CÁC BÀI THI TOÁN QUỐC GIA VIỆT NAM

(Từ năm 1962 đến 2005)

© Copyright 2005

By Hà Duy Hưng and www.ddtoanhoc.net

LỜI NÓI ĐẦU

Mục đích của tài liệu nhỏ này là giới thiệu tới rộng rãi các bạn, đặc biệt là các bạn học sinh phổ thông tất cả các đề thi Toán quốc gia Việt Nam, thuộc bảng A. Tài liệu này được giữ bản quyền bởi *www.ddtoanhoc.net*[1]

[2]Kì thi chọn học sinh giỏi Toán toàn quốc nhằm chọn những học sinh giỏi Toán lớp 10 (nay là lớp 12) được tổ chức hàng năm lần đầu tiên vào năm học 1961-1962 (trừ năm 1973 chúng ta không tổ chức kì thi). Thực tế các năm từ 1962 đến năm 1975 kì thi chỉ được diễn ra ở miền Bắc (gọi là kì thi chọn học sinh giỏi Toán toàn miền Bắc). Sau ngày giải phóng hoàn toàn miền Nam thống nhất tổ quốc kì thi mới được tổ chức trong phạm vi toàn quốc.

Từ lần thi thứ nhất đến lần thi thứ tám kì thi được tổ chức trong một ngày, thời gian làm bài thi là *4 tiếng*, không kể thời gian chép đề. Từ lần thứ chín trở đi, kì thi mới được tổ chức trong hai ngày, thời gian làm bài mỗi ngày là *3 tiếng*. Đề thi thường được đề cập đến các phân môn của Toán học sơ cấp như: *Số học, Tổ hợp, Đồ thị, Đại số, Giải tích, Lượng giác, Hình học phẳng và Hình học không gian*.

Từ năm 1974 cho đến nay dựa trên kết quả của các kì thi Toán quốc gia hàng năm chúng ta đã tuyển chọn một số học sinh đạt điểm cao tham gia cuộc thi chọn đội tuyển Toán quốc gia đi thi Toán quốc tế (IMO) và đã đạt được nhiều thành tích vang dội.

---

[1] Tác giả xin cảm ơn ban quản trị mạng *www.ddtoanhoc.net* đã giới thiệu tài liệu này tới cácbạn đọc

[2] Có tham khảo từ cuốn sách *"Các bài thi học sinh giỏi Toán PTTH toàn quốc (từ năm 1962 đến 1991)"* của tác giả **Lê Hải Châu**, do nhà xuất bản Giáo dục ấn hành năm 1994

Lời ngỏ tới các bạn

Tài liệu này được viết dựa trên nhiều tài liệu tham khảo khác nhau và trên thực tế chỉ có khoảng 10 đề thi đổ lại đây các đề thi mới được chúng tôi tham khảo trực tiếp từ đề thi do Bộ Giáo dục và Đào tạo ấn hành. Vì vậy tài liệu này không thể tránh được những sai sót và thiếu sót. Tác giả rất mong nhận được những chỉnh sửa từ phía các bạn.

Bên cạnh đó, chúng tôi cũng đang cố gắng sưu tập thông tin xung quanh kết quả và đáp án (từ năm 1991 trở về đây) của từng cuộc thi . Vì vậy bất kì đóng góp nào về điều này chúng tôi đều rất hoan nghênh và đón nhận. Mọi liên lạc xin được gửi về địa chỉ email:

pluricomplex_amath@yahoo.com

Hà Nội những ngày cuối đông 2005

Hà Duy Hưng

Mục lục

Chương 1

Các bài thi Toán quốc gia Việt Nam, bảng A

1.1 Năm 1962

1. Chứng minh rằng với mọi số dương a, b, c, d ta có bất đẳng thức

$$\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}+\frac{1}{\frac{1}{c}+\frac{1}{d}} \le \frac{1}{\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+d}}$$

2. Hãy xác định đạo hàm bậc nhất tương ứng với giá trị $x = 1$ của hàm số

$$f(x) = (1+x)\cdot\sqrt{2+x^2}\cdot\sqrt[3]{3+x^3}$$

3. Cho một tứ diện $ABCD$ và A', B' là những hình chiếu của các đỉnh A, B lên các mặt đối diện. Chứng minh rằng AA' và BB' cắt nhau khi và chỉ khi hai đường thẳng AB và CD vuông góc với nhau. Nếu $AC = AD = BC = BD$ thì hai đường thẳng AA' và BB' có cắt nhau không ?

4. Đường cao của một hình chóp tứ giác đều bằng h. Mặt bên tạo với đáy một góc α. Qua cạnh đáy ta dựng một thiết diện vuông góc với mặt đối diện. Tính thể tích của hình chóp tạo thành và biện luận công thức tìm được.

5. Giải phương trình sau đây với ẩn số thực x:

$$\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{1}{4}$$

1.2 Năm 1963

1. Ba học sinh lớp X tên là Dần, Mão, Thìn đi chơi nhìn thấy một người lái một chiếc xe ô tô vi phạm luật lệ giao thông, không ai nhớ số xe là bao nhiêu, nhưng mỗi người đều nhớ một đặc điểm của số xe. Dần nhớ rằng hai chữ số đầu giống nhau, Mão nhớ rằng hai chữ số cuối cùng giống nhau. Thìn thì quả quyết rằng số xe có bốn chữ số là một số chính phương. Chúng ta hãy thử tìm số xe đó ?

2. Hãy xác định các giá trị giới hạn sau đây

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{8x^3-1}{6x^2-5x+1} \qquad \& \qquad \lim_{x\to a} \frac{\sqrt{x-b}-\sqrt{a-b}}{x^2-a^2}$$

3. Giải phương trình

$$\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = 2$$

4. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Người ta cắt hình hộp này bằng một mặt phẳng qua ba đỉnh A, B', D'. Chứng minh rằng đường chéo của $A'C$ của hình hộp cắt thiết diện tam giác tạo thành tại trọng tâm của tam giác đó.

5. Đáy của một hình lăng trụ đứng là một hình thoi $ABCD$ cạnh a và góc nhọn 60^0. Ta nối đỉnh B' với điểm giữa M của AD, đỉnh D' với điểm giữa N của AB. Hai đường thẳng $B'M$ và $D'N$ cắt nhau theo góc $B'OD'$ bằng α. Tìm thể tích của hình lăng trụ đó.

6. Hội nghị đại biểu thanh niên bàn về công tác chống hạn ở một huyện gồm có 47 nam nữ thanh niên. Cô Lê nhận ra mình quen 16 nam, cô Đào nhận ra mình quen 17 nam, cô Mận quen 18 nam, ... , cô Cam người nữ cuối cùng quen tất cả các bạn nam có mặt. Hỏi rằng hội nghị có bao nhiêu nam và bao nhiêu nữ thanh niên ?

7. (a) Hãy xác định giá trị của m sao cho phương trình

$$x^2 + (2m+6)x + 4m + 12 = 0$$

   có hai nghiệm số và cả hai lớn hơn -1.

   (b) Tính đạo hàm của hàm số sau đây

$$f(u) = \frac{u+\sqrt{u^2+1}}{\sqrt{1+u^2}-u} + \frac{\sqrt{1+u^2}-u}{u+\sqrt{1+u^2}}$$

8. Giải phương trình

$$\sin^3 x\cos 3x + \cos^3 x\sin 3x = \frac{3}{8}$$

9. Cho một hình chóp tam giác $S.ABC$ có mặt SCB vuông góc với đáy, các cạnh $SC = SB = 1$ và các góc phẳng ở đỉnh bằng 60^0. Hãy xác định thể tích của hình chóp.

10. Tính cạnh a và diện tích S của một tam giác biết hai góc A và B và nửa chu vi p. Hãy xác định S với $p \approx 23.6$; $A \approx 52^0 42'$; $B = 46^0 16'$.

© Copyright 2005 by Hà Duy Hưng & www.ddtoanhoc.net

1.3 Năm 1964

1. Gọi α là một góc tuỳ ý. Hãy xác định giá trị của các biểu thức dưới đây

$$\cos\alpha + \cos\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(\alpha + \frac{4\pi}{3}\right)$$

2. Vẽ đường biểu diễn của các hàm số dưới đây

$$u = \sqrt{(x^2-1)^2} \qquad \& \qquad y = x + \sqrt{(x^2-1)^2}$$

   Trong đó $x \in \mathbb{R}$. Biện luận số nghiệm của phương trình

$$x + \sqrt{(x^2-1)^2} = m$$

   tuỳ theo giá trị của tham số m.

3. Từ một điểm O nằm ngoài một mặt phẳng (P), ta hạ các đường vuông góc OH xuống các đường thẳng của P, đi qua một điểm cố định A. Hãy xác định quỹ tích (c) của điểm H.

   Gọi (C) là mặt nón nghiêng cói đỉnh tại O và đáy là (c). Chứng minh rằng các mặt phẳng song song với (P) hay vuông góc với OA cắt (C) theo những đường tròn.

   (C) có hai mặt đối xứng cắt nó theo hai góc α, β. Hãy xác định quan hệ giữa α và β.

4. Một cây đâm nhánh như sau: cây mọc lên được một năm thì bắt đầu đâm nhánh, sau đó cứ hai năm cây lại đâm ra một nhánh. Quy luật ấy của thân chính cũng được áp dụng cho các nhánh cây mọc ra, tức là mỗi nhánh sau khi mọc ra một năm thì đâm ra một nhánh con và nhánh chính đó cứ hai năm sau lại đâm ra một nhánh. Coi thân chính là một nhánh đặc biệt , tính số nhánh của cây trong năm thứ năm.

   Gọi số nhánh trong năm thứ n là S_n. Chứng minh rằng

$$S_n = S_{n-1} + S_{n-2}$$

   Gọi $a > b$ là hai số thoả mãn các đẳng thức $a + b = 1$ và $ab = -1$. Chứng minh bằng quy nạp rằng

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(a^{n+1} - b^{n+1}\right)$$

© Copyright 2005 by Hà Duy Hưng & www.ddtoanhoc.net

1.4 Năm 1965

1. Tại một thời điểm ban đầu $t = 0$, chiếc tầu thuỷ của hải quân ta ở vị trí ban đầu O phát hiện một chiếc tầu thuỷ của địch ở vị trí ban đầu A, cách tầu của ta là $OA = a$ và đang chạy với vận tốc v không đổi trên đường thẳng vuông góc với OA. Để đuổi bắn quân địch ta mở máy chạy với vận tốc là u không đổi trên một đường thẳng làm một góc nhọn φ với OA

   (a) Khi φ đã được chọn trước, hỏi khoảng cách cực tiểu đạt được giữa tầu ta và tầu địch là bao nhiêu? Các vận tốc u và v phải thoả mãn điều kiện gì thì cực tiểu ấy triệt tiêu?

   (b) Nếu điều kiện ấy không được thoả mãn thì phải chọn góc φ như thế nào để khoảng cách cực tiểu ở trên bé nhất có thể? Khi đạt khoảng cách ngắn nhất ấy thì hướng ta phải bắn vào tầu địch một góc là bao nhiêu vào đường đi của địch?

2. Cho một vòng tròn lớn với hai dây cung AB và CD song song với nhau. Gọi M là một điểm chạy trên vòng tròn ấy. Đường thẳng MD cắt đường thẳng AB tại Q.

   (a) Khi M tiến tới D hay tới C thì tâm vòng tròn tam giác ΔMCQ tiến tới đâu? Hãy xác định quỹ tích của tâm vòng tròn (MCQ).

   (b) Người ta lấy một điểm E cố định ngoài mặt phẳng của hình vẽ. Ta phải chọn điểm E như thế nào để cho quỹ tích của tâm mặt cầu $(MCQE)$ trùng với quỹ tích của tâm vòng tròn (MCQ) ?

3. (a) Cho hai số không âm x, y có tổng là a không đổi. Hãy xác định giá trị của x, y để cho tổng $x^m + y^m$ là bé nhất, trong đó m là số tự nhiên cho trước. Cho n số không âm có tổng không đổi, chứng minh rằng muốn cho tổng $x_1^m + x_2^m + \cdots + x_n^m$ là bé nhất thì phải có $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

   (b) Người ta muốn chưa một mét khối bột hoá chất vào 8 thùng gỗ hình lập phương mà mỗi mặt phẳng tấm gỗ có bề dày nhất định không đáng kể. Giá tiền mỗi tâm gỗ vuông với bề dầy ấy tỉ lệ với bình phương diện tích của nó. Hỏi phải chọn các cạnh $x_1, x_2, \ldots, x_8$ như thế nào của 8 thùng gỗ đó mà đỡ tốn tiền gỗ nhất?

© Copyright 2005 by Hà Duy Hưng & www.ddtoanhoc.net

1.5 Năm 1966

1. Người ta tính rằng nếu không kể sức cản của không khí thì mỗi viên đạn bắn ra từ nòng của một khẩu súng vạch ra trong không gian một đường parabol nằm trong mặt phẳng đứng qua trục của nòng súng. Nếu lấy vị trí của khẩu súng trên mặt đất làm gốc O, lấy đường thẳng nằm ngang làm trục hoành Ox và lấy đường thẳng đứng làm trục tung Oy thì phương trình của đường parabol ấy là
$$y = -\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2 + x\tan\alpha$$
trong đó α là góc của nòng súng với mặt đất, g là gia tốc trọng trường, v_0 là vận tốc ban đầu của viên đạn

   (a) Với góc α như thế nào thì viên đạn đi xa nhất ?

   (b) Với những góc α nào thì viên đạn trúng vào một điểm có toạ độ $X \geq 0$, $Y \geq 0$? Những điểm bắn tới được trong phạm vi không gian nào?

2. Trong một mặt phẳng (P) người ta cho hai đường thẳng cố định a và b và hai đường thẳng biến thiến x và y; trong khi biến thiên x và y luôn luôn song song với nhau và theo thứ tự đi qua hai điểm A và B nằm trên đường thẳng A; x cắt b ở điểm C; y cắt b ở D. Qua giao điểm M của AB và CD người ta dựng đường thẳng song song với x, nó cắt a ở L và b ở N

   (a) Có nhận xét gì về ba điểm L, M, N ? Chứng minh nhận xét đó. Hãy xác định quỹ tích của điểm M?

   (b) Cho một mặt phẳng thứ hai P' không song song với P và một điểm O nằm ngoài P và P'. Các mặt phẳng Oa, Ob, Ox, Oy có thể hoặc cắt P' hoặc song song với P', trong trường hợp chúng cắt P' thì các giao điểm với P' sẽ theo thứ tự gọi là a', b', x', y'. Như vậy trong mặt phẳng P' sẽ có một bài toán quỹ tích đối với giao điểm M' của đường thẳng M với mặt phẳng P'. Hãy phát biểu bài toán quỹ tích đó ?

   (c) Tìm xem x và y phải ở vị trí nào thì x' và y' song song với nhau, ở vị trí nào thì $A'D'$ và $B'C'$ song song với nhau?

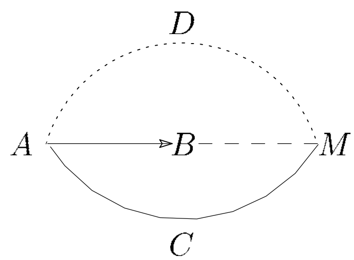
3. Cho ba số x, y, z không âm thoả mãn các đẳng thức dưới đây
$$x + by \leq 36 \quad \& \quad 2x + 3z \leq 72$$
trong đó b là một số dương cho trước. Chứng minh rằng tổng $x + y + z$ lớn nhất là bằng $\max\{36\,,\ 24 + \frac{36}{b}\}$.

   Ứng dụng. Người ta vận chuyển hàng điểm A đến điểm M thì có ba cách vận chuyển như sau:

   (a) Chuyển bằng xe hơi theo đường ACM.

(b) Chuyển bằng đường thuyền theo đường ADM.

