

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ SỐ 12

Câu 41: Tìm m để hàm số $f(x) = x^4 - 2mx^2 + 4$ có 3 điểm cực trị phân biệt với hoành độ nằm trong khoảng $(-3; 3)$.

A. $[0; 9]$

B. $[-3; 3]$

C. $(0; 9)$

D. $(-3; 3)$

Lời giải

Chọn C

Ta có: $f'(x) = 4x^3 - 4mx = 4x(x^2 - m)$

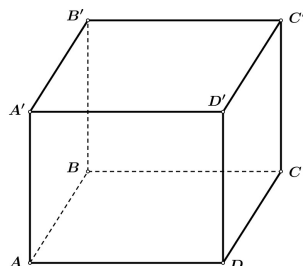
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = m \end{cases}$$

Để hàm số có 3 điểm cực trị phân biệt với hoành độ nằm trong khoảng $(-3; 3)$ thì $f'(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt thuộc $(-3; 3)$ tức là phương trình $x^2 = m$ có 2 nghiệm phân biệt khác 0 và thuộc $(-3; 3)$.

Suy ra $0 < m < 9$.

Vậy $m \in (0; 9)$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 42: Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a, AD = 2a$, diện tích tam giác $CC'D$ bằng $\sqrt{6}a^2$ (tham khảo hình vẽ)



Thể tích của khối hộp chữ nhật đã cho bằng

A. $4a^3$

B. $2\sqrt{6}a^3$

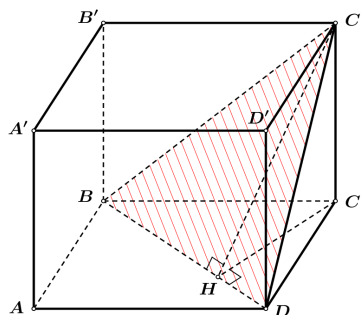
C. $\frac{2\sqrt{6}}{3}a^3$

D. $\frac{4}{3}a^3$

Lời giải

Chọn A

A.



Trong mp $(ABCD)$, kẻ $CH \perp BD$ thì $BD \perp (CHC'D) \Rightarrow BD \perp HC'D$.

Khi đó

$$D_{CBD} \text{ vuông tại } C \text{ có } BD = \sqrt{BC^2 + CD^2} = a\sqrt{5} \text{ và } CH = \frac{BC \cdot CD}{\sqrt{BC^2 + CD^2}} = \frac{2a}{\sqrt{5}}$$

$$S_{C\Phi D} = \frac{1}{2} HC \Phi BD \hat{=} HC \Phi = \frac{2S_{C\Phi D}}{BD} = \frac{2\sqrt{6}a}{\sqrt{5}}$$

$$\text{Tam giác } HCC \Phi \text{ vuông tại } C \text{ có } CC \Phi = \sqrt{HC \Phi^2 - HC^2} = 2a.$$

$$\text{Vậy thể tích khối hộp chữ nhật đã cho là } V = S_{ABCD} \cdot CC \Phi = 4a^3$$

Câu 43: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên I thỏa mãn $f(1) = 1$ và

$$f(4x) - x^3 f(x^4) = 3x^2 + 2x + 1 \text{ với mọi } x \in I. \text{ Khi đó } \int_1^4 x \cdot f'(x) dx \text{ bằng}$$

A. $I = 15$

B. $I = -1$

C. $I = 14$

D. $I = 6$

Lời giải

Chọn A.

$$\text{Ta có: } f(4x) - x^3 f(x^4) = 3x^2 + 2x + 1 \Rightarrow 4f(4x) - 4x^3 f(x^4) = 12x^2 + 8x + 4 (*)$$

$$\Rightarrow 4 \int_0^1 f(4x) dx - 4 \int_0^1 x^3 f(x^4) dx = \int_0^1 (12x^2 + 8x + 4) dx = 12$$

$$\text{Đặt } 4x = t \Rightarrow 4dx = dt. \text{ Đổi cận: } \begin{cases} x=0 \Rightarrow t=0 \\ x=1 \Rightarrow t=4 \end{cases}$$

$$\text{Nên: } 4 \int_0^1 f(4x) dx = \int_0^4 f(t) dt = \int_0^4 f(x) dx$$

$$\text{Đặt } x^4 = u \Rightarrow 4x^3 dx = du. \text{ Đổi cận: } \begin{cases} x=0 \Rightarrow u=0 \\ x=1 \Rightarrow u=1 \end{cases}$$

