $x+y+z$

Lời giải

Từ $\frac{9-x}{7} + \frac{11-x}{9} = 2 \Leftrightarrow (2-x)\left(\frac{1}{7} + \frac{1}{9}\right) = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Thay $x = 2 \Rightarrow \frac{x+16}{9} = \frac{y-25}{16} = \frac{z+9}{25} = \frac{x+y+z}{50} = \frac{2+16}{9} = 2 \Rightarrow x+y+z = 100$

Câu 99. (HSG 7 huyện Hà Trung, tỉnh Thanh Hoá, năm học 2022 - 2023)

Cho a, b, c, d thỏa mãn: $a = 3b = 4c = 5d$ và $ab - c^2 - d^2 = 831$. Tính $a - b + c$

Lời giải

Vì $a = 3b = 4c = 5d$

$$\Rightarrow \frac{a}{60} = \frac{3b}{60} = \frac{4c}{60} = \frac{5d}{60} \quad (BCNN(1; 3; 4; 5) = 60)$$

$$\Rightarrow \frac{a}{60} = \frac{b}{20} = \frac{c}{15} = \frac{d}{12}$$

$$\Rightarrow \frac{ab}{1200} = \frac{c^2}{225} = \frac{d^2}{144}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{ab}{1200} = \frac{c^2}{225} = \frac{d^2}{144} = \frac{ab - c^2 - d^2}{1200 - 225 - 144} = \frac{831}{831} = 1 \quad (\text{vì } ab - c^2 - d^2 = 831)$$

$$\Rightarrow \frac{d^2}{144} = 1 \Rightarrow d^2 = 144 \Rightarrow d = \pm 12$$

+ $d = 12 \Rightarrow a = 60; b = 20; c = 15 \Rightarrow a - b + c = 55$

+ $d = -12 \Rightarrow a = -60; b = -20; c = -15 \Rightarrow a - b + c = -55$

+

Vậy: $a - b + c = -55; a - b + c = 55$

Câu 100. (HSG 7 thị xã Hương Trà; Tp. Lào Cai 2022 - 2023; huyện Nam Sách 2017 - 2018; huyện Tân Lạc; huyện Ngọc Lặc 2015 - 2016)

Cho $\frac{x+16}{9} = \frac{y-25}{-16} = \frac{z+49}{25}$ và $4x^3 - 3 = 29$. Tính $x - 2y + 3z$

Lời giải

Ta có: $4x^3 - 3 = 29 \Rightarrow 4x^3 = 32 \Rightarrow x^3 = 8 \Rightarrow x = 2$

Thay $x = 2$ vào

$$\frac{x+16}{9} = \frac{y-25}{-16} = \frac{z+49}{25} \quad \text{ta được:} \quad \frac{2+16}{9} = \frac{y-25}{-16} = \frac{z+49}{25} \Rightarrow 2 = \frac{y-25}{-16} = \frac{z+49}{25}$$

$$\text{Suy ra: } \frac{y-25}{-16} = 2 \Rightarrow y-25 = -32 \Rightarrow y = -7; \quad \frac{z+49}{25} = 2 \Rightarrow z+49 = 50 \Rightarrow z = 1$$

$$\text{Thay } x=2; y=-7; z=1 \text{ vào } A \text{ ta được: } A = 2 - 2(-7) + 3 \cdot 1 = 19$$

Vậy giá trị của biểu thức $A = 19$.

Câu 101. (HSG 7 huyện Cẩm Khê năm 2022 - 2023)

$$\text{Cho } \frac{x+16}{9} = \frac{y-25}{16} = \frac{z+9}{25} \text{ và } 3x^3 - 7 = 17. \text{ Tính } B = x - y + z + 2037$$

Lời giải

$$\text{Ta có } 3x^3 - 7 = 17 \Rightarrow 3x^3 = 24 \Rightarrow x^3 = 8 \Rightarrow x = 2$$

$$\text{Khi đó: } \frac{x+16}{9} = \frac{2+16}{9} = 2$$

Theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{x+16}{9} = \frac{y-25}{16} = \frac{z+9}{25} = \frac{x+16-y+25+z+9}{9-16+25} = 2 \Rightarrow x-y+z+50 = 36 \Rightarrow x-y+z = -14$$

$$\Rightarrow x-y+z+2037 = 2023$$

$$\text{Vậy } x-y+z+2037 = 2023$$

Câu 102. (HSG 7 huyện Hương Khê, tỉnh Hà Tĩnh, 2022 - 2023)

$$\text{Cho đa thức } P(x) = ax^2 + bx + c. \text{ Trong đó } a, b, c \text{ là các hằng số thỏa mãn } \frac{a}{1} = \frac{b}{2} = \frac{c}{3} \text{ và } a \neq 0. \text{ Tính } \frac{P(-2) - 3P(1)}{a}.$$