(c) Chuyển bằng xe hơi từ A đến B rồi chuyển tiếp bằng thuyền từ B đến M



Tổng số xe hơi có thể dùng để vận chuyển là 9 chiếc, tổng số thuyền là 45 chiếc. Mỗi chiếc xe hơi nếu chạy trên đường AB thì đảm bảo trung bình mỗi ngày chuyển được bốn tấn hàng từ A đến B và nếu chạy trên đường ACM thì mỗi ngày 2 tấn hàng từ A đến M. Mỗi chiếc thuyền nếu đi đường BM thì đảm bảo mỗi ngày vận chuyển được $\frac{8}{15}$ tấn hàng từ A đến M. Hỏi rằng nếu tổ chức vận chuyển như thế nào (bao nhiêu tấn mỗi ngày theo cách 1, theo cách 2, và theo cách 3) để cho tổng số tấn vận chuyển được là nhiều nhất? Nếu mỗi chiếc xe hơi chạy trên đường ACM đảm bảo không tới $\frac{4}{3}$ mỗi ngày thì nên tổ chức vận chuyển như thế nào?

© Copyright 2005 by Hà Duy Hưng & www.ddtoanhoc.net

1.6 Năm 1967

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số

$$y = \frac{1}{3}|x^3 - x^2 - 2x| - |x + 1|$$

2. Cho hai bờ sông là hai đường thẳng song song nằm ngang. Dòng nước chảy song song với bờ từ trái sang phải với vận tốc là u. Một chiếc phà có vận tốc riêng không đổi là v, xuất phát từ điểm O của bờ dưới lấy làm trục Ox chở xe sang bờ kia

   (a) Biết rằng đường đi thực tế của phà làm một góc α với Ox, hỏi rằng vận tốc thực tế V của phà là bao nhiêu? Biện luận.

   (b) Phải chọn góc α là bao nhiêu để thời gian đi là ít nhất ?

3. Cho một đường tròn (L) có tâm là O nội tiếp trong một hình thoi $ABCD$. Một tiếp tuyến biến thiên của đường tròn (L) cắt các đường thẳng AB, AD, BC, CD theo thứ tự ở các điểm M, N, P, Q.

   (a) Hãy đoán nhận hệ thức giữa hai đoạn thẳng BM và DN; chứng minh hệ thức đó. Trên hình vẽ còn có những hệ thức nào đáng chú ý (phát hiện được càng nhiều càng tốt).

   (b) Bốn đường tròn cùng đi qua điểm O và theo thứ tự có tâm là A, B, C, D cắt bốn đoạn thẳng AB, BC, CD, DA ở tám điểm. Hãy xét xem hình tám cạnh lồi nhận tám điểm đó làm đỉnh có tính chất gì đặc biệt, chứng minh các tính chất đó. Sử dụng vào việc dựng hình tám cạnh đều.

   (c) Hãy phát biểu một bài toán trong không gian bằng cách cho hình vẽ của bài toán trên đây quay quanh trục AC.

© Copyright 2005 by Hà Duy Hưng & www.ddtoanhoc.net

1.7 Năm 1968

1. Cho hai số a, b thoả mãn điều kiện $a \geq b > 0$, và $a + b = 1$

   (a) Chứng minh rằng nếu m, n là các số nguyên dương thoả mãn $m > n$ thì $a^m - a^n \geq b^m - b^n > 0$

   (b) Với mỗi số nguyên dương n người ta thiết lập tam thức bậc hai

   $$f_n(x) = x^2 - b^n x - a^n$$

   Chứng minh rằng tam thức $f_n(x)$ có hai nghiệm số phân biệt nằm giữa -1 và 1.

2. Cho một đường tròn cố định O bán kính r. Một tam giác biến thiên ΔABC luôn ngoại tiếp đường tròn đó và có đỉnh A chạy trên đường thẳng cố định x, còn hai đỉnh kia chạy trên một đường thẳng cố định y song song với x.

   (a) Cho trước đường tròn O, hai đường thẳng x, y và góc A hãy dựng tam giác ΔABC. Biện luận.

   (b) Tính các góc của tam giác ΔABC theo góc A, bán kính r và khoảng cách h giữa hai đường thẳng x, y. Biện luận.

   (c) Có nhận xét gì về mối quan hệ giữa hai đoạn thẳng IB và IC (I là tiếp điểm của đường tròn O với đường thẳng y ? Có cách gì để đoán nhận ra mối quan hệ đó mà chưa cần chứng minh gì cả ? Chứng minh điều đoán nhận đó.

   Từ hệ thức giữa IB và IC hãy cố gắng phát hiện ra những hệ thức đáng chú ý khác (phát hiện được càng nhiều càng tốt).

© Copyright 2005 by Hà Duy Hưng & www.ddtoanhoc.net

1.8 Năm 1969

1. Trong một trạm lưới liên lạc giữa hai vùng A và B có n trạm ở vùng A và k trạm ở vùng B. Mỗi trạm ở vùng A có thể liên lạc được với ít nhất $k-p$ trạm ở vùng B. Chứng minh rằng nếu $n \cdot p < k$ thì có ít nhất một trạm ở vùng B có thể liên lạc được với mọi trạm ở vùng A.

2. Hãy xác định góc x biết rằng $0 < x < \pi$ và

$$\frac{8}{3\sin x - \sin 3x} + 3\sin^2 x \leq 5$$

3. Cho những số $x_>0, y_1 > 0, x_2 < 0, y_2 > 0, x_3 < 0, y_3 < 0, x_4 > 0 > y_4$. Biết rằng với mỗi $i = \overline{1,4}$ ta có $(x_i - a)^2 + (y_i - b)^2 \leq c^2$. Hãy chứng minh rằng $a^2 + b^2 \leq c^2$. Phát biểu sự kiện trên dưới dạng một mệnh đề trong hình học phẳng.

4. Cho hai vòng tròn tâm O, O' bán kính R, R' tương ứng cắt nhau ở hai điểm P, Q và mọi đường thẳng (Δ) biến thiên luôn bị hai vòng tròn nói trên cắt thành một hàng điểm điều hoà.

   (a) Từ hai tâm O và O' người ta hạ các đường vuông góc OH và $O'H'$ xuống đường thẳng (Δ). Hãy dùng suy luận logic mà đoán nhận quỹ tích của các điểm H và H' (càng đoán nhận được chính xác càng tốt).

   (b) Chứng minh những điều đoán nhận về quỹ tích của hai điểm H và H' và xác định giới hạn của các quỹ tích đó. Trong trường hợp nào thì quỹ tích đi qua hai điểm O và O'.

   (c) Với giả thiết rằng $OO' < \sqrt{R^2 + R'^2}$ hãy xác định trên đưuường thẳng (Δ) một điểm M sao cho tổng của các đoạn thẳng MO và MO' là ngắn nhất so với mọi con đường khác nối O và O' và có điểm qua một điểm trên (Δ). Chứng minh rằng đường đi ngắn nhất đó là không đổi khi (Δ) biến thiên. Phải đổi câu hỏi như thế nào để $OO' > \sqrt{R^2 + R'^2}$.

© Copyright 2005 by Hà Duy Hưng & www.ddtoanhoc.net

1.9 Năm 1970

1. Cho A, B, C là ba góc của một tam giác ΔABC. Chứng minh rằng
$$\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}<\frac{1}{4}$$

2. Tìm tất cả các số tự nhiên không chia hết cho 45 mà là ước số của số $N = 1890$. Có bao nhiêu số như thế ?

3. Với mỗi điểm (x, y) trong mặt phẳng toạ độ người ta cho ứng với một số thực $f(x, y)$. Giả sử rằng
   (a) $f(x, 0) = ax$ với a là một hằng số khác không
   (b) Nếu (x_1, y_1) và (x_2, y_2) là hai điểm phân biệt trong mặt phẳng toạ độ mà $f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2)$ thì $f(x, y)$ có giá trị không đổi tại mọi điểm (x, y) của đường thẳng đi qua hai điểm đó.

   Hãy chứng minh rằng
   (a) Với mỗi số thực α tập hợp tất cả các điểm (x, y) tại đó $f(x, y) = \alpha$ là một đường thẳng D_α và tất cả các đường thẳng D_α đó đều song song với nhau.
   (b) Với mọi x, y ta có $f(x, y) = ax + by$ trong đó b là một hằng số.

4. Cho một vòng tròn cố định tâm O bán kính R với hai đường kính vuông góc cố định AB, CD và tiếp tuyến At tại điểm A. Một điểm M chạy trên đường tròn đó, các đường thẳng BM, DM cắt At theo thứ tự ở P và Q
   (a) Khi điểm M chạy trên đường tròn thì P, Q luôn có mối liên hệ sau đây: khoảng cách giữa hai điểm P và Q là tỉ lệ thứ tư của ba đoạn thẳng AP, AQ và đường kính. Sau đó tìm cách biểu diễn mối liên hệ này bằng một công thức đơn giản nhất.
   (b) Dùng thước và compa dựng điểm M sao cho BQ và DP song song với nhau.
   (c) Hai đường thẳng OP và BQ cắt nhau ở N. Dự đoán quỹ tích của N rồi chứng minh nó.
   (d) BP và BQ cắt tiếp tuyến ở điểm D theo thứ tự ở P' và Q'. Có nhận xét gì về mối liên hệ giữa P' và Q'. Chứng minh nhận xét đó. DP và DQ cắt đường thẳng BC ở P" và Q". Có nhận xét gì về mối liên hệ giữa P" và Q". Chứng minh rằng nhận xét đó.

5. Cho một khối lập phương $ABCD.EFGH$ và một mặt phẳng P đi qua đỉnh A và làm với ba cạnh AB, AD, AE ba góc bằng nhau

(a) Tính cosin chung của ba góc bằng nhau đó và dựng hình chiếu vuông góc của khối lập phương xuống mặt phẳng P.

(b) Căn cứ vào hình chiếu này để phát hiện ra những quan hệ đáng chú ý (càng phát hiện càng nhiều càng tốt) giữa mặt phẳng P với các đường thẳng nối các cặp điểm lấy trong tám điểm A, B, C, D, E, F, G, H và các mặt phẳng chứa từng bộ ba điểm cũng lấy trong 8 điểm đó.

© Copyright 2005 by Hà Duy Hưng & www.ddtoanhoc.net

1.10 Năm 1971

1. Người ta xét các cặp phân số tối giản $\dfrac{m}{n} < 1$ và $\dfrac{p}{q} < 1$ với m, n, p, q là các số nguyên dương sao cho nếu $\dfrac{m}{n} = \operatorname{tg}\alpha, \dfrac{p}{q} = \operatorname{tg}\beta$ thì $\alpha + \beta = 45^0$

   (a) Cho m và n hãy xác định p và q. Khi nào thì có lời giải ?

   (b) Cho n và q hãy xác định m và p. Khi nào thì có lời giải ?

   (c) Cho m và q hãy xác định n và p. Khi nào thì có một lời giải? Khi nào thì có hai lời giải ?

2. Cho một hình lập phương $ABCD.EFGH$ có cạnh $AB = 2a$ và xét các đường thẳng d cắt ba đường thẳng vô hạn AE, BC và DF (trường hợp đặc biệt d có thể song song với một trong ba đường thẳng đó). Gọi M là giao điểm của d với đường thẳng BC và m là khoảng cách từ M đến B

   (a) Hãy chứng minh rằng mặt phẳng MAE cắt FG tại một điểm E' cách một khoảng bằng m và mặt phẳng MDF cắt EH tại một điểm F' cách H cũng một khoảng bằng m. Từ đó suy ra cách dựng giao điểm P của đường thẳng d với mặt $EFGH$.

   (b) Tính khoảng cách từ P đến các đường thẳng EF và EH theo m. Hãy tìm một hệ thức giữa hai khoảng cách ấy không phụ thuộc vào m. Từ đó suy ra quỹ tích của điểm P. Phần nào của quỹ tích thì ứng với các điểm M trên cạnh BC?.

   (c) Các đường thẳng d tạo nên một mặt S. Mặt S cắt các mặt của hình lập phương theo những đường thẳng nào, tại sao?.

© Copyright 2005 by Hà Duy Hưng & www.ddtoanhoc.net

1.11 Năm 1972

1. Gọi α là góc biến thiên tuỳ ý và $x = \cos\alpha$, $y = \cos n\alpha$

   (a) Chứng minh rằng ứng với một giá trị của x trong khoảng $-1 \leq x \leq 1$ ta có một và chỉ một giá trị xác định của y. Coi y như là một hàm số của x, ta ký hiệu $y = T_n(x)$. Hãy tính $T_1(x), T_2(x)$ và chứng minh công thức
   $$T_{n+1}(x) \equiv 2x \cdot T_n(x) - T_{n-1}(x)$$
   Từ đó suy ra rằng $T_n(x)$ là một đa thức bậc n.

   (b) Chứng minh rằng đa thức $T_n(x)$ có n nghiệm thực phân biệt trong đoạn $[-1, 1]$.

2. Cho một số nguyên dương N,ta xét tất cả các ước số lẻ n của N và lấy tổng của tất cả các số dạng $(-1)^{\frac{n-1}{2}}$

   (a) Gọi tổng ấy là $f(N)$ hãy chứng minh rằng nếu r là một số nguyên, p là một số nguyên tố thì $f(2) = 1$ và $f(2^r) = 1$ và
   $$f(p) = \begin{cases} 2 & \text{nếu } p \text{ có dạng } 4k+1 \\ 0 & \text{nếu } p \text{ có dạng } 4k-1 \end{cases}$$
   $$f(p^r) = \begin{cases} 1+r & \text{nếu } p \text{ có dạng } 4k+1 \\ 1 & \text{nếu } p \text{ có dạng } 4k-1 \text{ và } r \text{ chẵn} \\ 0 & \text{nếu } p \text{ có dạng } 4k-1 \text{ và } r \text{ lẻ} \end{cases}$$

   (b) Chứng minh rằng f là hàm nhân tính, nghĩa là nếu M, N là hai số nguyên dương thoả mãn $\gcd(M, N) = 1$ thì
   $$f(MN) = f(M) \cdot f(N)$$

   dựa vào kết quả trên mà tính $f(5^4 \cdot 11^{28} \cdot 17^{19})$ và $f(1980)$. Nêu quy luật chung để tính $f(N)$.

3. Cho một tam giác ABC và một đường thẳng d đi qua đỉnh A và không song song với BC

   (a) Người ta dựng hình bình hành $CEFG$ sao cho các đỉnh E, F, G theo thứ tự nằm trên các đường thẳng d, AB, BC và sao cho CE song song với trung tuyến AI của tam giác ΔABC, sau đó dựng hình bình hành $EAKH$ sao cho các đỉnh K, H theo thứ tự nằm trên các đường thẳng AB và BC. Hai đường thẳng BC và d cắt nhau ở điểm U. Người ta lấy điểm V trên đường thẳng d đối xứng ới U qua điểm A. Chứng minh rằng điểm V, điểm I, giao điểm của FG và KH là ba điểm thẳng hàng với nhau và thẳng hàng với hai đỉnh B', C' của hình bình hành $BB'CC'$ nhận B, C làm hai đỉnh đối diện và có các cạnh theo thứ tự song song với d và AI.

(b) Xét cặp đường thẳng FG và KH cắt ba đường thẳng BC, CA, AB ở ba cặp điểm được sắp xếp như thế nào đó. Từ đó có thể phát biểu nên một định lý tổng quát như thế nào? Nếu trong mặt phẳng ABC có cho trước một điểm O thì qua O có thể dựng được hai đường thẳng FG và KH hay không?.

4. Cho một khối tứ diện đều $ABCD$ có cạnh a trên đoạn thẳng AB người ta lấy hai điểm E và E' sao cho $AE = \frac{a}{6}$; $AE' = \frac{5a}{6}$ trên đoạn thẳng AC người ta lấy hai điểm F, F' sao cho $AF = \frac{a}{4}$; $AF' = \frac{3a}{4}$ và trên đoạn thẳng AD lấy hai điểm G, G' sao cho $AG = \frac{a}{3}$; $AG' = \frac{2a}{3}$

(a) Trên mặt phẳng BCD hãy xác định hai giao tuyến của mặt phẳng này với hai mặt phẳng EFG và $E'F'G'$. Nghiên cứa xem hai giao tuyến này có vị trí tương đối như thế nào đối với tam giác BCD. Từ đó có thể phát biểu nên một định lý tổng quát như thế nào?

(b) Tính thể tích của khối $EFGE'F'G'$ theo a và tính góc mà hai mặt phẳng EFG làm với các đường thẳng AB, AC, AD.

© Copyright 2005 by Hà Duy Hưng & www.ddtoanhoc.net

1.12 Năm 1973

Năm 1973 Việt Nam không tổ chức kì thi.

© Copyright 2005 by Hà Duy Hưng & www.ddtoanhoc.net

1.13 Năm 1974

1. (a) Với số nguyên dương n là thì số sau đây

$$11\ldots1 - 77\ldots7$$

là số chính phương? (ở đây có $2n$ chữ số 1 và n chữ số 7).