$$\text{Nên: } 4 \int_0^1 x^3 f(x^4) dx = \int_0^1 f(u) du$$

$$\text{Suy ra: } \int_0^4 f(x) dx - \int_0^1 f(x) dx = \int_1^4 f(x) dx = 12$$

$$\text{Đặt: } \begin{cases} u = x \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = f(x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_1^4 x f'(x) dx = x f(x) \Big|_1^4 - \int_1^4 f(x) dx = 4f(4) - f(1) - 12 = 4f(4) - 1 - 12 = 4f(4) - 13$$

$$\text{Chọn } x=1 \Rightarrow 4f(4) - 4f(1) = 24 \Leftrightarrow 4f(4) = 28$$

$$\text{Vậy } \int_1^4 x f'(x) dx = 28 - 13 = 15$$

- Câu 44:** Có bao nhiêu số nguyên $a \in (-2023; 2023)$ để phương trình $\frac{1}{\log_3(x+8)} + \frac{1}{7^x - 1} = x + a$ có 2 nghiệm phân biệt?
- A. 2028 B. 2016 C. 2027 D. 2015

Lời giải

Chọn B.

Điều kiện: $\begin{cases} x > -8 \\ x \neq 0, x \neq -7 \end{cases}$ $D = (-8; -7) \cup (-7; 0) \cup (0; +\infty)$

Xét hàm số

$$f(x) = \frac{1}{\log_3(x+8)} + \frac{1}{7^x - 1} - x \quad f'(x) = -\frac{1}{(x+8) \ln 3 \cdot \log_3^2(x+8)} - \frac{7^x \ln 7}{(7^x - 1)^2} - 1$$

$f'(x) < 0 \forall x \in D \Rightarrow f(x)$ nghịch biến trên từng khoảng xác định.

Bảng biến thiên:

x	-8	-7	0	$+\infty$	
$f'(x)$	-		-		-
$f(x)$	6,92				
		$+\infty$		$+\infty$	
		$-\infty$	$-\infty$		$-\infty$

Để phương trình $f(x) = a$ có 2 nghiệm phân biệt và $a \in \mathbb{Z}$ thì: $a \in \{7; 8; 9; \dots; 2022\}$

Vậy có 2016 giá trị a nguyên thỏa mãn yêu cầu bài toán.

- Câu 45:** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1; 2; 2)$, $B(3; 2; 6)$. Xét hai điểm M, N thay đổi thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho $MN = 16$. Giá trị nhỏ nhất của $AM + BN$ bằng.
- A. $4\sqrt{13}$ B. $4\sqrt{5}$ C. $5\sqrt{3}$ D. $2\sqrt{15}$

Lời giải

Chọn A.

Gọi $A'(-1; 2; 0)$, $B'(3; 2; 0)$ lần lượt là hình chiếu của A, B trên (Oxy) , khi đó:

$$AM + BN = \sqrt{AA'^2 + A'M^2} + \sqrt{BB'^2 + B'N^2} \geq \sqrt{(AA' + BB')^2 + (A'M + B'N)^2}$$

Ta có $MA' + A'B' + B'N \geq MN \Rightarrow A'M + NB' \geq MN - A'B' = 12$

$$\text{Nên } AM + BN \geq \sqrt{(AA' + BB')^2 + (A'M + B'N)^2} = \sqrt{8^2 + 12^2} = 4\sqrt{13}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow M, A', B', N$ theo thứ tự thẳng hàng và $\frac{AA'}{BB'} = \frac{A'M}{B'N} = 3$

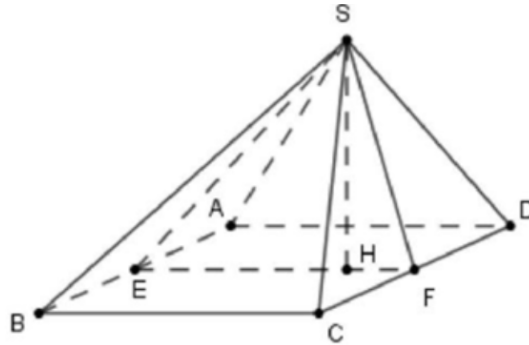
Câu 46: Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , tam giác SAB vuông cân tại S , tam giác

SCD có $SC = SD = \frac{a\sqrt{13}}{4}$. Thể tích khối chóp đã cho bằng

- A. $\frac{3\sqrt{7}}{16}a^3$ B. $\frac{\sqrt{13}}{24}a^3$ C. $\frac{3\sqrt{15}}{64}a^3$ D. $\frac{\sqrt{15}}{32}a^3$

Lời giải

Chọn D.