Lời giải

$$\text{Ta có } \frac{a}{1} = \frac{b}{2} = \frac{c}{3} \text{ suy ra } b = 2a; c = 3a$$

$$\text{Suy ra } \frac{P(-2) - 3P(1)}{a} = \frac{4a - 2b + c - 3(a + b + c)}{a} = \frac{a - 5b - 2c}{a}$$

$$= \frac{a - 5 \cdot 2a - 2 \cdot 3a}{a} = \frac{-15a}{a} = -15$$

Câu 103. (HSG 7 huyện Hoàng Hóa - Thanh Hóa năm 2022 - 2023)

$$\text{Cho } \frac{x+16}{9} = \frac{y-30}{-16} = \frac{z+49}{25} \text{ và } 4x^3 - 3 = 29. \text{ Tính } C = 26x - 3y + z^{2023}.$$

Lời giải

$$\text{Ta có: } 4x^3 - 3 = 29 \Rightarrow 4x^3 = 32 \Rightarrow x^3 = 8 \Rightarrow x = 2$$

$$\frac{2+16}{9} = \frac{y-30}{-16} = \frac{z+49}{25} \Rightarrow \frac{y-30}{-16} = \frac{z+49}{25} = 2$$

Thay vào tỉ lệ thức ta được:

$$\Rightarrow y = -2, z = 1$$

Khi đó: $C = 26x - 3y + z^{2023} = 26 \cdot 2 - 3 \cdot (-2) + 1 = 59$

Câu 104. (HSG 7 huyện Liên Trường 2022 - 2023)

$$\frac{y+z+1}{x} = \frac{x+z+2}{y} = \frac{x+y-3}{z} = \frac{1}{x+y+z}$$

Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn:

Tính giá trị của biểu thức: $A = 2022 \cdot x + (y+z)^{2023}$

Lời giải

Điều kiện: $x+y+z \neq 0; x \neq 0; y \neq 0; z \neq 0$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{y+z+1}{x} = \frac{x+z+2}{y} = \frac{x+y-3}{z} = \frac{2(x+y+z)}{x+y+z} = 2$$

Suy ra: $\frac{1}{x+y+z} = 2 \Leftrightarrow x+y+z = \frac{1}{2}$ (1) và $\frac{y+z+1}{x} = 2 \Leftrightarrow y+z+1 = 2x$ (2).

Trừ (1) và (2) vế với vế, ta được: $x - 1 = \frac{1}{2} - 2x \Leftrightarrow 3x = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

Mà $x+y+z = \frac{1}{2}$ nên $y+z = 0$

$$A = 2022 \cdot \frac{1}{2} + 0^{2023} = 1011$$

Thay vào biểu thức ta có:

Câu 105. (HSG 7 Thành Phố Sầm Sơn, tỉnh Thanh Hoá, năm học 2022 - 2023)

$$\frac{y+z+1}{x} = \frac{x+z+2}{y} = \frac{x+y-3}{z} = \frac{1}{x+y+z}$$

Cho x, y, z là các số thực khác 0, thỏa mãn:

Tính giá trị của biểu thức $A = 4046x + (y)^{2023} + (z)^{2023}$

Lời giải

Từ đề bài ta có x, y, z và $x+y+z$ khác 0.

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{y+z+1}{x} = \frac{x+z+2}{y} = \frac{x+y-3}{z} = \frac{1}{x+y+z} = 2$$

$$\Rightarrow x+y+z = 0,5$$

$$\Rightarrow \frac{0,5-x+1}{x} = \frac{0,5-y+2}{y} = \frac{0,5-z-3}{z} = 2$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2}; y = \frac{5}{6}; z = \frac{-5}{6}$$

$$A = 4046 \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{5}{6}\right)^{2023} + \left(\frac{-5}{6}\right)^{2023} = 4046 \cdot \frac{1}{2} + 0 = 2023$$

Khi đó ta có:

Câu 106. (HSG 7 trường Tây Đô, huyện Hưng Hà 2022 - 2023; huyện Tam Dương 2016 - 2017)

Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn $\frac{y+z+1}{x} = \frac{x+z+2}{y} = \frac{x+y-3}{z} = \frac{1}{x+y+z}$.