(b) Hãy xác định tất cả các chữ số b sao cho

$$11\ldots1 - bb\ldots b$$

là số chính phương? (ở đây có $2n$ số 1 và n số b).

2. (a) Có bao nhiêu cặp số nguyên liên tiếp $x, x+1$ sao cho x là bộ của 9 và $x+1$ là bội của 25? Hãy xác định các cặp đó.

(b) Có bao nhiêu cặp số $(x, x+1)$ sao cho x là bội của 21 và $x+1$ là bội của 165?

(c) Hãy xác định các bộ ba số nguyên liên tiếp $(x, x+1, x+2)$ thoả mãn x là bội của 9, $x+1$ là bội của 25 và $x+2$ là bội của 4.

3. Cho một tam giác ABC cố định vuông ở A và đường cao AH. Từ chân H của đường cao ta hạ các đường vuông góc HP và HQ theo thứ tự xuống các cạnh AB và AC. Cho một điểm M chạy tuỳ ý trên đường thẳng PQ; đường thẳng vuông góc với đường thẳng MH ở điểm M cắt đường thẳng AB ở R và cắt các đường thẳng AC ở S

(a) Có những nhận xét gì về đường tròn qua ba điểm A, R, S và chứng minh nhận xét đó

(b) Nếu ta lấy đi hai vị trí của M_1, M_2 của điểm M thì ta sẽ có các vị trí tương ứng R_1 và R_2 của điểm R, S_1 và S_2. Chứng minh rằng tỉ số $\dfrac{R_1 \cdot R_2}{S_1 \cdot S_2}$ không đổi. Tam giác ABC phải thoả mãn điều kiện gì để cho R và S chạy với những vận tốc như nhau (khi M chạy trên đường thẳng PQ).

(c) Ta lấy điểm K đối xứng với điểm H qua tâm đối xứng M. Đường thẳng đi qua A và vuông góc với đường thẳng PQ cắt đường thẳng RS ở điểm D. Chứng minh rằng $\widehat{BHR} = \widehat{DHR}$. Hãy phát hiện thêm một đẳng thức tương tự.

4. Trong không gian cho 12 đường thẳng chứa 12 cạnh của một khối lập phương có cạnh bằng đơn vị. Người ta cắt 12 đường thẳng đó bằng một mặt phẳng P. Hãy xét sự tương giao của mặt phẳng P này với 12 đường thẳng nói trên. Biện luận theo các vị trí có thể của P.

© Copyright 2005 by Hà Duy Hưng & www.ddtoanhoc.net

1.14 Năm 1975

1. Không giải phương trình $x^3 - x + 1 = 0$ hãy xác định tổng của các luỹ thừa bậc tám của các nghiệm số của nó.

2. Giải phương trình sau đây

$$\frac{y^3+m^3}{(y+m)^3} + \frac{y^3+n^3}{(y+n)^3} + \frac{y^3+p^3}{(y+p)^3} - \frac{3}{2} + \frac{3}{2}\cdot\frac{y-m}{y+m}\cdot\frac{y-n}{y+n}\cdot\frac{y-p}{y+p} = 0$$

3. Cho tứ diện $ABCD$ có BA vuông góc với AC và DB vuông góc với mặt phẳng BAC. Gọi O là điểm giữa của AB, ta hãy hạ OK vuông góc với DC. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để tỉ số các thể tích

$$\frac{V_{KOAC}}{V_{KOBD}} = \frac{AC}{BD}$$

là $2AC \cdot BD = AB^2$.

4. Cho cấp số cộng $-1, 18, 37, \ldots,$ Tìm số hạng của cấp số mà khi viết toàn dùng chữ số 5.

5. Chứng minh rằng tổng các giá trị cực đại và cực tiểu của hàm số $y = \dfrac{\operatorname{cotg}^3 x}{\operatorname{cotg} 3x}$ trên $\left(0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right)$ là một số hữa tỷ.

6. Trong không gian cho một đường thẳng cố định Δ và một điểm A cố định nằm ngoài Δ. Một đường thẳng d biến thiên quay xung quanh điểm A. Gọi MN là đường thẳng vuông góc chung của d và Δ (M trên d và N trên Δ). Hãy tìm quỹ tích của điểm M và quỹ tích trung điểm của đoạn thẳng MN.

© Copyright 2005 by Hà Duy Hưng & www.ddtoanhoc.net

1.15 Năm 1976

1. Hãy tìm nghiệm nguyên của hệ phương trình

$$\begin{cases} x^{x+y} = y^{12} \\ y^{x+y} = x^3 \end{cases}$$

2. Hãy xác định dạng của tam giác ΔABC biết rằng

$$\frac{a\cos A + b\cos B + c\cos C}{a\sin A + b\sin B + c\sin C} = \frac{a+b+c}{9R}$$

ở đó a, b, c là độ dài của ba cạnh BC, CA, AB và R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ΔABC.

3. Chứng minh rằng với mọi điểm M trong tam giác ΔABC ta đều có bất đẳng thức

$$d_a d_b d_c \leq \frac{8S^3}{27abc}$$

trong đó d_a, d_b, d_c là khoảng cách từ điểm M đến các cạnh BC, CA, AB; a, b, c là độ dài của ba cạnh BC, CA, AB và S là số đo diện tích của tam giác đã cho. Hãy mở rộng bất đẳng thức trên cho trường hợp tứ diện trong không gian.

4. Tìm số có ba chữ số biết rằng số đó bằng 1.5 lần tích các giai thừa của ba chữ số của nó (ở đây tích các giai thừa của số n nghĩa là tích $1 \cdot 2 \cdots n$).

5. Cho mặt phẳng P và hai đường thẳng chéo nhau d, d' cắt P lần lượt ở A, A'. Gọi d" là những đường thẳng chuyển động song song với P và tựa lên d, d' ở M, M'

   (a) Hãy xác định vị trí của đường thẳng d" sao cho MM' là ngắn nhất.

   (b) Cho trước một đường thẳng $d_0^{"}$. Hãy xác định trong những đường thẳng d" đường thẳng $d_1^{"}$ vuông góc với đường thẳng $d_0^{"}$.

6. Cho k và n là hai số nguyên dương và $x_1, x_2, \ldots, x_k$ là những số dương có tổng bằng 1. Chứng minh rằng

$$x_1^{-n} + x_2^{-n} + \cdots + x_k^{-n} \geq k^{n+1}$$

© Copyright 2005 by Hà Duy Hưng & www.ddtoanhoc.net

1.16 Năm 1977

1. Giải bất phương trình

$$\sqrt{x-\frac{1}{x}}-\sqrt{1-\frac{1}{x}}>\frac{x-1}{x}$$

2. Chứng minh rằng tồn tại 1977 tam giác mà các góc A, B, C của nó thoả mãn hệ thức

$$\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{\cos A+\cos B+\cos C}=\frac{12}{7} \qquad \& \qquad \sin A\sin B\sin C=\frac{12}{25}$$

3. Hỏi rằng n đường tròn chia mặt phẳng ra làm bao nhiêu phần nếu bất cứ cặp hai đường tròn nào cũng cắt nhau tại hai điểm phân biệt và không có ba đường tròn nào có giao điểm chung.

4. Tìm điều kiện cần và đủ để hàm số $f(t)=mt^3+nt^2+pt+q$ có giá trị nguyên với mọi giá trị của t.

5. Cho $a_0, a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}$ là một dãy hữa hạn các số thực thoả mãn các điều kiện $a_0=a_{n+1}=0$ và

$$\left|a_{k-1}-2a_k+a_{k+1}\right|\leq 1$$

   Chứng minh rằng

$$a_k\leq\frac{k(n+1-k)}{2}$$

   với mọi $k=0,1,\ldots,n+1$.

6. Cho đa giác (P) có m cạnh và đa giác (P') có n cạnh lần lượt nằm trong hia mặt phẳng song song với nhau. Xét họ những đoạn thẳng AA' với A và A' tương ứng nằm trên các cạnh của hai đa giác (P) và (P'). Hãy nói rõ cách tìm:

   (a) Đoạn thẳng AA' ngắn nhất.

   (b) Đoạn thẳng AA' dài nhất.

© Copyright 2005 by Hà Duy Hưng & www.ddtoanhoc.net

1.17 Năm 1978

1. Tìm tất cả các số có ba chữ số $\overline{xyz}$ sao cho hai lần số đó bằng tổng của hai số $\overline{yzx}$ và $\overline{zxy}$.

2. Tìm tất cả những giá trị của m sao cho hệ phương trình au đây chỉ có một nghiệm
$$\begin{cases} x^2 = 2^{|x|} + |x| - y - m \\ x^2 = 1 - y^2 \end{cases}$$

3. Ba cửa hàng lương thực A, B, C tạo thành một tam giác ΔABC, trong đó $\widehat{CAB} = 30^0$, $AB = 0.75AC$ thường xuyên cung cấp mì sợi cho nhân dân trong vùng lần lượt theo tỷ lệ $5 : 4 : 3$. Phải đặt địa điểm cần mì sợi M ở đâu để tiết kiệm chi phi chuyển trở biết rằng chi phí đó tỉ lệ với số lượng và đường đi.

4. Tìm ba phân số tối giản $\frac{a}{d}, \frac{b}{d}, \frac{c}{d}$ tạo thành một cấp số cộng biết rằng
$$\frac{b}{a} = \frac{1+a}{1+d} \qquad \& \qquad \frac{c}{b} = \frac{1+b}{1+d}$$

5. Một con sông đào khúc đầu bề rộng a mét đến một chỗ rẽ theo góc vuông bề rộng khúc sau là b mét. Tìm chiều dài lớn nhất của một bè gỗ hình chữ nhật mà chiều ngang là c mét để khi bè trôi từ khúc đầu sang khúc sau đến chỗ rẽ không bị tắc.

6. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ Chứng minh rằng có thể dựng được một tam giác có các cạnh bằng các khoảng cách từ A, A', D đến đường chéo BD' của hình hộp. Ký hiệu kích thước của hình hộp là a_1, a_2, a_3 và những khoảng cách nói trên là m_1, m_2, m_3. Hãy xác định hệ thức giữa $a_1, a_2, a_3, m_1, m_2, m_3$.

© Copyright 2005 by Hà Duy Hưng & www.ddtoanhoc.net

1.18 Năm 1979

1. Chứng minh rằng với mọi $x > 1$ tồn tại một tam giác mà số đo các cạnh là những số $P_1(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$, $P_2(x) = 2x^3 + x^2 + 2x + 1$, và $P_3(x) = x^4 - 1$. Chứng minh rằng trong tất cả các tam giác đó góc lớn nhất đều như nhau và hãy xác định giá trị của nó.

2. Cho phương trình $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ có ba nghiệm thực (không nhất thiết phân biệt) là t, u, v. Với những giá trị nào của a, b, c thì các số t^3, u^3, v^3 nghiệm đúng phương trình $x^3 + a^3x^2 + b^3x + c^3 = 0$?

3. Hãy chia một mảnh vườn hình tam giác ΔABC có ba cạnh không bằng nhau bằng đoạn thẳng AM sao cho hai tam giác ABM và ACM có tỉ số diện tích bằng tỉ số chu vi tương ứng.

4. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n thì $2\cos n\theta$ là một đa thức bậc n của $2\cos\theta$.

5. Tìm tất cả những số α sao cho phương trình $x^2 - 2x[x] + x - \alpha = 0$ có hai nghiệm số không âm. (ở đó $[x]$ là phần nguyên của số x)

6. Trong không gian cho hai hình chữ nhật bằng nhau $ABCD$ và $ABEF$ có $AB = m$, $BC = BE = m\sqrt{2}$. Hãy xác định vị trí tương đối của hai mặt phẳng chứa hai hình chữ nhật nói trên để sao cho CA vuông góc với BF. Trong trường hợp ấy hãy xác định vị trí và kích thước tứ diện đều của hai đỉnh nằm trên CA và hai đỉnh còn lại nằm trên BF.

© Copyright 2005 by Hà Duy Hưng & www.ddtoanhoc.net

1.19 Năm 1980

1. Cho các góc $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ nằm trong đoạn $[0^0, 180^0]$ sao cho giá trị của
$$\sum_{k=1}^{n}(1+\cos\alpha_k)$$
là một số nguyên lẻ. Chứng minh rằng
$$\sum_{k=1}^{n}\sin\alpha_k \geq 1$$

2. Gọi T là tổng của k số dương $m_1, \ldots, m_k$. Chứng minh rằng ta có bất đẳng thức
$$\sum_{k=1}^{n}\left(m_k+\frac{1}{m_k}\right)^2 \geq k\left(\frac{k}{T}+\frac{T}{k}\right)^2$$

3. Cho P là một điểm nằm trong tam giác $A_1A_2A_3$. Đường thẳng PA_i cắt cạnh đối diện tại điểm B_i. Gọi C_i là trung điểm của đoạn thẳng A_iB_i và D_i là trung điểm của đoạn thẳng PB_i. Hãy so sánh diện tích của hai tam giác $C_1C_2C_3$ và $D_1D_2D_3$.

4. Chứng minh rằng với mọi hình tứ diện ta đều tìm được trong không gian hai mặt phẳng sao cho tỉ số diện tích của các hình chiếu vuông góc của tứ diện lên hai mặt phẳng đó không nhỏ hơn $\sqrt{2}$

5. Phương trình $z^3 - 2z^2 - 2z + m = 0$ có thể có ba nghiệm hữa tỷ phân biệt không? Tại sao?

6. Cho số nguyên $n > 1$ và số thực $p > 0$. Hãy tìm giá trị cực đại của biểu thức
$$\sum_{k=1}^{n-1}x_kx_{k+1}$$
khi các x_k chạy khắp mọi giá trị thực không âm sao cho $\sum_{k=1}^{n}x_k = p$.

© Copyright 2005 by Hà Duy Hưng & www.ddtoanhoc.net

1.20 Năm 1981

1. Chứng minh rằng một tam giác là vuông khi và chỉ khi tổng của sin ba góc bằng tổng của cosin ba góc đó cộng với 1.

2. Cho hai đa thức $f(p) = p^{12} - p^{11} + 3p^{10} + 11p^3 - p^2 + 23p + 30$ và $g(p) = p^3 + 2p + m$. Hãy xác định giá trị nguyên của m để tồn tại một đa thức $h(p)$ mà $f(p) = g(p) \cdot h(p)$ với mọi giá trị thực của p.

3. Cho hai điểm M và N ở ngoài một mặt phẳng R. Hãy xác định vị trí của điểm A trên R sao cho tỉ số $\dfrac{AM}{AN}$ là cực tiểu.

4. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 50 \\ x^2 - y^2 + z^2 - t^2 = -24 \\ xz = yt \\ x - y + z + t = 0 \end{cases}$$

5. Cho n số thực $t_1, t_2, \ldots, t_n$ sao cho $t_k \in [p, q]$ với $k = \overline{1, n}$ (ở đó $0 < p \leq q$ là các số cho trước). Biết rằng

$$A = \frac{1}{n}(t_1 + t_2 + \cdots + t_n)$$

và

$$B = \frac{1}{n}(t_1^2 + t_2^2 + \cdots + t_n^2)$$

Hãy chứng minh rằng $\dfrac{A^2}{B} \geq \dfrac{4pq}{(p+q)^2}$. Hãy xác định điều kiện cần và đủ để có đẳng thức.

6. Cho hai đường tròn có tâm O_1, O_2 bán kính khác nhau, tiếp xúc ngoài tại A và một điểm M trong đường tròn tâm O_2 không nằm trên đường thẳng O_1O_2. Tìm một đường thẳng d đi qua M sao cho đường tròn ABC tiếp xúc với đường thẳng O_1O_2. B là một giao điểm nào đó của d với đường tròn tâm O_1 và C là một giao điểm nào đó của d với đường tròn tâm O_2.