Gọi E, F lần lượt là trung điểm các cạnh AB, CD . Kẻ $SH \perp FE$ tại H .

Khi đó ta có: $\begin{matrix} AB \perp SE \\ AB \perp FE \end{matrix} \Rightarrow AB \perp (SFE) \Rightarrow SB \perp SH$

Mà $SH \perp FE \Rightarrow SH \perp (ABCD)$ tại H .

Ta có $\triangle SAB$ vuông cân tại S ; $AB = a \Rightarrow SE = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}a$

$\triangle SDF$ vuông ở $F \Rightarrow SF = \sqrt{SD^2 - FD^2} = \frac{3a}{4}$

Xét tam giác SFE có: $SE = \frac{a}{2}; FE = a; SF = \frac{3}{4}a \Rightarrow p_{\triangle SFE} = \frac{9}{8}a$

$$\Rightarrow S_{\triangle SFE} = \sqrt{p(p-SF)(p-SE)(p-FE)} = \frac{3a^2\sqrt{15}}{64}$$

$$\text{Mà } S_{\triangle SFE} = \frac{1}{2}SH.FE = \frac{1}{2}SH.a \Rightarrow \frac{3a^2\sqrt{15}}{64} = \frac{1}{2}SH.a \Rightarrow SH = \frac{3a\sqrt{15}}{32}$$

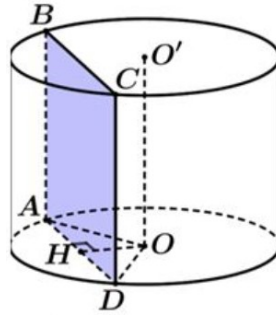
$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD}.SH = \frac{1}{3}.a^2.\frac{3a\sqrt{15}}{32} = \frac{a^3\sqrt{15}}{32}$$

Câu 47: Cho hình trụ có bán kính đáy bằng $2a$. Cắt hình trụ bởi một mặt phẳng song song với trục, cách trục một khoảng bằng a ta được thiết diện là một hình chữ nhật có diện tích bằng $8\sqrt{3}a^2$. Thể tích khối trụ đã cho bằng

- A. $4\pi a^3$ B. $16\pi a^3$ C. $32\pi a^3$ D. $27\pi a^3$

Lời giải

Chọn B.



Ta có $d(O; (ABCD)) = OH = a; OD = 2a$

$$\triangleright HD = \sqrt{OD^2 - OH^2} = \sqrt{3}a \triangleright AD = 2a\sqrt{3}$$

$$\text{Mà } S_{ABCD} = 8\sqrt{3}a^2 \triangleright AB \cdot AD = 8\sqrt{3}a^2 \wedge AB \cdot 2a\sqrt{3} = 8\sqrt{3}a^2 \wedge AB = 4a$$

$$\triangleright OO' = AB = 4a.$$

Thể tích khối trụ là $V = \pi r^2 h = \pi (2a)^2 \cdot 4a = 16\pi a^3$.

$$I = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 (2x+2) dx + \int_0^1 (2) dx + \int_1^2 (-2x+4) dx + \int_2^3 (-x+2) dx + \int_3^{\frac{15}{4}} (-1) dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2} = \frac{5}{4}$$

Câu 48: Giả sử z_1, z_2 là hai trong số các số phức z thỏa mãn $(z-6)(8-i\bar{z})$ là một số thực. Biết rằng $|z_1 - z_2| = 6$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $|z_1 + 3z_2|$ bằng

- A.** $5 - \sqrt{21}$ **B.** $20 - 4\sqrt{21}$ **C.** $-5 + \sqrt{73}$ **D.** $20 - 2\sqrt{73}$

Lời giải

Chọn D

Gọi A, B là các điểm biểu diễn cho $z_2; z_1$

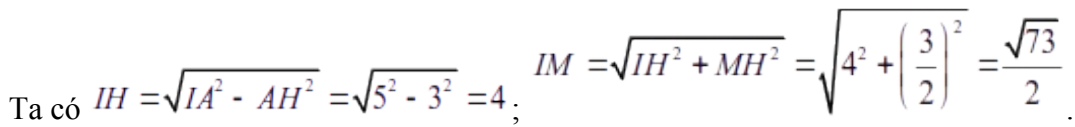
$$\text{Đặt } z = a + bi \Rightarrow (z-6)(8-i\bar{z}) = [(a-6)+bi] \cdot [(8-b)-ai]$$

$$\text{Do } (z-6)(8-i\bar{z}) \text{ là một số thực nên } -a(a-6)+b(8-b)=0 \Leftrightarrow a^2+b^2-6a-8b=0$$