Tính giá trị của biểu thức: $A = 2016x + y^{2017} + z^{2017}$

Lời giải

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{y+z+1}{x} = \frac{x+z+2}{y} = \frac{x+y-3}{z} = \frac{1}{x+y+z} = 2$$

$$\Rightarrow x+y+z = 0,5$$

$$\Rightarrow \frac{0,5-x+1}{x} = \frac{0,5-y+2}{y} = \frac{0,5-z-3}{z} = 2$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2}; y = \frac{5}{6}; z = -\frac{5}{6}$$

Khi đó ta có $A = 2016x + y^{2017} + z^{2017} = 1008$

Câu 107. (HSG 7 quận Hà Đông; huyện Yên Thế; huyện Quế Sơn 2022 - 2023)

Cho $\frac{x}{3} = \frac{y}{4}$ và $\frac{y}{5} = \frac{z}{6}$. Tính $M = \frac{2x+3y+4z}{3x+4y+5z}$.

Lời giải

Ta có: $\frac{x}{3} = \frac{y}{4} \Rightarrow \frac{x}{15} = \frac{y}{20}$; $\frac{y}{5} = \frac{z}{6} \Rightarrow \frac{y}{20} = \frac{z}{24}$.

Như vậy: $\frac{x}{15} = \frac{y}{20} = \frac{z}{24} = k \Rightarrow x = 15k, y = 20k, z = 24k$

$$M = \frac{2x+3y+4z}{3x+4y+5z} = \frac{2.15k+3.20k+4.24k}{3.15k+4.20k+5.24k} = \frac{186k}{245k} = \frac{186}{245}$$

Suy ra:

Câu 108. (HSG 7 huyện Khoái Châu 2015 – 2016)

Cho $\frac{x}{4} = \frac{y}{7}; \frac{y}{5} = \frac{z}{6}$. Tính $B = \frac{3x-4y+5z}{x-2y+5z}$.

Lời giải

Từ $\frac{x}{4} = \frac{y}{7}; \frac{y}{5} = \frac{z}{6}$ suy ra $\frac{x}{20} = \frac{y}{35} = \frac{z}{42}$

Đặt $\frac{x}{20} = \frac{y}{35} = \frac{z}{42} = k$

$$\Rightarrow x = 20k, y = 35k, z = 42k$$

$$B = \frac{3 \cdot 20k - 4 \cdot 35k + 5 \cdot 42k}{20k - 2 \cdot 35k + 5 \cdot 42k} = \frac{130k}{160k} = \frac{13}{16}$$

Khi đó

Câu 109. (HSG 7 huyện Chương Mỹ 2018 - 2019)

Cho $\frac{a+b}{a-3} = \frac{b+4}{b-4}$. Tính giá trị biểu thức: $D = \frac{a^3 + 3^3}{b^3 + 4^3}$

Lời giải

Từ $\frac{a+3}{a-3} = \frac{b+4}{b-4} \Rightarrow \frac{a+3}{b+4} = \frac{a-3}{b-4}$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{a+3}{b+4} = \frac{a-3}{b-4} = \frac{2a}{2b} = \frac{a}{b} \quad \text{và} \quad \frac{a+3}{b+4} = \frac{a-3}{b-4} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{3}{4}$$

Từ $\frac{a}{b} = \frac{3}{4} \Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^3 = \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{a^3}{b^3} = \frac{3^3}{4^3} = \frac{a^3 + 3^3}{b^3 + 4^3}$

$$\Rightarrow D = \frac{a^3 + 3^3}{b^3 + 4^3} = \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64}$$

Câu 110. (HSG 7 huyện Quốc Oai, năm học 2022 - 2023)

Cho $2x - y = \frac{2}{3}(x + y)$. Tính $C = \frac{x^2 + 5^2}{y^2 + 4^2}$

Cho

Lời giải

$$2x - y = \frac{2}{3}(x + y) \Rightarrow 2x - \frac{2}{3}x = y + \frac{2}{3}y \Rightarrow 4x = 5y$$

1. Ta có:

$$\Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{5}{4} \Rightarrow \frac{x^2}{y^2} = \frac{5^2}{4^2}$$

Theo tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có

$$\frac{x^2}{y^2} = \frac{5^2}{4^2} = \frac{x^2 + 5^2}{y^2 + 4^2}$$

$$\Rightarrow C = \frac{x^2 + 5^2}{y^2 + 4^2} = \frac{25}{16}$$

Câu 111. (Đề HSG 7 LDP huyện Hưng Hà 2022 - 2023)

Cho $x, y, z \neq 0$ thoả mãn: $\frac{x+y+2023z}{z} = \frac{y+z+2023x}{x} = \frac{x+z+2023y}{y}$. Tính giá trị của

biểu thức: $A = \left(1 + \frac{x}{y}\right) \left(1 + \frac{y}{z}\right) \left(1 + \frac{z}{x}\right)$