© Copyright 2005 by Hà Duy Hưng & www.ddtoanhoc.net

1.21 Năm 1982

1. Lập phương trình bậc hai có hệ số nguyên và có hai nghiệm là $\cos 72^0$ và $\cos 144^0$.

2. Giải và biện luận theo m phương trình $x(x+1)(x+2)(x+3) - m + 1 = 0$.

3. Cho tam giác ΔABC. Trên ba cạnh của nó dựng ba tam giác đều ra phía ngoài tam giác đó. Gọi Δ lâtm giác có các đỉnh là tâm của ba tam giác đều nói trên. Tương tự trên các cạnh của tam giác ΔABC dựng ba tam giác đều về phía trong với tam giác đó và gọi Δ' là tam giác có ba đỉnh là ba tâm của ba tam giác vừa dựng. Chứng minh rằng diện tích của tam giác ΔABC bằng hiệu của diện tích hai tam giác Δ và Δ'.

4. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình

$$2^x + 2^y + 2^z = 2336$$

   với $x < y < z$.

5. Cho p là số nguyên dương và hai số thực q, z. Giả sử rằng $q^{p+1} \leq z \leq 1$ và $0 \leq q \leq 1$. Hãy chứng minh rằng

$$\prod_{k=1}^{p} \left| \frac{z - q^k}{z + q^k} \right| \leq \prod_{k=1}^{p} \frac{1 - q^k}{1 + q^k}$$

6. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Chứng minh rằng không có một đường thẳng nào cắt cả bốn đường thẳng AA', BC, $D'C'$ và đường nối trung điểm hai cạnh BB' và DD'.

© Copyright 2005 by Hà Duy Hưng & www.ddtoanhoc.net

1.22 Năm 1983

1. Cho a và b là hai số nguyên dương, $b > 2$. Số $2^a + 1$ chia hết cho số $2^b - 1$ hay không ?

2. (a) Chứng minh rằng $\sqrt{2}(\sin t + \cos t) \geq 2\sqrt[4]{\sin 2t}$ với mọi $0 \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$

   (b) Tìm y sao cho $1 + \dfrac{2\cot 2y}{\cot y} \geq \dfrac{\tan 2y}{\tan y}$ với mọi $y \in (0, \pi)$.

3. Cho tam giác ΔABC và điểm M bất kì nằm trong tam giác đó. Từ M hạ những đường thẳng vuông góc MA_1, MB_1, MC_1 lần lượt đến các cạnh BC, CA, AB. Hãy xác định quỹ tích các điểm M sao cho số đo diện tích của tam giác $\Delta A_1B_1C_1$ bằng số k cho trước. Biện luận.

4. Có thể biểu diễn một số nguyên dưới dạng một trong các tổng sau hay không

   (a) $\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \cdots + \dfrac{1}{a_6}$

   (b) $\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \cdots + \dfrac{1}{a_9}$

   trong đó $a_1, a_2, \ldots, a_9$ là các số nguyên dương phân biệt.

5. So sánh

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(2n-2k+1)(2n-k+1)} \quad \& \quad T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

6. Cho một tứ diện trong đó các cặp cạnh đối diện bằng nhau từng đôi một và theo thứ tự bằng a, b, c $(a < b < c)$. Một mặt phẳng cắt tứ diện đã cho theo một tứ giác. Hãy tìm vị trí của mặt phẳng sao cho tứ giác thiết diện có chu vi bé nhất. Trong điều kiện nói trên hãy tìm quỹ tích của những trọng tâm của các tứ giác thiết diện.

© Copyright 2005 by Hà Duy Hưng & www.ddtoanhoc.net

1.23 Năm 1984

1. (a) Hãy xác định đa thức của x có bậc nhỏ nhất với hệ số nguyên có một nghiệm là $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$.

   (b) Giải phương trình

$$1+\sqrt{1+x^2}\left(\sqrt{(1+x)^3}-\sqrt{(1-x)^3}\right)=2+\sqrt{1-x^2}$$

2. Cho dãy số $u_1, u_2, \ldots,$ như sau: $u_1=1, u_2=2, u_{n+1}=3u_n-u_{n-1}$ với $n=2,3,\ldots,$. Dãy số $v_1, v_2, \ldots,$ được xác định bởi quy luật

$$v_n=\sum_{k=1}^{n}\operatorname{arccotg} u_i$$

   Hãy xác định $\lim_{n\to+\infty} v_n$

3. Trong mặt phẳng P cho hình vuông $ABCD$ cạnh bằng a. Trên nửa đường thẳng Ax vuông góc với P lấy điểm S sao cho $SA=2a$.

   (a) M và N là hai điểm tương ứng di động trên BC và DC

      i. Xác định vị trí của hai điểm M, N sao cho

$$BM+DN\geq\frac{3a}{2}$$

      đồng thời hai mặt phẳng SAM và SMN vuông góc với nhau và tích $BM\cdot DN$ đạt giá trị bé nhất?

      ii. Xác định vị trí của M, N sao cho $\widehat{NAM}=45^0$ và thể tích của tứ diện $SAMN$ là lớn nhất, nhỏ nhất. Tính các giá trị đó.

   (b) Q là điểm di động sao cho Q luôn nhìn AB và AD dưới các góc vuông. Gọi π là mặt phẳng vuông góc với P theo giao tuyến AB, DQ cắt π ở Q'

      i. Tìm quỹ tích điểm Q'.

      ii. Điểm Q ở trên sẽ vẽ nên đường (K). Gọi R là giao điểm thứ hai khác với Q của CQ và (K). Chứng minh rằng đại lượng $\sin^2\widehat{Q'DB}+\sin^2\widehat{R'DB}$ là một hằng số không phụ thuộc vào vị trí của Q, trong đó R' là giao điểm của DR với mặt phẳng π.

4. (a) Cho x, y là các số nguyên không đồng thời bằng không. Hãy xác định giá trị bé nhất của biểu thức $A=|5x^2+11xy-5y^2|$.

   (b) Tìm tất cả các số dương t để

$$9\cdot t=\frac{10\cdot[t]}{t-[t]}$$

   trong đó $[t]$ là phần nguyên của số t.

5. Cho a, b là các số thực với $a \neq 0$. Hãy xác định đa thức $P(x)$ thoả mãn điều kiện
$$xP(x-a) = (x-b)P(x)$$

6. Cho góc tam diện $Sxyz$ đỉnh S trong đó $\widehat{xSz} = \alpha, \widehat{xSy} = \beta, \widehat{ySz} = \gamma$. Gọi A, B, C tương ứng là giá trị của các góc nhị diện cạnh Sy, Sz, Sx của góc tam diện ấy

   (a) Chứng minh rằng

      i. $\dfrac{\sin\alpha}{\sin A} = \dfrac{\sin\beta}{\sin B} = \dfrac{\sin\gamma}{\sin C}$.

      ii. $\alpha + \beta = 90^0$ khi và chỉ khi $A + B = 180^0$.

   (b) Giả sử rằng $\alpha = \beta = \gamma = 90^0$. Gọi O là điểm cố định trên Sz sao cho $SO = a$. M và N là hai điểm di động trên Sx, Sy sao cho $SM + SN = a$. Chứng minh rằng đại lượng $\widehat{SOM} + \widehat{SON} + \widehat{MON}$ là một hằng số không phụ thuộc vào vị trí của M và N. Tìm quỹ tích tâm I của hình cầu ngoại tiếp tứ giác $OSMN$.

© Copyright 2005 by Hà Duy Hưng & www.ddtoanhoc.net

1.24 Năm 1985

1. Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình

$$x^3 - y^3 = 2xy + 8$$

2. Gọi M là tập hợp tất cả các hàm số f xác định với mọi số nguyên nhận những giá trị thực thoả mãn các tính chất sau đây

   (a) Với mọi số nguyên x và y thì $f(x) \cdot f(y) = f(x+y) + f(x-y)$.

   (b) $f(0) \neq 0$.

   Tìm tất cả các hàm số $f \in M$ sao cho $f(1) = \dfrac{5}{2}$

3. Một hình hộp chữ nhật với các kích thước a, b, c bị cắt bởi một mặt phẳng đi qua giao điểm các đường chéo của hình hộp và vuông góc với một trong các đường chéo của hình hộp đó. Hãy tính diện tích thiết diện nhận được.

4. Kí hiệu ước chung lớn nhất của hai số tự nhiên a và b là $\gcd(a, b)$. Chứng minh rằng với ba số tự nhiên a, b và m, điều kiện cần và đủ để tồn tại số tự nhiên n sao cho $(a^n - 1) \cdot b$ chia hết cho m là $\gcd(ab, m) = \gcd(b, m)$.

5. Hãy tìm tất cả các giá trị thực của tham số a để phương trình

$$16x^4 - ax^3 + (2a + 17)x^2 - ax + 16 = 0$$

   có bốn nghiệm phân biệt lập thành một cấp số nhân.

6. Một hình chóp tam giác $O.ABC$ có diện tích đáy là ABC bằng S. Tính thể tích của hình chóp biết rằng mỗi đường cao theo thứ tự hạ từ các điểm A, B, C không thể bé hơn trung bình cộng của hai cạnh bên thuộc bề mặt đối diện với các đỉnh đó.

© Copyright 2005 by Hà Duy Hưng & www.ddtoanhoc.net

1.25 Năm 1986

1. Cho n bất phương trình
$$4x^2 - 4a_i x + (a_i - 1)^2 \leq 0$$
ở đó $a_i \in \left[\frac{1}{2}, 5\right]$ với mọi $i = 1, 2, \ldots, n$. Gọi x_i là nghiệm bất kì của bất phương trình ứng với tham số a_i. Chứng minh rằng
$$\frac{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}{n} \leq \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{n} + 1$$

2. Gọi R, r là bán kính các hình cầu ngoại tiếp và nội tiếp hình chóp 1986 đều
   (a) Chứng minh rằng $\dfrac{R}{r} \geq 1 + \dfrac{1}{\cos\dfrac{\pi}{1986}}$.
   (b) Tính diện tích xung quanh của hình chóp có cạnh đáy bằng a khi ở bất đẳng thức trên xảy ra dấu bằng.

3. Cho $M(y)$ là một đa thức bậc n sao cho $M(y) = 2^y$, với $y = 1, 2, \ldots, n+1$. Hãy xác định $M(n+2)$.

4. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh $2a$. Trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng chứa hình vuông đi qua AB ta dựng một tam giác đều AMB. Một điểm S chạy trên AB cách B một khoảng $SB = x$. Gọi P là hình chiếu của điểm M lên đường thẳng SC và E, O theo thứ tự là các trung điểm của AB, CM
   (a) Hãy xác định quỹ tích của P khi S chạy trên AB.
   (b) Tính các giá trị cực đại và cực tiểu của SO.

5. Tìm các giá trị tự nhiên của $n > 1$ để cho bất đẳng thức
$$\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \geq x_n \cdot \sum_{k=1}^{n-1} x_k$$
đúng với mọi x_k, $k = \overline{1, n}$

6. Từ dãy số tự nhiên $1, 2, 3, \ldots,$ ta lập dãy số sau đây: số hạng thứ nhất là số lẻ, cụ thể là số 1; hai số hạng tiếp theo là các số chẵn 2 và 4; ba số hạng tiếp theo là các số lẻ $5, 7, 9$; bốn số hạng tiếp theo là các số chẵn $10, 12, 14, 16$; năm số hạng tiếp theo là các số lẻ $17, 19, 21, 23, 25, \ldots,$. Hãy xác định số hạng tổng quát của dãy trên.

© Copyright 2005 by Hà Duy Hưng & www.ddtoanhoc.net

1.26 Năm 1987

1. Cho cấp số cộng gồm 1987 số hạng đầu $u_1 = \dfrac{\pi}{1987}$ và công sai $d = \dfrac{\pi}{3974}$.
   Hãy xác định giá trị của tổng
   $$S = \sum \cos\big(\pm u_1 \pm u_2 \pm \cdots \pm u_{1987}\big)$$
   ở đó tổng $\sum$ chứa tất cả các số hạng ứng với tất cả các cách khác nhau có thể được để lấy các dấu $+$ hay $-$ trước các số $u_1, u_2, \ldots, u_{1987}$.

2. Cho hai dãy số $\{x_n\}_{n=0}^{+\infty}$ và $\{y_n\}_{n=0}^{+\infty}$ theo quy luật sau đây: $x_0 = 365$; $x_{n+1} = x_n\big(x_n^{1986}+1\big) + 1622$ với $n \geq 0$ và $y_0 = 16$; $y_{n+1} = y_n(y_n^3 + 1) - 1952$ với $n \geq 0$. Chứng minh rằng $|x_n - y_k| > 0$ với mọi n, k tự nhiên.

3. Trong mặt phẳng cho n đường thẳng đôi một cắt nhau nhưng không cùng đi qua một điểm. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất một điểm là giao của hai và chỉ hai trong số n đường thẳng đó.

4. Cho $a_i > 0$ với mọi $i = \overline{1, n}$ và $n \geq 2$. Đặt $S = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Chứng minh rằng
   $$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^{2^m}}{(S - a_k)^{2^t - 1}} \geq \frac{S^{1+2^m-2^t}}{(n-1)^{2^t-1} n^{2^m-2^t}}$$
   với mọi m, t nguyên thoả mãn $m \geq t \geq 0$. Dấu bằng xảy ra khi nào ?

5. Hàm số $f(x)$ xác định và có đạo hàm trên $[0, +\infty]$. Biết rằng với mọi $x \geq 0$ luôn có
   (a) $|f(x)| \leq 5$
   (b) $f(x) \cdot f'(x) \geq \sin x$
   Tồn tại hay không $\lim_{x\to+\infty} f(x)$?

6. Trong không gian cho 5 nửa đường thẳng Ox_k với $k = \overline{1, 5}$. Gọi α là giá trị bé nhất trong tất cả các góc hợp bởi các cặp nửa đường thẳng Ox_i và Ox_j. Chứng minh rằng $\alpha \leq 90^0$.

© Copyright 2005 by Hà Duy Hưng & www.ddtoanhoc.net

1.27 Năm 1988

1. Có 1988 con gà nhốt vào 994 chuồng có hai con. Sau mỗi ngày người ta lại thay đổi vị trí của gà sao cho không có hai con gà nào đã ở chung trước đó lại nằm trong cùng một chuồng lần nữa. Hỏi có bao nhiêu ngày làm được như vậy.

2. Cho đa thức $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ với $n \geq 3$. Biết rằng đa thức có n nghiệm thực và $a_0 = 1, a_1 = -n, a_2 = \dfrac{n^2 - n}{2}$. Hãy xác định các hệ số a_i với $i = 3, 4, \ldots, n$.

3. Mặt phẳng được phân chia thành các tam giác đều bằng nhau sao cho hai tam giác bất kì không có điểm chung nào hoặc có chung nhau một đỉnh hoặc chung nhau một cạnh. Có hay không một hình tròn chứa đúng 1988 đỉnh các tam giác đó ?

4. Dãy số $\{x_n\}$ bị chặn mà thoả mãn điều kiện $x_n + x_{n+1} \geq 2x_{n+2}$ với mọi $n \geq 1$ có nhất thiết hội tụ hay không ?

5. Giả sử rằng có tam giác ΔABC ba góc nhọn để $\tan A, \tan B, \tan C$ là ba nghiệm của phương trình $x^3 + px^2 + qx + p = 0$ $(q \neq 1)$. Chứng minh rằng $p \leq -3\sqrt{3}$ và $q > 1$.

6. Trong không gian cho ba đường thẳng a, b và c đôi một chéo nhau. Chứng minh rằng a, b, c có đường vuông góc chung khi và chỉ khi tích của ba phép đối xứng lần lượt qua a, b, c cũng là phép đối xứng đối với một đường thẳng.