Suy ra A, B thuộc đường tròn tâm $I(3;4)$, bán kính $R=5$

$$\text{Gọi } M \text{ điểm thỏa mãn } \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$$

Gọi H là trung điểm của AB



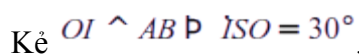
Xét biểu thức $|z_1 + 3z_2| = |\overbrace{3OA}^{\overline{OMOMOM}} + \overbrace{OB}^{\overline{OM}}| = |\overbrace{4OM}^{\overline{OMOMOMOM}} + \overbrace{3MA}^{\overline{OMOM}} + \overbrace{MB}^{\overline{OM}}| = 4OM$.

$$|z_1 + 3z_2|_{\min} = 4 \left(5 - \frac{\sqrt{73}}{2} \right) = 20 - 2\sqrt{73}$$

Biết tam giác SAB có bán kính đường tròn nội tiếp bằng $2\sqrt{5} - \sqrt{10}$, đường cao SO tạo với mặt phẳng (SAB) một góc 30° . Diện tích xung quanh của hình nón đã cho bằng

D. $2\sqrt{5}p$.

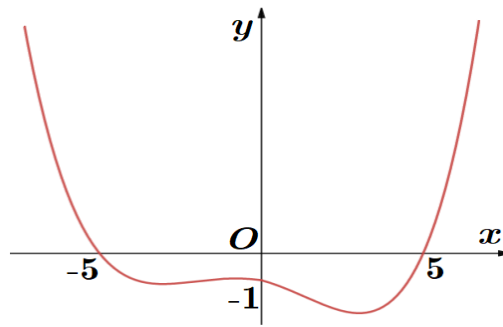
Chọn A.



Ta có: $S_{SAB} = p.r \cdot \frac{1}{2} \cdot l^2 = \frac{2 \cdot 1 \cdot \sqrt{10}}{2} \cdot (2\sqrt{5} - \sqrt{10})$ và $l = 2\sqrt{5}$. Từ đó suy ra: $AB = 2\sqrt{10}$,

Vây diện tích xung quanh: $S_{xq} = prl = 5\sqrt{10}p$

Câu 50: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f'(-7) < 0$ và đồ thị $f''(x)$ như hình vẽ.



Hàm số $g(x) = |6f(-x^4 + 2x^2 - 7) - 4x^6 + 12x^2|$ có tối đa bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 5. B. 9. C. 7. D. 3.

Lời giải

Chọn C.

Xét hàm số $h(x) = 6f(-x^4 + 2x^2 - 7) - 4x^6 + 12x^2$

$$h'(x) = 6(-4x^3 + 4x)f'(-x^4 + 2x^2 - 7) - 24x^5 + 24x$$

$$\hat{=} h'(x) = -24x(x^2 - 1)f'(-x^4 + 2x^2 - 7) - 24x(x^2 - 1)(x^2 + 1)$$

$$\hat{=} h'(x) = -24x(x^2 - 1)\{f'(-x^4 + 2x^2 - 7) + (x^2 + 1)\}$$

Ta có $-x^4 + 2x^2 - 7 = -(x^2 - 1)^2 - 6 \hat{=} -x^4 + 2x^2 - 7 \leq -6, \forall x$

Với $t \leq -6$, $f'(t) > 0$ nên $f'(-x^4 + 2x^2 - 7) + (x^2 + 1) > 0, \forall x$, khi đó:

$$\hat{=} h'(x) = 0 \hat{=} x(x^2 - 1) = 0 \hat{=} \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
$h'(x)$		+	0	-	0	+	0	-
$h(x)$								
	$-\infty$	$\nearrow h(-1)$	$\searrow h(0)$	$\nearrow h(1)$	$\searrow -\infty$			

Từ bảng biến thiên $h(0) = 6f(-7) < 0$ và $h(-1) > h(0)$.

Nên phương trình $h(x) = 6f(-x^4 + 2x^2 - 7) - 4x^6 + 12x^2 = 0$ có tối đa 4 nghiệm nên hàm số

$g(x) = |h(x)|$ có tối đa 7 điểm cực trị.