Lời giải

$$\frac{x+y+2023z}{z} = \frac{y+z+2023x}{x} = \frac{x+z+2023y}{y}$$

$$\Rightarrow \frac{x+y+2023z}{z} - 2022 = \frac{y+z+2023x}{x} - 2022 = \frac{x+z+2023y}{y} - 2022$$

$$\Rightarrow \frac{x+y+z}{z} = \frac{y+z+x}{x} = \frac{x+z+y}{y} \quad (1)$$

Nếu $x+y+z \neq 0$, từ (1) suy ra $x=y=z$

$$A = \left(1 + \frac{x}{y}\right) \left(1 + \frac{y}{z}\right) \left(1 + \frac{z}{x}\right) = 8$$

từ đó tính được

Nếu $x+y+z=0$, suy ra:
$$\begin{cases} x+y=-z \\ z+y=-x \\ x+z=-y \end{cases}$$

$$A = \left(1 + \frac{x}{y}\right) \left(1 + \frac{y}{z}\right) \left(1 + \frac{z}{x}\right) = \frac{x+y}{y} \cdot \frac{y+z}{z} \cdot \frac{x+z}{x} = \frac{(-z) \cdot (-x) \cdot (-y)}{y \cdot z \cdot x} = -1$$

từ đó ta có

$$A = \begin{cases} 8 & \text{khi } x+y+z \neq 0 \\ -1 & \text{khi } x+y+z = 0 \end{cases}$$

Vậy

Câu 112. (HSG 7 đề khảo sát Thái Bình 2022 - 2023)

Cho $a, b, c \neq 0$ thoả mãn: $\frac{a+b-2023c}{c} = \frac{b+c-2023a}{a} = \frac{c+a-2023b}{b}$. Tính giá trị của

biểu thức: $C = \left(1 + \frac{b}{a}\right) \left(1 + \frac{a}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{b}\right)$

Lời giải

$$\frac{a+b-2023c}{c} = \frac{b+c-2023a}{a} = \frac{c+a-2023b}{b}$$

$$\Rightarrow \frac{a+b-2023c}{c} + 2024 = \frac{b+c-2023a}{a} + 2024 = \frac{c+a-2023b}{b} + 2024$$

$$\Rightarrow \frac{a+b+c}{c} = \frac{b+c+a}{a} = \frac{c+a+b}{b}$$

+ Nếu $a+b+c \neq 0$, từ (1) suy ra $a=b=c$

$$C = \left(1 + \frac{b}{a}\right) \left(1 + \frac{a}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{b}\right) = 2.2.2 = 8$$

từ đó tính được

$$\begin{cases} a+b = -c \\ b+c = -a \\ c+a = -b \end{cases}$$

+ Nếu $a+b+c=0$, suy ra:

$$C = \left(1 + \frac{b}{a}\right) \left(1 + \frac{a}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{b}\right) = \left(\frac{a+b}{a}\right) \left(\frac{a+c}{c}\right) \left(\frac{c+b}{b}\right) = \frac{(-a).(-b).(-c)}{a.b.c} = -1$$

từ đó ta có

$$A = \begin{cases} 8 \text{ khi } a+b+c \neq 0 \\ -1 \text{ khi } a+b+c = 0 \end{cases}$$

Vậy

Câu 113. (HSG 7 huyện Mỹ Đức, 2021 - 2022)

Cho dãy tỉ số bằng nhau:

$$\frac{2022a+b+c+d}{a} = \frac{1+2022b+c+d}{b} = \frac{a+b+2022c+d}{c} = \frac{a+b+c+2022d}{d}$$

$$P = \frac{a+b}{c+d} + \frac{b+c}{d+a} + \frac{c+d}{a+b} + \frac{d+a}{b+c}$$

Tính giá trị của biểu thức: (Với các mẫu số của các phân số trên khác 0)

Lời giải

$$\frac{2022a+b+c+d}{a} = \frac{1+2022b+c+d}{b} = \frac{a+b+2022c+d}{c} = \frac{a+b+c+2022d}{d}$$

$$\Rightarrow \frac{2022a+b+c+d}{a} - 2021 = \frac{a+2022b+c+d}{b} - 2021$$

$$= \frac{a+b+2022c+d}{c} - 2021 = \frac{a+b+c+2022d}{d} - 2021$$

$$\Rightarrow \frac{a+b+c+d}{a} = \frac{a+b+c+d}{b} = \frac{a+b+c+d}{c} = \frac{a+b+c+d}{d} \quad (*)$$

$$\text{TH1: } a+b+c+d=0 \Rightarrow a+b = -(c+d); a+c = -(b+d);$$

$$a+d = -(b+c) \quad \text{Ta có: } P = -1 - 1 - 1 - 1 = -4$$

$$\text{TH2: } a+b+c+d \neq 0 \quad \text{Từ } (*) \text{ suy ra } a=b=c=d$$

$$\text{Ta có: } P = 1+1+1+1 = 4$$

$$\text{Vậy } P \in \{4; -4\}$$

Câu 114. (HSG 7 huyện Vĩnh Yên; trường Thái Hưng, huyện Hưng Hà 2022 - 2023; trường Hồng Liên 2018 - 2019)

$$\frac{a+b-c}{c} = \frac{b+c-a}{a} = \frac{c+a-b}{b}$$

Cho ba số thực a, b, c khác 0 thỏa mãn:

$$B = \left(1 + \frac{b}{a}\right) \left(1 + \frac{a}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{b}\right)$$