© Copyright 2005 by Hà Duy Hưng & www.ddtoanhoc.net

1.28 Năm 1989

1. Cho hai số tự nhiên N, n. Chứng minh rằng với mọi số thực không âm $\alpha \le N$, với mọi số thực x ta luôn có bất đẳng thức

$$\left|\sum_{k=0}^{n} \frac{\sin(\alpha+k)x}{N+k}\right| \le \min\left\{(n+1)|x|\,,\ \frac{1}{N\cdot\left|\sin\frac{x}{2}\right|}\right\}$$

Bài giải. Đầu tiên ta để ý đến bất đẳng thức $|\sin\beta| \le |\beta|$ với mọi $\beta \in \mathbb{R}$, ta nhận được

$$\left|\sum_{k=0}^{n} \frac{\sin(\alpha+k)x}{N+k}\right| \le \sum_{k=0}^{n} \frac{|\sin(\alpha+k)x|}{N+k} \le \sum_{k=0}^{n} \frac{(\alpha+k)|x|}{N+k} \le \sum_{k=0}^{n} |x| = (n+1)|x|$$

Để chứng minh bất đẳng thức còn lại, ta sử dụng công thức biến đổi Abel

$$\sum_{k=0}^{n} a_k b_k = \sum_{k=0}^{n-1} A_k(b_k - b_{k+1}) + A_n b_n$$

trong đó $A_k = \sum_{j=0}^{i} a_j$. Khi đó

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\sin(\alpha+k)x}{N+k} = \sum_{k=0}^{n-1} S_k\left(\frac{1}{N+k} - \frac{1}{N+k-1}\right) + S_n\cdot\frac{1}{N+n}$$

do đó ta có đánh giá

$$\left|\sum_{k=0}^{n} \frac{\sin(\alpha+k)x}{N+k}\right| = \left|\sum_{k=0}^{n-1} S_k\left(\frac{1}{N+k} - \frac{1}{N+k-1}\right) + S_n\cdot\frac{1}{N+n}\right|$$

$$\le \left(\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{N+k} - \frac{1}{N+k-1}\right) + \frac{1}{N+n}\right)\cdot \max_{k=\overline{0,\,n}} |S_k| = \frac{\max_{k=\overline{0,\,n}} |S_k|}{N}$$

Một tính toán quen thuộc cho ta

$$|S_k| = \left|\sum_{i=0}^{k} \sin(\alpha+i)x\right| = \left|\frac{\sin(\alpha x + \frac{kx}{2})\sin\frac{(k+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right| \le \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}$$

với mọi $0 \le k \le n$.

2. Xét dãy số Fibonacci $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$. Đặt $f(n) = 1985n^2 + 1956n + 1960$.

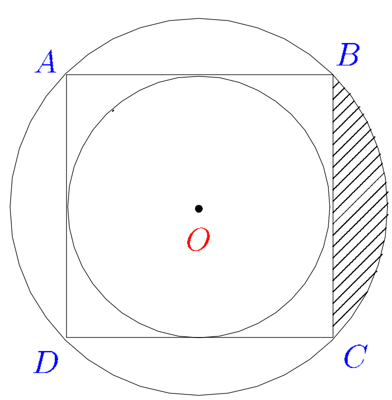
   a) Chứng minh rằng tồn tại vô hạn số F thuộc dãy Fibonacci sao cho $f(F)$ chia hết cho 1989.

b) Tồn tại hay không một số G của dãy trên sao cho $f(G)+2$ chia hết cho 1989?

Bài giải. Đặt $g(n) = 4n^2 + 33n + 29$ thì ta có ngay với mọi n nguyên $f(n) \equiv g(n) \pmod{1989}$, do đó bài toán được đưa về tương ứng thay f bởi g. Chú ý rằng $g(-1) = 0$ nên ý tưởng ở đây là ta đi chứng minh rằng trong dãy số Fibonacci có vô số số hạng đồng dư với -1 theo modulo 1989. Kí hiệu F_n là số Fibonacci thứ n, với $F_1 = F_2 = 1$ và r_n là số dư của F_n chia cho 1989. Xét 1989^2+1 cặp số (r_i, r_{i+1}) thì hiển nhiên sẽ có ít nhất hai cặp phân biệt trùng nhau, nghĩa là có thể tìm được $i, j \geq 1$ mà $r_i = r_{i+j}$ và $r_{i+1} = r_{i+j+1}$. Nhờ công thức của dãy số Fibonacci ta suy ra rằng $1 = r_0 = r_j$ và $1 = r_1 = r_{j+1}$. Thành thử với mọi n nguyên không âm ta có $r_{n+j} \equiv F_n \equiv r_n \equiv 1 \pmod{1989}$. Từ đây $r_{nj} \equiv r_j \equiv 1 \pmod{1989}$, do đó mà ta có thể coi $j \geq 3$. Lại có $r_{j-1} \equiv r_{j+1} - r_j \equiv 0 \pmod{1989}$, $r_{j-2} \equiv r_j - r_{j-1} \equiv 1 \pmod{1989}$, và $r_{j-3} \equiv r_{j-1} - r_{j-2} \equiv -1 \pmod{1989}$. Như thế $r_{j-3} \equiv -1 \pmod{1989}$ và $r_{j-2} \equiv 1 \pmod{1989}$. Từ $r_{n+j-3} \equiv r_{n-3} \pmod{1989}$ ta nhận được với $n = 1, 2, 3, \ldots$, thì $r_{nj-3} \equiv r_{(n-1)j-3} \equiv \cdots \equiv r_{j-3} \equiv -1 \pmod{1989}$. Đó là điều phải chứng minh.

3. Trong mặt phẳng cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 2, các chữ A, B, C, D xếp theo thứ tự nào đó trên hình vuông. Đoạn thẳng AB được dời chỗ liên tục để đến trùng với đoạn thẳng CD sao cho A trùng với C và B trùng với D. Gọi S là diện tích của hình do đoạn thẳng AB quét ra trong khi dời chỗ. Chứng minh rằng có thể tìm được một cách dời chỗ sao cho $S < \dfrac{5\pi}{6}$ (nếu một diện tích nào đó được quét hai lần thì cũng chỉ tính một lần).

Bài giải. Trên thực tế cách dời đoạn thẳng AB được chọn khá đơn giản. Vẽ các đường tròn nội và ngoại tiếp hình vuông, ta cho điểm A chuyển động theo chiều ngược kim đồng hồ, và do đó B. Từ đó AB luôn tiếp xúc với đường tròn nội tiếp của hình vuông. Kí hiệu S_1 là diện tích giới hạn bởi hai đường tròn (hình vành khăn) và S_0 là diện tích của phần giới hạn bởi đoạn thẳng BC và cung nhỏ $\overset{\frown}{BC}$ của đường tròn ngoại tiếp (phần gạch chéo).



Dễ thấy $S_1 = \pi \cdot (\sqrt{2})^2 - \pi \cdot 1^2 = \pi$ và $S_0 = \dfrac{1}{2} \cdot \big(\pi(\sqrt{2})^2 - 4\big) = \dfrac{\pi}{2} - 1.$

Bằng cách chọn dịch chuyển như trên ta thấy phần diện tích do AB vạch ra không vượt quá $S_1 - S_0 = \dfrac{\pi}{2} + 1 < \dfrac{5\pi}{6}$. Đó là điều phải chứng minh.

4. Tồn tại hay không các số nguyên x, y không tận cùng bằng 0 hoặc bằng 5 thoả mãn điều kiện $x^2 + 19y^2 = 198 \cdot 10^{1989}$?

   Bài giải. Ta sẽ chứng minh rằng phương trình $x^2 + 19y^2 = 198 \cdot 10^{1989}$ luôn có nghiệm (x, y) thoả mãn $(x - y, 5) = 1$. Trước hết ta hãy chú ý đến các đẳng thức sau đây

$$100 = 9^2 + 19 \cdot 1^2 \;, \quad 1980 = 21^2 + 19 \cdot 9^2$$

$$(x^2 + 19y^2)(a^2 + 19b^2) = (xa - 19yb)^2 + 19(xb + yz)^2 \qquad \forall\ x, y, a, b$$

   Ta gọi một số n nguyên dương là đẹp nếu nó biểu diễn được dưới dạng $x^2 + 19y^2$ với $(x - y, 5) = 1$. Bằng quy nạp dễ dàng có được số 10^m là số đẹp với mọi m nguyên dương. Đặc biệt số 10^{1988} là số đẹp. Ngoài ra do các đẳng thức nói trên nên $1980 \cdot 10^{1988}$ cũng là số đẹp. Điều này kết thúc chứng minh bài toán.

5. Cho dãy đa thức $\{P_n(x)\}_{n=0}^{+\infty}$ xác định như sau: $P_0(x) \equiv 0$ và

$$P_{n+1}(x) \equiv P_n(x) + \frac{x - P_n^2(x)}{2}$$

   với mọi $n \geq 0$. Chứng minh rằng với mọi $x \in [0\,,\,1]$, và với mọi n nguyên không âm, ta có

$$0 \leq \sqrt{x} - P_n(x) \leq \frac{2}{n+1}$$

   Bài giải. Bằng quy nạp dễ dàng nhận được đánh giá sau

$$0 \leq P_n(x) \leq P_{n+1}(x) \leq 1 \qquad \forall\, x \in [0,\,1]$$

   Đối với mỗi $x \in [0,\,1]$ cố định, dãy số $\{P_n(x)\}_{n=0}^{+\infty}$ là một dãy không giảm, bị chặn trên nên dãy hàm đó hội tụ điểm tới hàm $f(x)$ nào đó. Nhờ công thức ta suy ra $f(x) \equiv \sqrt{x}$. Thành thử bất đẳng thức thứ nhất được kéo theo nhanh chóng. Xét hàm $g_n(x) = f(x) - P_n(x)$ thì ta có $g_{n+1}(x) \leq g_n(x)\left(1 - \dfrac{\sqrt{x}}{2}\right)$ do đó mà $g_n(x) \leq \sqrt{x}\left(1 - \dfrac{\sqrt{x}}{2}\right)^n \leq \dfrac{2}{n+1}$. Từ đây suy ra kết luận của bài toán.

6. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Chứng minh rằng nếu một đường thẳng Δ cắt ba bốn đường thẳng AB', BC', CD' và DA' thì phải cắt hoặc song song với đường thẳng thứ tư.

© Copyright 2005 by Hà Duy Hưng & www.ddtoanhoc.net

1.29 Năm 1990

1. Cho dãy số $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ thoả mãn $|x_1| < 1$, được xác định bởi công thức truy hồi sau đây
$$x_{n+1} = \frac{-x_n + \sqrt{3 - 3x_n^2}}{2}$$
   (a) Hỏi rằng cần có điều kiện gì đối với x_1 để dãy số nói trên gồm toàn số dương?

   (b) Dãy số này có tuần hoàn không? Giải thích câu trả lời của bạn.

   Bài giải. Để dãy số gồm toàn số dương trước hết ta phải có x_1, x_2 là các số dương. Từ đẳng thức $x_2 = \dfrac{-x_1 + \sqrt{3 - 3x_1^2}}{2}$ ta suy ra rằng $\sqrt{3 - 3x_1^2} > x_1$ ta nhận được $0 < x_1 < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Ta sẽ chứng minh rằng điều kiện $0 < x_1 < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ là đủ để dãy số nói trên gồm toàn số hạng dương. Thực vậy, ta có thể tìm được một góc $\alpha \in \left(0^0, 60^0\right)$ thoả mãn $x_1 = \sin\alpha$. Khi đó rất nhanh ta có $x_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha - \dfrac{1}{2}\cdot\sin\alpha = \sin(60^0 - \alpha)$. Từ đó bằng quy nạp dễ dàng ta nhận được
$$x_n = \begin{cases} \sin\alpha & \text{nếu } n \text{ là lẻ} \\ \sin(60^0 - \alpha) & \text{nếu } n \text{ là chẵn} \end{cases}$$
   Bây giờ ta xét câu hỏi thứ hai của bài toán, chú ý đến ý thứ nhất ta dễ dàng suy ra rằng dãy số này luôn tuần hoàn trong hoàn cảnh $x_1, x_2 \geq 0$. Nếu $x_2 < 0 \leq x_1$ thì dễ dàng suy rằng rằng $x_3 = x_1$ và do đó rất nhanh bằng quy nạp ta nhận được dãy số tuần hoàn. Nếu $x_1 < 0$ thì $x_2 > 0$ và do đó ta chỉ việc lặp lại lí luận cho dãy đối với số hạng bắt đầu là x_2 thì ta cũng có kết quả là dãy nói trên tuần hoàn.

2. Cho $2n-1$ số tự nhiên liên tiếp $1, 2, 3, \ldots, 2n-1$. Hãy gạch đi ít nhất $n-1$ số theo quy tắc sau đây
   +) Nếu đã gạch số a thì phải gạch số $2a$
   +) Nếu đã gạch số a và số b thì phải gạch số $a+b$
   Hỏi rằng cần phải gạch số nào để tổng các số còn lại lớn nhất? Giải thích câu trả lời của bạn.

   Bài giải. Ta giả sử rằng các số bị gạch là $a_1, a_2, \ldots, a_p$ và ta xem $1 \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_p \leq 2n-1$. Khi đó $p \geq n-1$. Ta sẽ chứng minh rằng $a_i + a_{p-i+1} \geq 2n$ với mọi $i = 1, 2, \ldots, p$. Trước hết ta thấy rằng $a_1 > 1$ thực vậy nếu $a_1 = 1$ thì số $1+1 = 2$ cũng bị xoá và do đó $3 = 2+1$ cũng bị xoá, cứ thế thì tất cả các số bị xoá và tổng còn lại bằng không. Ta thấy $a_1 + a_p \geq 2n$ vì nếu không, số $a_1 + a_p$ phải bị xoá, nhưng điều này không thể vì $a_1 + a_p > a_p$. Tiếp theo $a_{p-i} + a_1 \geq a_{p-i+1}$ vì nếu không số $a_{p-i} + a_1$ sẽ bị xoá, nhưng số này lại không thuộc vào dãy nói trên. Do đó $a_{p-i} + a_2 \geq a_{p-i+2}$ vì nếu không số này sẽ bị xoá nhưng để ý rằng $a_{p-i} + a_2 > a_{p-i} + a_1 \geq a_{p-i+1}$. Tiếp tục ta thu được kết quả là $a_{p-i+1} + a_i > a_p$ tức là $a_{p-i+1} + a_i \geq 2n$. Từ đây ta nhận được $\sum_{i=1}^{p} a_i \geq \frac{p}{2} \cdot 2n = pn \geq (n-1)n$. Thành ra tổng các số còn lại không thể vượt quá $n(2n-1) - (n-1)n = n^2$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a_{p-i+1} + a_i = 2n$ với mọi i, do đó mà với mọi i, $a_i = i \cdot a_1$. Đặc biệt $p \cdot a_1 = a_p < 2n - 1$. Suy ra rằng $a_1 \leq 2$ tức là $a_1 = 2$. Tóm lại các số cần xoá sẽ là tất cả các số chẵn $2, 4, \ldots, 2n-2$. Cuối cùng dễ thấy rằng nếu xoá số 2 đầu tiên thì tất cả các số cần xoá chính là tất cả các số chẵn.

3. Người ta muốn cắt một hình tứ diện bằng ba mặt phẳng để được một hình hộp sao cho ba mặt các đỉnh hình hộp nằm trên các mặt của hình tứ diện.

   a) Có thể cắt để thể tích hình hộp bằng $\frac{9}{10}$ thể tích hình tứ diện không? Giải thích.

   b) Hãy xác định một giao điểm nào đó của ba mặt phẳng cắt để thể tích hình hộp bằng $\frac{11}{50}$ thể tích của hình tứ diện.

4. Trong mặt phẳng cho tam giác ΔABC. Hãy xác định quỹ tích các điểm M trtong mặt phẳng đó sao

$$MA \cdot MA' = MB \cdot MB' = MC \cdot MC'$$

   ở đó A', B', C' lần lượt là hình chiếu của điểm M lên các đường thẳng BC, CA, AB.

   Bài giải. Đáp số của bài toán là M trùng với trực tâm tam giác ΔABC hoặc là M nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác đó.

5. Giả sử rằng $f(x)$ là một đa thức với hệ số thực khác hằng số thoả mãn điều kiện

$$f(x) \cdot f(2x^2) = f(2x^3 + x)$$

   với mọi $x \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng đa thức f không có nghiệm số thực.

   Bài giải. Giả sử rằng $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ với các số $a_0, \ldots, a_n$ là các số thực và $a_n \neq 0$. Theo giả thiết suy ra $a_0^2 = a_0$ do đó mà $a_0 = 0$ hoặc $a_0 = 1$. Nếu $a_0 = 0$ thì ta có thể viết $f(x) = x^k \cdot g(x)$ với g là một đa thức không nhận 0 là nghiệm. Thế vào đẳng thức đã cho ta nhận được kết quả là $g(0) = 0$, mâu thuẫn. Vậy thì $a_0 = 1$. So sánh hệ số của x^{3n} ta nhận được $a_n^2 = a_n$ và do đó mà $a_n = 1$. Bây giờ ta giả sử rằng $f(x) = 0$ có nghiệm x_0 nào đó. Khi đó $2x_0^3 + x_0$ cũng là nghiệm và chú ý rằng nghiệm này có cùng dấu với nghiệm x_0. Tất nhiên $x_0 \neq 0$ nên ta sẽ nhận được một dãy vô hạn giảm ngặt hoặc tăng ngặt các nghiệm của $f(x)$. Điều này là không thể bởi vì rằng f là một đa thức và nó chỉ có hữa hạn nghiệm mà thôi.