Hãy tính giá trị của biểu thức:

Lời giải

+ Với $a+b+c \neq 0$, áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{a+b-c}{c} = \frac{b+c-a}{a} = \frac{c+a-b}{b} = \frac{a+b-c+b+c-a+c+a-b}{a+b+c} = \frac{a+b+c}{a+b+c} = 1$$

$$\frac{a+b-c}{c} = \frac{b+c-a}{a} = \frac{c+a-b}{b} = 1$$

Suy ra:

$$\Leftrightarrow \frac{a+b}{c} - 1 = \frac{b+c}{a} - 1 = \frac{c+a}{b} - 1 = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{a+b}{c} = \frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b} = 2$$

$$B = \left(1 + \frac{b}{a}\right) \left(1 + \frac{a}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{b}\right) = \frac{a+b}{a} \cdot \frac{c+a}{c} \cdot \frac{b+c}{b} = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$$

Khi đó:

+) Nếu $a+b+c=0 \Rightarrow a+b=-c; b+c=-a; c+a=-b$

$$B = \left(1 + \frac{b}{a}\right) \left(1 + \frac{a}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{b}\right) = \frac{a+b}{a} \cdot \frac{c+a}{c} \cdot \frac{b+c}{b} = \frac{-c}{a} \cdot \frac{-b}{c} \cdot \frac{-a}{b} = -1$$

Khi đó:

Vậy: +) Nếu $a+b+c \neq 0$ thì $B = 8$.

+) Nếu $a+b+c = 0$ thì $B = -1$.

Câu 115. (HSG 7 huyện Thanh Miện, 2021 - 2022)

Cho các số x, y, z khác 0 và $x+y+z \neq 0$ thỏa mãn $\frac{x+y-z}{z} = \frac{y+z-x}{x} = \frac{z+x-y}{y}$

$$P = \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{z}\right) \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{x}\right) \left(\frac{z}{x} + \frac{x}{y}\right)$$

Tính giá trị biểu thức

Lời giải

Với các số x, y, z khác 0 và $x+y+z \neq 0$ áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau có:

$$\frac{x+y-z}{z} = \frac{y+z-x}{x} = \frac{z+x-y}{y} = \frac{x+y+z}{x+y+z} = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x+y-z}{z} = 1 \\ \frac{y+z-x}{x} = 1 \\ \frac{z+x-y}{y} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=2z \\ y+z=2x \\ z+x=2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=3z \\ y+z+x=3x \\ z+x+y=3y \end{cases}$$

$$\Rightarrow 3x=3y=3z \Rightarrow x=y=z$$

$x=y=z$ vào biểu thức P ta có:

Thay

$$P = \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{z} \right) \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{x} \right) \left(\frac{z}{x} + \frac{x}{y} \right)$$

$$P = \left(\frac{x}{x} + \frac{y}{y} \right) \left(\frac{y}{y} + \frac{z}{z} \right) \left(\frac{z}{z} + \frac{x}{x} \right)$$

$$P = (1+1)(1+1)(1+1) = 8$$

Vậy giá trị của biểu thức $P = 8$

Câu 116. (HSG 7 trường THCS Phạm Đôn Lễ; trường Trần Thái Tông, huyện Hưng Hà năm 2022 - 2023)

Cho các số $a, b, c \neq 0$ thỏa mãn: $\frac{a-b+c}{2b} = \frac{c-a+b}{2a} = \frac{a-c+b}{2c}$

$$P = \left(1 + \frac{c}{b} \right) \cdot \left(1 + \frac{b}{a} \right) \cdot \left(1 + \frac{a}{c} \right)$$

Tính giá trị biểu thức:

Lời giải

$$P = \left(1 + \frac{c}{b} \right) \cdot \left(1 + \frac{b}{a} \right) \cdot \left(1 + \frac{a}{c} \right) = \frac{b+c}{b} \cdot \frac{a+b}{a} \cdot \frac{c+a}{c}$$

Ta có

*) TH 1: Nếu $a+b+c=0$ thì:

$$\begin{cases} a+b=-c \\ b+c=-a \\ a+c=-b \end{cases}$$

Thay vào biểu thức P ta có:

$$P = \frac{-a}{b} \cdot \frac{-c}{a} \cdot \frac{-b}{c} = -1 \quad (\text{vì } a, b, c \neq 0)$$