6. Các em nhỏ ở một lớp học đứng vòng tròn chơi một trò chơi kẹo. Cô giáo cho mỗi em một số chẵn chiếc kẹo (em nào cũng có kẹo và số kẹo mỗi em có được có thể khác nhau). Một em nào đó đưa một nửa số kẹo của mình

cho bạn ở ngay bên cạnh bên tay phải mình. Tiếp theo em vừa nhận được kẹo của làm như thế nếu số kẹo mình hiện có là số chẵn, còn nếu là số lẻ thì sẽ nhận được một chiếc kẹo từ cô giáo trước khi chia cho bạn như thế. Các em cứ lần lượt đưa kẹo như thế theo một vòng tròn. Chứng minh rằng sẽ dẫn đến trường hợp là có một em nếu đưa một nửa số kẹo của mình không cho bạn mà cho cô giáo thì tất cả các em có số kẹo bằng nhau.

Bài giải. Mỗi lần một em đưa kẹo cho bạn ta có thể coi thành hai bước: đầu tiên đưa nửa số kẹo cho cô giáo, sau đó cô giáo sẽ đưa cho bạn kế tiếp. Thành thử bài toán quy về là cần chứng minh đến một thời điểm nào đó các em có số kẹo như nhau. Thực vậy giả sử tại thời điểm i số kẹo lớn nhất mà mỗi em có thể có là M_i và số kẹo ít nhất một em có thể có là m_i. Hiển nhiên ta có $m_i \leq M_i$. Nhưng vì các số M_i, m_i đều là các số nguyên dương, dãy số $\{M_i\}$ là không tăng và $\{m_i\}$ không giảm nên đến một thời điểm i_0 nào đó ta sẽ có $M_{i_0} = m_{i_0}$ tức là tất cả các em có số kẹo như nhau.

© Copyright 2005 by Hà Duy Hưng & www.ddtoanhoc.net

1.30 Năm 1991

1. Hãy xác định tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sao cho bất đẳng thức sau đúng với các số thực x, y, z bất kì

$$\frac{1}{2} \cdot f(xy) + \frac{1}{2} \cdot f(xz) - f(x) \cdot f(yz) \geq \frac{1}{4}$$

Bài giải. Đáp số của bài toán là $f(x) \equiv \frac{1}{2}$

Ta lần lượt thực hiện các bước chọn ẩn như sau

(a) Cho $x = y = z = 0$ ta nhận được $f(0) - f^2(0) \geq \frac{1}{4}$ hay $f(0) = \frac{1}{2}$.

(b) Cho $y = z = 0$ ta nhận được $f(x) \leq \frac{1}{2}$ với mọi x.

(c) Cho $x = y = z = 1$ ta nhận được $f(1) = \frac{1}{2}$.

(d) Cho $y = z = 1$ ta nhận được $f(x) \geq \frac{1}{2}$

Vậy $f(x) \equiv \frac{1}{2}$ và dễ thử đó là đáp số của bài toán.

2. Cho trước số lẻ $k > 1$. Với mỗi số nguyên dương n ta xác định $f(n)$ là số nguyên không âm lớn nhất sao cho $k^n - 1$ chia hết cho $2^{f(n)}$. Hãy xác định công thức tính $f(n)$ theo k và n.

Bài giải. Đây là một câu hỏi quen thuộc trong Lý thuyết số, tức là tìm số mũ của 2 (mà tổng quát là cho một số nguyên tố tuỳ ý) trong phân tích chính tắc của các số dạng $k^n - 1$ với k cho trước, tuy vậy câu hỏi này có lẽ không phù hợp với một bài thi Toán do cách hỏi mang tính chung chung của nó và kết quả chỉ mang tính định tính, có ý nghĩa lý thuyết nhiều hơn.

Để xác định công thức của $f(n)$ ta cần xác định một số công thức truy hồi sau. Đầu tiên ta xét $f(4n)$, dễ dàng có $k^{4n} - 1 = (k^{2n} - 1)(k^{2n} + 1)$. Do k^{2n} là số chính phương lẻ nên $k^{2n} + 1$ là số nguyên chẵn không chia hết cho 4. Vì thế mà $f(4n) = f(2n) + 1$ với mọi số nguyên dương n.

Tiếp theo ta sẽ chứng minh một kết quả: Nếu $f(1) = a$ thì với mọi số nguyên dương lẻ m ta có $f(m) = a$. Thực vậy, với mọi số m lẻ ta có $k^m - 1 = (k-1)(k^{m-1} + \cdots + 1)$ và để ý rằng $k^{m-1} + \cdots + k + 1$ là tổng của một số lẻ các số lẻ, do đó là số lẻ. Vậy ta có hệ thức $f(n) = f(1)$ với mọi n lẻ. Ngoài ra cần chú ý rằng lập luận trên đúng cho một số nguyên k lẻ tuỳ ý (tức không nhất thiết phải là số dương)

Bây giờ ta xét đến $f(4n+2)$. Ta kí hiệu $g(n)$ là số nguyên không âm lớn nhất thoả mãn $2^{g(n)} | k^n + 1$. Nhờ nhận xét cuối cùng ngay phía trên mà ta có $g(n) = g(1)$ với mọi n nguyên dương lẻ. Lúc này từ $k^{4n+2} - 1 = (k^{2n+1} - 1)(k^{2n+1} + 1)$ ta suy ra $f(4n+2) = f(2n+1) + g(2n+1) = f(1) + g(1)$.

Đến đây ta đã có thể hoàn thành công thức cần tìm: với mỗi số nguyên dương n ta viết $n = 2^m t$ với t là số nguyên dương lẻ. Khi đó

$$f(n) = \begin{cases} f(1) & \text{nếu } m = 0 \\ m - 1 + f(1) + g(1) & \text{nếu } m > 0 \end{cases}$$

trong đó $f(1)$ là số mũ của 2 trong $k-1$ và $g(1)$ là số mũ của 2 trong $k+1$ và chú ý rằng $\min\{f(1), g(1)\} = 1$.

3. Cho một góc tam diện vuông $Oxyz$ và ba điểm cố định A, B, C theo thứ tự nằm trên Ox, Oy, Oz. Một mặt cầu (E) thay đổi nhưng luôn đi qua A, B, C và (E) cắt thêm các cạnh Ox, Oy, Oz của góc tam diện lần lượt tại các điểm A', B', C'. Gọi M và M' theo thứ tự là trọng tâm của tam giác $A'BC$ và $AB'C'$. Hỏi rằng khi mặt cầu (E) thay đổi thì trung điểm S của đoạn thẳng MM' chạy trên hình nào?

   Bài giải. Ta sử dụng vector vào bài toán này. Ta có hệ thức sau đây

$$\overrightarrow{OS} = \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'}) = \frac{1}{6}(\sum_{sym} \overrightarrow{OA} + \sum_{sym} \overrightarrow{OA'})$$

   Nếu gọi A'', B'', C'' là trung điểm của các đoạn thẳng AA', BB', CC' thì ta có hệ thức

$$\overrightarrow{OS} = \frac{1}{3} \cdot \sum_{sym} \overrightarrow{OA''}$$

   Vì tam diện đã cho là tam diện vuông nên OE chính là đường chéo của hình hộp chữ nhất với ba cạnh cơ sở là OA'', OB'', OC'' hay ta có hệ thức vector sau

$$\overrightarrow{OE} = \sum_{sym} \overrightarrow{OA''}$$

   Như vậy quỹ tích của điểm E là ảnh vị tự quỹ tích của tâm mặt cầu theo tỷ số $\frac{1}{3}$ với tâm vị tự O. Dễ dàng thấy rằng quỹ tích điểm E chính là nửa đường thẳng It_0 hướng vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại tâm đường tròn ngoại tiếp I của tam giác ΔABC và hướng trong phần nửa không gian không chứa điểm O. Từ đó dễ dàng suy ra quỹ tích của điểm E.

4. Có 1991 học sinh đứng thành một vòng tròn và quay mặt vào trong để chơi một chò trơi đếm số như dưới đây. Mỗi học sinh đếm một số lần lượt theo chiều kim đồng hồ, bắt đầu từ học sinh A nào đó. Các số đếm được là $1, 2, 3$ và cứ lặp theo thứ tự như thế. Nếu học sinh nào đếm số 2 hoặc số 3 thì phải rời ngay khỏi vị trí của vòng tròn. Học sinh còn lại cuối cùng sẽ được thưởng. Hỏi học sinh muốn được thưởng thì lúc bắt đầu chơi phải chọn vị trí thứ bao nhiêu theo chiều kim đồng hồ kể từ học sinh A đếm số 1 lần đầu tiên ?

   Bài giải. Đầu tiên ta xét trò chơi trong trường hợp số người tham gia là 3^n. Khi đó chia số người ra thành các nhóm với mỗi nhóm có 3 người. Sau mỗi vòng đếm thì đương nhiên sẽ chỉ còn lại $3^n - 2\cdot 3^{n-1} = 3^{n-1}$ người và người đếm số 1 đầu tiên sẽ đếm số 1 đầu tiên ở các vòng sau. Do đó anh ta là người duy nhất được thưởng

Quay trở lại bài toán, đầu tiên ta có $3^6 < 1991 < 3^7$. Vì rằng sau một số lần chắc chắn chỉ còn lại đúng 1 người nên để tìm ra người chiến thắng đầu tiên ta cần có $1991 - 729 = 1262$ người cần phải rời khỏi vòng trước khi còn 3^6 người. 1262 người này nằm trong $1262/2 = 631$ nhóm ba người, tức là cần có $631 = 1893 < 1991$ người đứng trước đó. Vì thế mà muốn chiến thắng bạn cần phải là người đứng thứ 1894 nếu như người đếm đầu tiên được đánh số là 1.

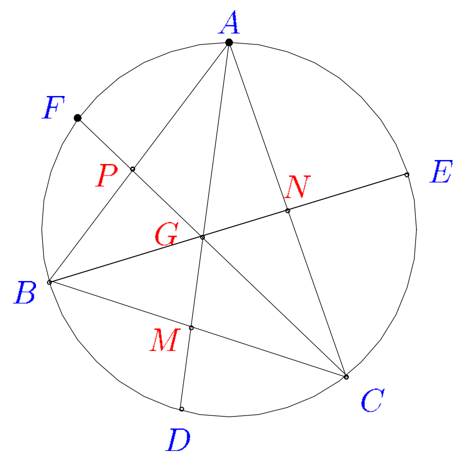
Comment. Thực tế ta có thể giải bài toán trên tổng quát cho n người bất kì cho trước với một lý luận mang tính chặt chẽ hơn nhờ việc xây dựng truy hồi một hàm đếm.

5. Cho tam giác ΔABC với trọng tâm là G và nội tiếp trong đường tròn bán kính R, các đường trung tuyến của tam giác này xuất phát từ các đỉnh A, B, C kéo dài cắt đường tròn lần lượt tại D, E, F. Chứng minh rằng

$$\frac{3}{R} \leq \frac{1}{GD} + \frac{1}{GE} + \frac{1}{GF} \leq \sqrt{3}\cdot\left(\frac{1}{AB} + \frac{1}{BC} + \frac{1}{CA}\right)$$

Bài giải. Trước tiên ta đưa vào vài kí hiệu; a, b, c tương ứng là độ dài của các đoạn thẳng BC, CA, AB và m_a là độ dài đường trung tuyến xuất phát từ đỉnh A. Ta cũng kí hiệu giao điểm của các đường trung tuyến xuất phát từ các đỉnh A, B, C đến các cạnh đối diện là M, N, P. Sử dụng tính chất phương tích ta có $MA\cdot MD = MB\cdot MC = \dfrac{a^2}{4}$ hay $MD = \dfrac{a^2}{4m_a}$. Ta có $GD = GM + MD = \dfrac{1}{3}\cdot m_a + \dfrac{a^2}{4m_a} \geq 2\sqrt{\dfrac{1}{3}\cdot m_a\cdot\dfrac{a^2}{4m_a}} = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$, do đó mà ta có bất đẳng thức $\dfrac{1}{GD} \leq \dfrac{\sqrt{3}}{BC}$. Tương tự ta cũng nhận được hai bất đẳng thức nữa, cộng tất cả lại ta sẽ nhận được

$$\frac{1}{GD} + \frac{1}{GE} + \frac{1}{GF} \leq \sqrt{3}\cdot\left(\frac{1}{AB} + \frac{1}{BC} + \frac{1}{CA}\right)$$



Tiếp theo ta đánh giá bất đẳng thức còn lại. Theo tính toán ở trên, $GD = \dfrac{4m_a^2 + 3a^2}{12m_a}$. Ta sử dụng công thức đường trung tuyến $4m_a^2 = 2(b^2 + c^2) - a^2$ ta nhận được $GD = \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{6m_a}$ hay $\dfrac{GA}{GD} = \dfrac{4m_a^2}{a^2 + b^2 + c^2}$. Hay

$$\sum_{cyclic} \frac{GA}{GD} = \frac{3(a^2 + b^2 + c^2)}{a^2 + b^2 + c^2} = 3$$

cộng vào cả hai vế với 3 ta nhận được

$$\sum_{cyclic} \frac{AD}{GD} = 6$$

Cuối cùng ta để ý rằng AD là dây cung của đường tròn ngoại tiếp nên độ dài của nó không vượt quá độ dài đường kính của đường tròn đó, nghĩa là không vượt quá $2R$. Do vậy

$$6 = \sum_{cyclic} \frac{AD}{GD} \leq \sum_{cyclic} \frac{2R}{GD}$$

hay

$$\frac{3}{R} \leq \frac{1}{GD} + \frac{1}{GE} + \frac{1}{GF}$$

6. Cho các số dương x, y, z dương thoả mãn $x \geq y \geq z$. Chứng minh rằng

$$\frac{x^2y}{z} + \frac{y^2z}{x} + \frac{z^2x}{y} \geq x^2 + y^2 + z^2$$

Bài giải. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$x^2 \cdot \frac{y-z}{z} + y^2 \cdot \frac{z-x}{x} + z^2 \cdot \frac{x-y}{y} \geq 0$$

Trên thực tế điều này được suy ra không mất khó khăn như sau

$$x^2 \cdot \frac{y-z}{z} + y^2 \cdot \frac{z-x}{x} + z^2 \cdot \frac{x-y}{y} \geq \frac{x^2(y-z) + y^2(z-x) + z^2(x-y)}{y}$$

Tử thức của biểu thức cuối cùng có thể thấy là không âm nhờ biến đổi đại số đơn giản sau

$$x^2(y-z) + y^2(z-x) + z^2(x-y) = (y-z)(x-y)(x-z) \geq 0$$

© Copyright 2005 by Hà Duy Hưng & www.ddtoanhoc.net

1.31 Năm 1992

1. Cho tứ diện $ABCD$ thoả mãn tổng ba góc phẳng đỉnh A và B cùng bằng 180^0. Hai góc phẳng tại C là $\widehat{ACD}$ và $\widehat{BCD}$ có tổng bằng 180^0. Hãy xác định tổng các diện tích của bốn mặt theo $k = AC + CB$ và $\widehat{ACB} = x$.

2. Với mỗi số nguyên dương n kí hiệu $f(n)$ là số các ước dương của n mà đồng dư với ± 1 theo modulo 10, và xác định $g(n)$ là số các ước dương của n mà đồng dư với ± 3 theo modulo 10. Chứng minh rằng $f(n) \geq g(n)$.

3. Cho các số dương a, b, c. Xác định dãy $\{a_n\}, \{b_n\}$ và $\{c_n\}$ thoả mãn $a_0 = a, b_0 = b$ và $c_0 = c$, đồng thời
$$a_{n+1} = a_n + \frac{2}{b_n + c_n}\ ,\ b_{n+1} = \frac{2}{c_n + a_n}\ ,\ c_{n+1} = c_n + \frac{2}{a_n + b_n}$$
với mọi $n \in \mathbb{Z}_+$. Chứng minh rằng a_n tiến đến vô hạn khi n tiến ta vô cùng.

4. Một hình chữ nhật kích thước 1991×1992 được chia thành các hình vuông đơn vị, mà ta đánh số các hình vuông đó bởi (m, n) với $1 \leq m \leq 1991$ và $1 \leq n \leq 1992$ (tức là ô vuông nằm ở dòng thứ m và cột thứ n. Đầu tiên ta sơn mầu các hình vuông $(m, n), (m + 1, n + 1)$ và $(m + 2, n + 2)$ với $m < 1989, n < 1991$. Sau đó mỗi lần tô mầu ta tô ba hình vuông chưa tô mầu mà nằm trên cùng một hàng hoặc trên cùng một cột. Hỏi rằng với cách làm trên có thể tô mầu tất cả các hình vuông của hình chữ nhật hay không.

5. Cho hình chữ nhật $ABCD$ với tâm O và góc $\widehat{AOB} \leq 45^0$. Quay hình chữ nhật quanh tâm O bởi góc x thoả mãn $0^0 < x < 360^0$. Hãy xác định x để phần giao của hình chữ nhật mới và hình chữ nhật ban đầu có diện tích bé nhất có thể.

6. Cho đa thức $p(x)$ với hằng số dẫn đầu bằng 1 và mọi hệ số là bằng 0 hoặc 1. Chứng minh rằng đa thức $p(x)$ không có nghiệm thực nào lớn hơn $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$

© Copyright 2005 by Hà Duy Hưng & www.ddtoanhoc.net

1.32 Năm 1993

1. Cho $f : \left[\sqrt{1995}, \infty\right) \longrightarrow \mathbb{R}$ được xác định bởi $f(x) = x\left(1993+\sqrt{1995-x^2}\ \right)$. Hãy xác định các giá trị lớn nhất và bé nhất của hàm số đó.

2. Cho $ABCD$ là tứ giác thoả mãn AB không song song với CD và BC không song song với AD. Các điểm P, Q, R, S thay đổi được lấy trên AB, BC, CD, DA tương ứng sao cho $PQRS$ là hình bình hành. Hãy xác định quỹ tích tâm của hình bình hành đó.

3. Hãy xác định hàm $f(n)$ xác định trên tập các số nguyên dương với các giá trị nguyên dương thoả mãn $f\big(f(n)\big) = 1993n^{1945}$ với mọi n nguyên dương.

4. Cho tứ diện $ABCD$ với các đỉnh nằm trên một mặt cầu cố định S. Hãy xác định tất cả các vị trí có thể của tứ diện để biểu thức $AB^2 + AC^2 + AD^2 - BC^2 - BD^2 - CD^2$

5. Có 1993 điểm được sắp xếp trên đường tròn. Tại thời điểm ban đầu mỗi điểm được gán tuỳ ý các số là $+1$ hoặc là -1. Tại lần thứ $n = 1, 2, 3, \ldots,$ các đỉnh sẽ được thay nhãn. Vào lần thứ n một đỉnh được gắn số $+1$ nếu như hai số lân cận có cùng số gắn liền ở lần thứ $n - 1$. Chứng minh rằng đến một lần n nào đó thì tất cả các số đều bằng 1.

6. Người ta xác định dãy $a_0, a_1, a_2, \ldots,$ và $b_0, b_1, b_2, \ldots,$ thoả mãn $a_0 = 2, b_0 = 1$, $a_{n+1} = \dfrac{2a_nb_n}{a_n + b_n}$, $b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1}b_n}$. Hãy xác định hai dãy nói trên hội tụ có cùng giới hạn và hãy xác định giới hạn của chúng.

© Copyright 2005 by Hà Duy Hưng & www.ddtoanhoc.net

1.33 Năm 1994

1. Giải hệ phương trình sau đây

$$\begin{cases} x^3 + 3x - 3 + \ln(x^2 - x + 1) = y \\ y^3 + 3y - 3 + \ln(y^2 - y + 1) = z \\ z^3 + 3z - 3 + \ln(z^2 - z + 1) = x \end{cases}$$

2. Cho tam giác ABC. Lấy đối xứng các đỉnh của tam giác qua các cạnh đối diện của nó để được tam giác $A'B'C'$. Hãy xác định điều kiện cần và đủ trên tam giác ABC để hai tam giác ABC và $A'B'C'$ là tương đương.

3. Xác định dãy $x_0, x_1, x_2, \ldots,$ bởi $x_0 = a$ ở đó $0 < a < 1$ và

$$x_{n+1} = \frac{4}{\pi^2}\left(\arccos x_n + \frac{\pi}{2}\right)\arcsin x_n$$

Chứng minh rằng dãy đó hội tụ và hãy xác định giới hạn của chúng.

4. Có $n+1$ chiếc hộp được xếp trên một vòng tròn. Có một chiếc hộp có chứa n viên đá, những chiếc khác thì trống không. Ta xác định một cách chuyển đổi như sau: chọn hai chiếc hộp A và B, lấy hai viên đá từ A, một viên đặt nó vào một chiếc hộp gần kề với B, viên còn lại được đặt gần kề với A. Chú ý rằng ta có thể lấy $A \equiv B$. Với n như thế nào để sau khi thực hiện một chuỗi các chuyển đổi nói trên để nhận được rằng mỗi viên đá ở trong một chiếc hộp.

5. Giả sử S là một hình cầu tâm O. G và G' là hai đường tròn lớn vuông góc trên S. Lấy A, B, C trên G và D trên G' sao cho các đường cao của một tứ diện $ABCD$ giao tại một điểm. Hãy xác định quỹ tích của điểm giao.

6. Tồn tại hay không các đa thức $p(x), q(x)$ và $r(x)$ với các hệ số là các số nguyên dương thoả mãn điều kiện $p(x) = (x^2 - 3x + 3)q(x)$ và $q(x) = (x^2/20 - x/15 + 1/12)r(x)$?

© Copyright 2005 by Hà Duy Hưng & www.ddtoanhoc.net

1.34 Năm 1995

1. Hãy xác định tất cả các nghiệm thực của phương trình

$$x^3 - 3x^2 - 8x + 40 - 8(4x+4)^{1/4} = 0$$

2. Dãy số nguyên $\{a_n\}_{n=0}^{+\infty}$ được xác định bởi $a_0 = 1, a_1 = 3, a_{n+2} = a_{n+1} + 9a_n$ với n chẵn và $9a_{n+1} + 5a_n$ với n lẻ. Chứng minh rằng $a_{1995}^2 + a_{1996}^2 + a_{1997}^2 + a_{1998}^2 + a_{1999}^2 + a_{2000}^2$ chia hết cho 20, và rằng không có số hạng a_{2n+1} là số chính phương.

3. Cho tam giác ΔABC với các đường cao AD, BE, CF. Các điểm A', B', C' trên AD, BE, CF sao cho $AA'/AD = BB'/BE = CC'/CF = k$. Hãy xác định tất cả các số k để tam giác $A'B'C'$ đồng dạng với tam giác ABC

4. Cho tứ diện $ABCD$. A' là tâm của đường tròn ngoại tiếp mặt đối diện đỉnh A. Các điểm B', C', D' xác định tương tự. p_A là mặt phẳng đi qua A vuông góc với $C'D'$, p_B là mặt phẳng đi qua B và vuông góc với $D'A'$. p_C là mặt phẳng đi qua C và vuông góc với $A'B'$. Cuối cùng p_D là mặt phẳng đi qua D và vuông góc với $B'C'$. Chứng minh rằng bốn mặt phẳng nói trên có điểm chung. Hỏi rằng nếu điểm chung đó trùng với tâm của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ thì tứ diện đó phải đều có đúng không? Giải thích câu trả lời của bạn.

5. Hãy xác định tất cả các đa thức $p(x)$ thoả mãn $p(x) = a$ có hơn 1995 nghiệm thực, tất cả lớn hơn 1995, với mọi $a > 1995$ (nếu nghiệm nào đó có bội thì nó cũng được tính thành các nghiệm với số bội đó)

6. Có bao nhiêu cách để tô mầu các đỉnh của $2n$ đa giác đều với n mầu, sao cho mỗi đỉnh được tô một mầu, và bất kì mầu được dùng cho hai đỉnh không kề nhau? Hai cách tô mầu được coi là như nhau nếu cách này được nhận từ cách kia sau một phép quay.

© Copyright 2005 by Hà Duy Hưng & www.ddtoanhoc.net

1.35 Năm 1996

1. Hãy xác định tất cả các số thực x, y sao cho

$$\begin{cases} \sqrt{3x} \cdot \left(1 + \dfrac{1}{x+y}\right) = 2 \\ \sqrt{7y} \cdot \left(1 - \dfrac{1}{x+y}\right) = 4\sqrt{2} \end{cases}$$

2. $SABC$ là một tứ diện. DAB, EBC, FCA là các tam giác trong mặt phẳng của ABC đồng dạng với các tam giác SAB, SBC, SCA tương ứng. O là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF. Giả sử rằng K là mặt cầu ngoại tiếp của $SABC$ đối diện với O (cái mà tiếp xúc với các mặt phẳng SAB, SBC, SCA, ABC nằm trên các cạnh đối diện của ABC tới S, nhưng mà nằm trên cùng phía của đối với SAB của C, cùng phía đối với SBC của A, cùng phía đối với SCA của B). Chứng minh rằng K tiếp xúc với mặt phẳng ABC ở điểm O.

3. Cho n là một số nguyên dương và k là một số nguyên dương không lớn hơn n. Hãy xác định số các bộ k phần tử có thứ tự $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ thoả mãn các điều kiện sau đây
   (a) Tất cả các a_i đều phân biệt và thuộc vào $\{1, 2, \ldots, n\}$
   (b) $a_r > a_s$ với $r < s$ nào đó
   (c) a_r có cùng tính chẵn lẻ với r đối với r nào đó.

4. Hãy xác định tất cả các hàm số $f(n)$xác định trên tập các số nguyên dương với các giá trị nguyên dương thoả mãn

$$f(n) + f(n+1) = f(n+2)f(n+3) - 1996$$

   với mọi n nguyên dương.

5. Tam giác ΔABC với $BC = 1$ và góc A bằng x. Kí hiệu $f(x)$ là khoảng cách bé nhất có thể giữa tâm đường tròn nội tiếp và trọng tâm của tam giác. Hãy xác định $f(x)$. Hỏi rằng giá trị lớn nhất của $f(x)$ khi $60^0 < x < 180^0$ là bao nhiêu?

6. Cho x, y, z, w là các số thực không âm thoả mãn điều kiện $2(wx + wy + wz + xy + xz + yz) + wxy + xyz + yzw + zwx = 16$. Chứng minh rằng $3(w + x + y + z) \geq 2(wx + wy + wz + xy + xz + yz)$

© Copyright 2005 by Hà Duy Hưng & www.ddtoanhoc.net

1.36 Năm 1997

1. S là một đường tròn cố định với bán kính R. P là một điểm cố định nằm bên trong đường tròn với $OP = d < R$. Tứ giác $ABCD$ là một tứ giác thay đổi sao cho A, B, C, D nằm trên S, AC giao với BD tạp điểm P, và AC vuông góc tới BD. Hãy xác định giá trị lớn nhất và bé nhất của chu vi tứ giác $ABCD$ theo R và d.

2. Cho $n > 1$ là một số nguyê không chia hết cho 1997. Đặt $a_m = m + \dfrac{mn}{1997}$ với $m = 1, 2, \ldots, 1996$ và $b_m = m + \dfrac{1997m}{n}$ với $m = 1, 2, \ldots, n-1$. Sắp xếp tất cả các số hạng a_i, b_j trong một dãy theo thứ tự tăng dần. Chứng minh rằng hiệu giữa hai số hạng liên tiếp là bé hơn 2.

3. Có bao nhiêu hàm $f(n)$ xác định trên tập các số nguyên dương với các giá trị nguyên dương thoả mãn $f(1) = 1$ và $f(n)f(n+2) = f(n+1)^2 + 1997$ với mọi n nguyên dương.

4. Cho $k = \sqrt[3]{3}$. Hãy tìm một đa thức $p(x)$ với các hệ số hữu tỷ và cấp càng nhỏ càng tốt thoả mãn $p(k + k^2) = 3 + k$. Hỏi rằng có tồn tại hay không một đa thức $q(x)$ với hệ số nguyên thoả mãn $q(k + k^2) = 3 + k$?

5. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n có thể tìm được một số nguyên dương $f(n)$ sao cho $19^{f(n)} - 97$ mà chia hết cho 2^n.

6. Cho 75 điểm trong một lập phương đơn vị, sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng. Chứng minh rằng chúng ta có thể chọn được ba điểm tạo thành một tam giác với diện tích không vượt quá $7/72$.

© Copyright 2005 by Hà Duy Hưng & www.ddtoanhoc.net

1.37 Năm 1998

1. Xác định dãy $\{x_n\}$ bởi $x_1 = a \geq 1$, $x_{n+1} = 1 + \ln \dfrac{x_n(x_n^2+3)}{1+3x_n^2}$. Chứng minh rằng dãy đã cho hội tụ và xác định giới hạn của nó.

2. Cho O là tâm của hình cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$. Giả sử rằng A', B', C', D' là các điểm trên mặt cầu ngoại tiếp đó sao cho AA', BB', CC', DD' là các đường kính. Kí hiệu A'' là trọng tâm của tam giác BCD. Các điểm B'', C'', D'' xác định tương tự. Chứng minh rằng các đường thẳng $A'A$", $B'B$", $C'C$", $D'D$" là đồng quy. Giả sử rằng chúng gặp nhau tại X. Chứng minh rằng đường thẳng đi qua điểm X và trung điểm của đoạn thẳng AB là vuông góc với CD.

3. Cho dãy $a_0, a_1, a_2, \ldots,$ được xác định bởi $a_0 = 20$, $a_1 = 100$, $a_{n+2} = 4a_{n+1} + 5a_n + 20$. Hãy xác định số nguyên dương m bé nhất thoả mãn $a_m - a_0, a_{m+1} - a_1, a_{m+2} - a_2, \ldots$ là chia hết cho 1998.

4. Tồn tại hay không một dãy số thực vô hạn $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ thoả mãn $|x_n| \leq 0.666$ và $|x_m - x_n| \geq \dfrac{1}{n^2+n+m^2+m}$ với mọi m, n nguyên dương phân biệt

5. Tìm giá trị bé nhất của biểu thức
$$\sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2} + \sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2} + \sqrt{(x+2)^2+(y+2)^2}$$
với x, y là các biến thực.

6. Hãy xác định tất cả các số nguyên dương n sao cho tồn tại đa thức $p(x)$ với hệ số thực thoả mãn
$$p\Big(x^{1998} + \frac{1}{x^{1998}}\Big) = x^n + \frac{1}{x^n}$$

© Copyright 2005 by Hà Duy Hưng & www.ddtoanhoc.net

1.38 Năm 1999

1. Hãy xác định tất cả các nghiệm thực của hệ phương trình

$$\begin{cases}(1+4^{2x-y})\cdot 5^{y-2x+1} = 2^{2x-y+1}+1\\ y^3+4x+\ln(y^2+2x)+1=0\end{cases}$$

2. Cho tam giác ΔABC. Với A' là trung điểm của cung BC của một đường tròn ngoại tiếp không chứa A. B' và C' được xác định tương tự. Các đoạn thẳng $A'B'$, $B'C'$ và $C'A'$ giao nhau với các cạnh của tam giác tại sáu điểm , hai trên mỗi cạnh. Các điểm đó chia mỗi cạnh của tam giác thành ba phần. Chứng minh rằng ba đoạn ở giữa mỗi phần của cạnh bằng nhau khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

3. Dãy $a_1, a_2, a_3, \ldots,$ được xác định bởi $a_1 = 1, a_2 = 2$ và $a_{n+2} = 3a_{n+1} - a_n$. Dãy $b_1, b_2, b_3, \ldots,$ được xác định bởi $b_1 = 1, b_2 = 4$, $b_{n+2} = 3b_{n+1} - b_n$. Chứng minh rằng các số nguyên dương a, b thoả mãn $5a^2 - b^2 = 4$ khi và chỉ khi $a = a_n$ và $b = b_n$ với n nguyên dương nào đó.

4. Hãy xác định giá trị lớn nhất của biểu thức

$$\frac{2}{x^2+1} - \frac{2}{y^2+1} + \frac{3}{z^2+1}$$

với mọi số dương x, y, z thoả mãn $xyz + x + z = y$

5. Cho bốn tia OA, OB, OC, OD trong không gian sao cho góc giữa hai trong chúng là bằng nhau. Chứng minh rằng khi mà một tia thay đổi OX, thì tổng của các cosin của góc $\widehat{XOA}, \widehat{XOB}, \widehat{XOC}, \widehat{XOD}$ là hằng số và tổng các bình cosin của các góc đó cũng là hằng số.