*) TH 2: Nếu $a+b+c \neq 0$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{a-b+c}{2b} = \frac{c-a+b}{2a} = \frac{a-c+b}{2c} = \frac{a-b+c+c-a+b+a-c+b}{2b+2a+2c} = \frac{a+b+c}{2(a+b+c)} = \frac{1}{2}$$

Suy ra:

$$\frac{a-b+c}{2b} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{a-b+c}{b} = 1 \Rightarrow a-b+c=b \Rightarrow a+c=2b$$

$$\frac{c-a+b}{2a} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{c-a+b}{a} = 1 \Rightarrow c-a+b=a \Rightarrow c+b=2a$$

$$\frac{a-c+b}{2c} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{a-c+b}{c} = 1 \Rightarrow a-c+b=c \Rightarrow a+b=2c$$

$$P = \frac{2a}{b} \cdot \frac{2c}{a} \cdot \frac{2b}{c} = 8$$

Thay vào biểu thức P ta có

Vậy $P=1$ nếu $a+b+c=0$; $P=8$ nếu $a+b+c \neq 0$

Câu 117. (HSG 7 Thị xã Thái Hòa – Nghệ An năm 2022 - 2023)

Cho ba số thực a, b, c khác 0 thỏa mãn: $\frac{a-2b+c}{b} = \frac{b-5c+a}{2c} = \frac{c-8a+b}{3a}$

Tính $P = \left(1 + \frac{a}{b}\right) \left(1 + \frac{b}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{a}\right)$

Lời giải

Từ $\frac{a-2b+c}{b} = \frac{b-5c+a}{2c} = \frac{c-8a+b}{3a}$ (a, b, c khác 0)

$$\Rightarrow \frac{a-2b+c}{b} + 3 = \frac{b-5c+a}{2c} + 3 = \frac{c-8a+b}{3a} + 3$$

$$\Rightarrow \frac{a+b+c}{b} = \frac{b+c+a}{2c} = \frac{c+a+b}{3a} \quad (1)$$

+ Nếu $a+b+c=0$ thì:

$$P = \left(1 + \frac{a}{b}\right) \left(1 + \frac{b}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{a}\right) = \frac{a+b}{b} \cdot \frac{b+c}{c} \cdot \frac{a+c}{a} = \frac{-c}{b} \cdot \frac{-a}{c} \cdot \frac{-b}{a} = -1$$

+ Nếu $a+b+c \neq 0$ thì từ (1) $\Rightarrow b=2c=3a \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{1}{3}; \frac{b}{c} = \frac{2}{1}; \frac{c}{a} = \frac{3}{2}$

Thay vào P ta có $P=10$

Câu 118. (HSG 7 huyện Nga Sơn, Thanh Hóa; Quảng Ninh năm 2022 - 2023)

Cho $\frac{a}{b+c} = \frac{b}{c+a} = \frac{c}{a+b}$. Tính giá trị biểu thức: $P = \frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b}$

Lời giải

+ Nếu $a+b+c=0 \Rightarrow a+b=-c; b+c=-a; a+c=-b$

$$P = \frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} = \frac{-c}{c} + \frac{-a}{a} + \frac{-b}{b} = (-1) + (-1) + (-1) = -3$$

Khi đó

+ Nếu $a+b+c \neq 0$ thì: $\frac{a}{b+c} = \frac{b}{c+a} = \frac{c}{a+b} = \frac{a+b+c}{2(a+b+c)} = \frac{1}{2}$

Suy ra $b+c=2a; c+a=2b; a+b=2c$

$$P = \frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} = \frac{2c}{c} + \frac{2a}{a} + \frac{2b}{b} = 6$$

Khi đó $P = -3$ hoặc $P = 6$

Câu 119. (HSG 7 huyện Văn Lâm, năm học 2022 – 2023)

Cho $\frac{a+b}{c} = \frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b}$. Tính giá trị của biểu thức $B = \frac{a}{b+c} + \frac{a+b}{c} + \frac{b}{c+a}$

Lời giải

Theo tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{a+b}{c} = \frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b} = \frac{2(a+b+c)}{a+b+c}$$

$$\text{Nếu } a+b+c \neq 0 \Rightarrow \frac{a+b}{c} = \frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b} = 2 \Rightarrow \frac{a}{b+c} = \frac{1}{2}; \frac{a+b}{c} = 2; \frac{b}{c+a} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow B = \frac{a}{b+c} + \frac{a+b}{c} + \frac{b}{c+a} = \frac{1}{2} + 2 + \frac{1}{2} = 3$$

$$\text{Nếu } a+b+c = 0 \Rightarrow B = \frac{a}{b+c} + \frac{a+b}{c} + \frac{b}{c+a} = -3$$