6. Hãy xác định tất cả các hàm $f(n)$ xác định trên tập các số nguyên không âm với các giá trị trong $\{0, 1, 2, ..., 2000\}$ thoả mãn các điều kiện sau đây

   (a) $f(n) = n$ với $0 \le n \le 2000$

   (b) $f(f(m) + f(n)) = f(m+n)$ với mọi m, nnguyên dương.

© Copyright 2005 by Hà Duy Hưng & www.ddtoanhoc.net

1.39 Năm 2000

1. Xác định một dãy các số thực dương $x_0, x_1, x_2, \ldots$, bởi

$$x_0 = b \ , \quad x_{n+1} = \sqrt{c - \sqrt{c + x_n}}$$

Hãy xác định tất cả các giá trị của c thoả mãn đối với mọi b trong khoảng $(0, c)$ sao cho dãy là tồn tại và hội tụ đến một giới hạn khi n tiến ra vô cùng.

2. Cho hai đường tròn C và C' có các tâm là O và O' tương ứng sao cho các đường thẳng OX và $O'X'$ cắt nhau. M và M' là các điểm thay đổi trên C và C' tương ứng sao cho $\widehat{XOM} = \widehat{X'O'M'}$ (theo hướng ngược kim đồng hồ). Hãy xác định quỹ tích trung điểm của đoạn thẳng MM'. Giả sử rằng OM và $O'M'$ cắt nhau ở Q. Chứng minh rằng đường tròn của QMM' luôn đi qua một điểm cố định.

3. Cho $p(x) = x^3 + 153x^2 - 111x + 38$. Chứng minh rằng $p(n)$ chia hết cho 3^{2000} với ít nhất chín số nguyên dương n mà bé hơn 3^{2000}. Hỏi rằng có bao nhiêu số n như thế?

4. Cho một góc α thỏa mãn $0 < \alpha < \pi$. Chứng minh rằng có duy nhất một tam thức bậc hai $x^2 + ax + b$ là nhân tử của $p_n(x) = \sin \alpha x^n - \sin(n\alpha)x + \sin(n\alpha - \alpha)$ với $n > 2$. Chứng minh rằng không có một đa thức tuyến tính $x + c$ nào mà chia hết $p_n(x)$ với mọi $n > 2$.

5. Hãy xác định tất cả $n > 3$ thoả mãn chúng ta có thể tìm được n điểm trong không gian sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng và không có bốn điểm nào cùng nằm trên đường tròn và các đường tròn qua ba điểm bất kì là có cùng bán kính.

6. Cho đa thức $p(x)$ với hệ số thực thoả mãn $p(x^2 - 1) = p(x)p(-x)$. Hãy xác định số lớn nhất các nghiệm thực của $p(x)$ có thể có.

© Copyright 2005 by Hà Duy Hưng & www.ddtoanhoc.net

1.40 Năm 2001

1. Cho hai đường tròn O và O' cắt nhau ở A và B. Đường thẳng TT' tiếp xúc với đường tròn thứ nhất tại điểm T và đường tròn thứ hai tại T'. Các đường vuông góc từ T và T' cắt đường thẳng OO' tại S và S'. Tia AS cắt đường tròn thứ nhất tại R và tia AS' cắt đường tròn thứ hai tại R'. Chứng minh rằng R, B và R' thẳng hàng.

2. Cho số nguyên dương n và a, b là hai số nguyên lớn hơn 1nguyên tố cùng nhau. Giả sử rằng $M = a^{6^n} + b^{6^n}$ có ít nhất hai ước lẻ lớn hơn 1. Hãy xác định số dư của M cho $6 \cdot 12^n$.

3. Với số thực a, b được xác định dãy $x_0, x_1, x_2, \ldots,$ bởi $x_0 = a, x_{n+1} = x_n + b \sin x_n$. Nếu $b = 1$ chứng minh rằng dãy đã cho hội tụ tới một giá trị hữu hạn với mọi a. Nếu $b > 2$ chứng minh rằng dãy phân kì với a nào đó.

4. Hãy xác định giá trị lớn nhất của biểu thức
$$\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{2}{\sqrt{y}} + \frac{3}{\sqrt{z}}$$
ở đó x, y, z là các số dương thoả mãn điều kiện sau
$$\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2}} \leq z \leq \min\{x\sqrt{2}, y\sqrt{3}\} \\ x + z\sqrt{3} \geq \sqrt{6} \\ y\sqrt{3} + z\sqrt{10} \geq 2\sqrt{5} \end{cases}$$

5. Hãy xác định tất cả các hàm giá trị thực xác định trên khoảng $(-1; 1)$ thoả mãn
$$(1 - x^2) f\left(\frac{2x}{1 + x^2}\right) = (1 + x^2)^2 f(x)$$
với mọi x.

6. Cho $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ là một hoán vị của $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ sao cho
$$|a_i - a_{i+1}| \neq |a_j - a_{j+1}|$$
với mọi $i \neq j$. Chứng minh rằng $a_1 = a_{2n} + n$ khi và chỉ khi $1 \leq a_{2i} \leq n$ với $i = 1, 2, \ldots, n$

© Copyright 2005 by Hà Duy Hưng & www.ddtoanhoc.net

1.41 Năm 2002

1. Giải phương trình
$$\sqrt{4-3\sqrt{10-3x}}=x-2$$

2. Cho tam giác ΔABC cân với $AB=AC$. Gọi O là một điểm thay đổi trên đường thẳng BC thoả mãn tâm O của đường tròn bán kính OA không nhận các đường thẳng AB và AC làm tiếp tuyến. Các đường thẳng AB, AC cắt các đường tròn ở M, N tương ứng. Hãy xác định quỹ tích trực tâm của tam giác ΔAMN.

3. Cho $m<2001$ và $n<2002$ là các số nguyên dương. Một tập hợp các số thực phân biệt được sắp xếp trong một bảng với 2001 hàng và 2002 cột. Một số trong bảng được gọi là xấu nếu như nó bé hơn ít nhất m số trong cùng một cột và ít nhất n số trong cùng một dòng. Hỏi rằng số lớn nhất có thể của số xấu là bao nhiêu?

4. Nếu tất cả các nghiệm thực của x^3+ax^2+bx+c là thực thì hãy chứng minh rằng
$$12ab+27c\leq 6a^3+10\sqrt{(a^2-2b)^3}$$

5. Hãy xác định tất cả các số nguyên dương n để phương trình
$$a+b+c+d=n\sqrt{abcd}$$
có nghiệm số nguyên dương

6. Cho n là số nguyên dương. Chứng minh rằng phương trình
$$\frac{1}{x-1}+\frac{1}{2^2x-1}+\cdots+\frac{1}{n^2x-1}=\frac{1}{2}$$
có nghiệm duy nhất $x_n>1$. Chứng minh rằng khi n tiến ra vô hạn thì x_n tiến đến 4.

© Copyright 2005 by Hà Duy Hưng & www.ddtoanhoc.net

1.42 Năm 2003

1. Kí hiệu $\mathbb{R}$ là tập hợp các số thực. Một hàm $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ thoả mãn

$$f(\operatorname{cotg} x) = \cos 2x + \sin 2x$$

với mọi $0 < x < \pi$. Xác định hàm $g(x) = f(x)f(1-x)$ với $-1 \le x \le 1$. Hãy xác định giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $g(x)$ trên đoạn thẳng $[-1; 1]$.

2. Cho hai đường tròn C_1 và C_2 tiếp xúc ngoài nhau tại điểm M và bán kính của C_2 lớn hơn của C_1. Một điểm A chuyển động trên C_2 không thẳng hàng với đường thẳng đi qua hai tâm. B và C là các điểm trên C_1 thoả mãn AB và AC tiếp xúc với C_1. Các đường thẳng BM, CM giao với C_2 lần nữa tại E, F tương ứng. D là giao của tiếp tuyến tại A và đường thẳng EF. Chứng minh rằng quỹ tích của điểm D khi mà A thay đổi là một đường thẳng.

3. Cho S_n là số các hoán vị của $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ của $(1, 2, \ldots, n)$ thoả mãn $1 \le |a_k - k| \le 2$ với mọi k. Chứng minh rằng $7/4S_{n-1} < S_n < 2S_{n-1}$ với mọi số nguyên $n > 6$.

4. Hãy xác định số nguyên dương n lớn nhất thoả mãn rằng các phương trình sau có nghiệm số nguyên $x, y_1, y_2, \ldots, y_n$

$$(x+1)^2 + y_1^2 = (x+2)^2 + y_2^2 = \cdots = (x+n)^2 + y_n^2$$

5. Xác định đa thức $p(x) = 4x^3 - 2x^2 - 15x + 9$ và $q(x) = 12x^3 + 6x^2 - 7x + 1$. Chứng minh rằng mỗi đa thức có ít nhất ba nghiệm thực phân biệt. Cho A là nghiệm số lớn nhất của $p(x)$ và B là nghiệm lớn nhất của đa thức $q(x)$. Chứng minh rằng $A^2 + 3B^2 = 4$.

6. Kí hiệu $\mathbb{R}^+$ là tập hợp các số thực dương. Kí hiệu $\mathcal{F}$ là tập hợp tất cả các hàm $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ thoả mãn:

$$f(3x) \ge f\big(f(2x)\big) + x$$

với mọi x. Hãy xác định hằng số thực α lớn nhất thoả mãn $f(x) \ge \alpha \cdot x$ với mọi $f \in \mathcal{F}$ và mọi $x \in \mathbb{R}^+$.

© Copyright 2005 by Hà Duy Hưng & www.ddtoanhoc.net

1.43 Năm 2004

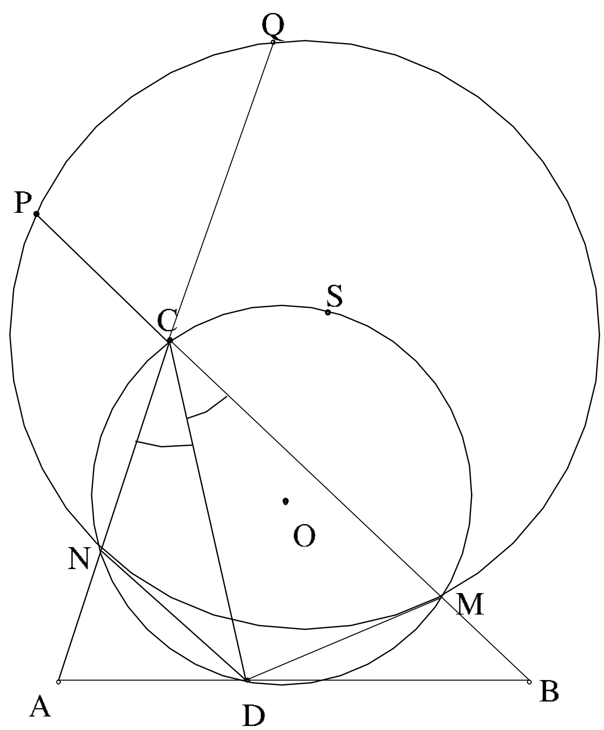
1. Giải hệ phương trình sau đây

$$\begin{cases} x^3 + x(y-z)^2 = 2 \\ y^3 + y(z-x)^2 = 30 \\ z^3 + z(x-y)^2 = 16 \end{cases}$$

2. Cho tam giác ΔABC trong mặt phẳng. D là giao điểm của đoạn thẳng AB với đường phân giác trong góc $\widehat{ACB}$ của tam giác ΔABC. Xét một đường tròn (O) thay đổi luôn đi qua hai điểm C và D và không tiếp xúc với các đường thẳng BC và CA. Đường tròn này cắt BC và CA tương ứng tại các điểm thứ hai M và N.

   (a) Chứng minh rằng tồn tại một đường tròn (S)tiếp xúc với các đường thẳng DM, DN tại M, N tương ứng.

   (b) Đường tròn (S) cắt các đường thẳng BC và AC tại các điểm tương ứng là P và Q. Chứng minh rằng các độ dài của các đoạn thẳng MP và NQ là hằng số khi mà đường tròn (O) thay đổi.



3. Chúng ta kí hiệu A là tập tất cả 16 số nguyên dương đầu tiên $A = \{1, 2, \ldots, 16\}$. Hãy xác định số nguyên dương bé nhất k cía mà có tính chất sau đây: với mọi tập con của A mà có đúng k phần tử chúng ta có thể tìm được trong nó hai phần tử a, b mà $a^2 + b^2$ là số nguyên tố.

4. Xét dãy số thực $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ được xác định bởi

$$x_1 = 1 \text{ and } x_{n+1} = \frac{(2+2\cos 2\alpha)x_n + \cos^2\alpha}{(2-2\cos 2\alpha)x_n + 2 - cos2\alpha}$$

với mọi $n = 1, 2, \ldots$. Ở đó α là một tham số thực. Hãy xác định tất cả các giá trị có thể của α sao cho dãy $\{y_n\}_{n=1}^{+\infty}$ với

$$y_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+2x_n}$$

có giới hạn hữu hạn khi mà n tiến ra vô hạn. Hãy xác định các giới hạn đó trong các trường hợp của α tìm được.

5. Xét các số thực dương x, y, z thoả mãn điều kiện

$$(x+y+z)^3 = 32xyz$$

Hãy xác định giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{x^4+y^4+z^4}{(x+y+z)^4}$$

6. Với mỗi số nguyên dương n ta kí hiệu $S(n)$ là tổng của tất cả các chữ số của n trong cơ sở 10. Xét tất cả các số nguyên dương m thoả mãn $2003|m$, tìm giá trị bé nhất có thể của $S(m)$.

© Copyright 2005 by Hà Duy Hưng & www.ddtoanhoc.net

1.44 Năm 2005

1. Cho x, y là các số thực thoả mãn điều kiện:

$$x - 3\sqrt{x+1} = 3\sqrt{y+2} - y$$

Hãy xác định giá trị lớn nhất và bé nhất của biểu thức $P = x + y$.

2. Cho (O) là một đường tròn cố định bán kính R. Lấy các điểm A và B cố định trên đường tròn (O) thoả mãn A, B và O không thẳng hàng. Xét điểm thay đổi C nằm trên đường tròn (O) $(C \neq A, B)$. Dựng hai đường tròn (O_1), (O_2) đi qua các điểm A, B và tiếp xúc với BC, AC tại C, tương ứng. Đường tròn (O_1) giao với đường tròn (O_2) ở D $(D \neq C)$. Chứng minh rằng

   (a) $CD \leq R$;

   (b) Đường thẳng CD luôn đi qua một điểm không phụ thuộc vào điểm C khi C chạy trên đường tròn (O).

3. Cho đa giác $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ lồi tám cạnh sao cho không có ba đường chéo nào đồng quy. Giao của hai đường chéo tuỳ ý được gọi là một "nút". Xét tất cả các tứ giác lồi được tạo bởi bốn đỉnh của bát giác $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ và các tứ giác đó sẽ được gọi là những "tứ giác con". Hãy xác định số nguyên dương n bé nhất thoả mãn

   > Chúng ta có thể tô mầu n "nút" sao cho với mọi $i \neq k$ mà $i, k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, thì các số $s(i, k)$ là bằng nhau, ở đó $s(i, k)$ được kí hiệu là số các "tứ giác con" có A_i, A_k là các đỉnh và giao của hai đường chéo là một nút.

4. Hãy xác định tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thoả mãn điều kiện

$$f\big(f(x-y)\big) = f(x) \cdot f(y) - f(x) + f(y) - xy$$

với mọi $x, y \in \mathbb{R}$.

5. Hãy tìm tất các bộ ba (x, y, n) các số nguyên dương thoả mãn điều kiện

$$\frac{x! + y!}{n!} = 3^n.$$

6. Lấy $\{x_n\}$ là dãy số thực được xác định bởi $x_1 = a, x_{n+1} = 3x_n^3 - 7x_n^2 + 5x_n$, $n \in \mathbb{N}$. Hãy xác định tất cả các số thực a thoả mãn dãy $\{x_n\}$ có giới hạn hữu hạn khi mà $n \to +\infty$ và xác định giới hạn đó trong trường hợp tìm được.

© Copyright 2005 by Hà Duy Hưng & www.ddtoanhoc.net