Vậy: + Nếu $a+b+c \neq 0$ thì $B = 3$

+ Nếu $a+b+c = 0$ thì $B = -3$

Câu 120. (HSG 7 huyện Đồng Xuân, năm học 2022 – 2023)

$$\text{Cho } x+y+z=2023 \text{ và } \frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} = \frac{1}{7}$$

$$P = \frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y}$$

Tính giá trị của biểu thức

Lời giải

$$P = \frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y}$$

Ta có:

$$\Rightarrow P+3 = \frac{x}{y+z} + 1 + \frac{y}{z+x} + 1 + \frac{z}{x+y} + 1$$

$$= \frac{x+y+z}{y+z} + \frac{y+z+x}{z+x} + \frac{z+x+y}{x+y}$$

$$= (x+y+z) \left(\frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} + \frac{1}{x+y} \right) = 2023 \cdot \frac{1}{7} = 289$$

$$\Rightarrow P = 289 - 3 = 286$$

Vậy, $P = 286$

Câu 121. (HSG 7 huyện Lang Chánh, tỉnh Thanh Hoá, năm học 2022 - 2023)

$$\text{Cho } a, b, c \text{ thỏa mãn } \frac{b-c}{(a-b)(a-c)} + \frac{c-a}{(b-a)(b-c)} + \frac{a-b}{(c-a)(c-b)} = 2022$$

$$Q = \frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a}$$

Tính giá trị biểu thức

Lời giải

$$\frac{b-c}{(a-b)(a-c)} + \frac{c-a}{(b-a)(b-c)} + \frac{a-b}{(c-a)(c-b)} = 2022$$

$$\Rightarrow \frac{(b-a)-(c-a)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(c-b)-(a-b)}{(b-a)(b-c)} + \frac{(a-c)-(b-c)}{(c-a)(c-b)} = 2022$$

$$\Rightarrow \frac{1}{c-a} + \frac{1}{a-b} + \frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} = 2022$$

$$\Rightarrow 2 \left(\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} \right) = 2022$$

$$\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} = 1011$$

Vậy

Câu 122. (HSG 7 thị xã Nghi Sơn năm 2022 - 2023; huyện Lục Nam 2018 - 2019)

$$\frac{2a+b+c+d}{a} = \frac{a+2b+c+d}{b} = \frac{a+b+2c+d}{c} = \frac{a+b+c+2d}{d}$$

Cho dãy tỉ số bằng nhau:

$$Q = \frac{a+b}{c+d} + \frac{b+c}{d+a} + \frac{c+d}{a+b} + \frac{d+a}{b+c}$$

Tính giá trị biểu thức:

Lời giải

$$\frac{2a+b+c+d}{a} = \frac{a+2b+c+d}{b} = \frac{a+b+2c+d}{c} = \frac{a+b+c+2d}{d}$$

Ta có:

$$\begin{aligned} \Rightarrow 1 + \frac{a+b+c+d}{a} &= 1 + \frac{a+b+c+d}{b} = 1 + \frac{a+b+c+d}{c} = 1 + \frac{a+b+c+d}{d} \\ \Rightarrow \frac{a+b+c+d}{a} &= \frac{a+b+c+d}{b} = \frac{a+b+c+d}{c} = \frac{a+b+c+d}{d} \end{aligned} \quad (1)$$

+ Nếu $a+b+c+d \neq 0$ thì từ (1) $\Rightarrow a=b=c=d$

$$Q = \frac{a+b}{c+d} + \frac{b+c}{d+a} + \frac{c+d}{a+b} + \frac{d+a}{b+c} = 1+1+1+1=4$$

Khi đó,

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b = -(c+d) \\ b+c = -(a+d) \\ c+d = -(a+b) \\ d+a = -(b+c) \end{cases}$$

+ Với $a+b+c+d = 0$

$$\begin{aligned} Q &= \frac{a+b}{c+d} + \frac{b+c}{d+a} + \frac{c+d}{a+b} + \frac{d+a}{b+c} = \frac{-(c+d)}{c+d} + \frac{-(d+a)}{d+a} + \frac{-(a+b)}{a+b} + \frac{-(b+c)}{b+c} \\ &= -1-1-1-1 = -4 \end{aligned}$$

Câu 123. (HSG 7 huyện Than Uyên – Lai Châu năm 2022 - 2023)

$$\text{Cho } a, b, c \text{ khác } 0 \text{ và } \frac{a+b-c}{c} = \frac{a-b+c}{b} = \frac{b+c-a}{a}$$

$$A = \frac{(a+b)(b+c)(a+c)}{abc}$$

Tính giá trị của biểu thức

Lời giải

$$\frac{a+b-c}{c} = \frac{a-b+c}{b} = \frac{b+c-a}{a}$$

Vì nên:

$$\frac{a+b-c}{c} + 2 = \frac{a-b+c}{b} + 2 = \frac{b+c-a}{a} + 2 \Rightarrow \frac{a+b+c}{c} = \frac{a+b+c}{b} = \frac{b+c+a}{a} \quad (1)$$

- Nếu $a+b+c = 0$ thì $a+b = -c$; $b+c = -a$; $c+a = -b$

$$A = \frac{(a+b)(b+c)(a+c)}{abc} = \frac{(-c)(-b)(-a)}{abc} = -1$$

Khi đó:

- Nếu $a+b+c \neq 0$ thì từ (1) suy ra: $a=b=c$

$$A = \frac{(a+b)(b+c)(a+c)}{abc} = 8$$

Khi đó:

Câu 124. (HSG 7 huyện Yên Định; huyện Thanh Trì 2022 - 2023)

Cho $a, b, c > 0$ và: $\frac{2b+c-a}{a} = \frac{2c-b+a}{b} = \frac{2a+b-c}{c}$

$$P = \frac{(3a-2b)(3b-2c)(3c-2a)}{(3a-c)(3b-a)(3c-b)}$$

Tính:

Lời giải

$$\frac{2b+c-a}{a} = \frac{2c-b+a}{b} = \frac{2a+b-c}{c}$$

Theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$= \frac{(2b+c-a) + (2c-b+a) + (2a+b-c)}{a+b+c} = \frac{2(a+b+c)}{a+b+c} = 2$$

Suy ra: $\begin{cases} 2b+c-a=2a \\ 2c-b+a=2b \\ 2a+b-c=2c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a-2b=c \\ 3b-2c=a \\ 3c-2a=b \end{cases}$ và $\begin{cases} 3a-c=2b \\ 3b-a=2c \\ 3c-b=2a \end{cases}$

$$P = \frac{1}{8}$$

Khi đó ta được

Câu 125. (HSG 7 huyện Thường Xuân năm 2022 - 2023)

Cho x, y, z, t thỏa mãn: $\frac{x}{y+z+t} = \frac{y}{z+t+x} = \frac{z}{t+x+y} = \frac{t}{x+y+z}$

$$P = \left(\frac{x+y}{z+t}\right)^{2020} + \left(\frac{y+z}{x+t}\right)^{2021} + \left(\frac{z+t}{x+y}\right)^{2022} + \left(\frac{t+x}{z+y}\right)^{2023}$$

Tính

Lời giải

$$\frac{x}{y+z+t} = \frac{y}{z+t+x} = \frac{z}{t+x+y} = \frac{t}{x+y+z}$$

Ta có:

$$\Rightarrow \frac{x}{y+z+t} + 1 = \frac{y}{z+t+x} + 1 = \frac{z}{t+x+y} + 1 = \frac{t}{x+y+z} + 1$$

$$\Rightarrow \frac{x+y+z+t}{y+z+t} = \frac{x+y+z+t}{z+t+x} = \frac{x+y+z+t}{t+x+y} = \frac{x+y+z+t}{x+y+z} \quad (1)$$

$$+ \text{TH1: } x+y+z+t=0$$

Từ (1) $\Rightarrow x+y = -z-t; y+z = -t-x; z+t = -y-x; t+x = -y-z$

$$\Rightarrow P = \left(\frac{x+y}{z+t}\right)^{2020} + \left(\frac{y+z}{x+t}\right)^{2021} + \left(\frac{z+t}{x+y}\right)^{2022} + \left(\frac{t+x}{z+y}\right)^{2023}$$

$$= \left(\frac{-z-t}{z+t}\right)^{2020} + \left(\frac{-x-t}{x+t}\right)^{2021} + \left(\frac{-x-y}{x+y}\right)^{2022} + \left(\frac{-y-z}{z+y}\right)^{2023}$$

$$= 1 + (-1) + 1 + (-1) = 0$$

$$+ \text{TH2: } x+y+z+t \neq 0$$

$$\text{Từ (1)} \Rightarrow y+z+t = z+t+x = t+x+y = x+y+z \Rightarrow x=y=z=t$$

Thay các biến y, z, t bởi x ta được:

$$P = \left(\frac{x+x}{x+x}\right)^{2020} + \left(\frac{x+x}{x+x}\right)^{2021} + \left(\frac{x+x}{x+x}\right)^{2022} + \left(\frac{x+x}{x+x}\right)^{2023} = 1+1+1+1=4$$

$$\text{Vậy: } P=0 \text{ hoặc } P=4$$

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

<https://www.vnteach.com>